This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

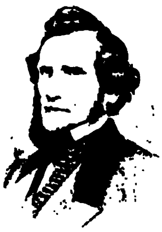
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

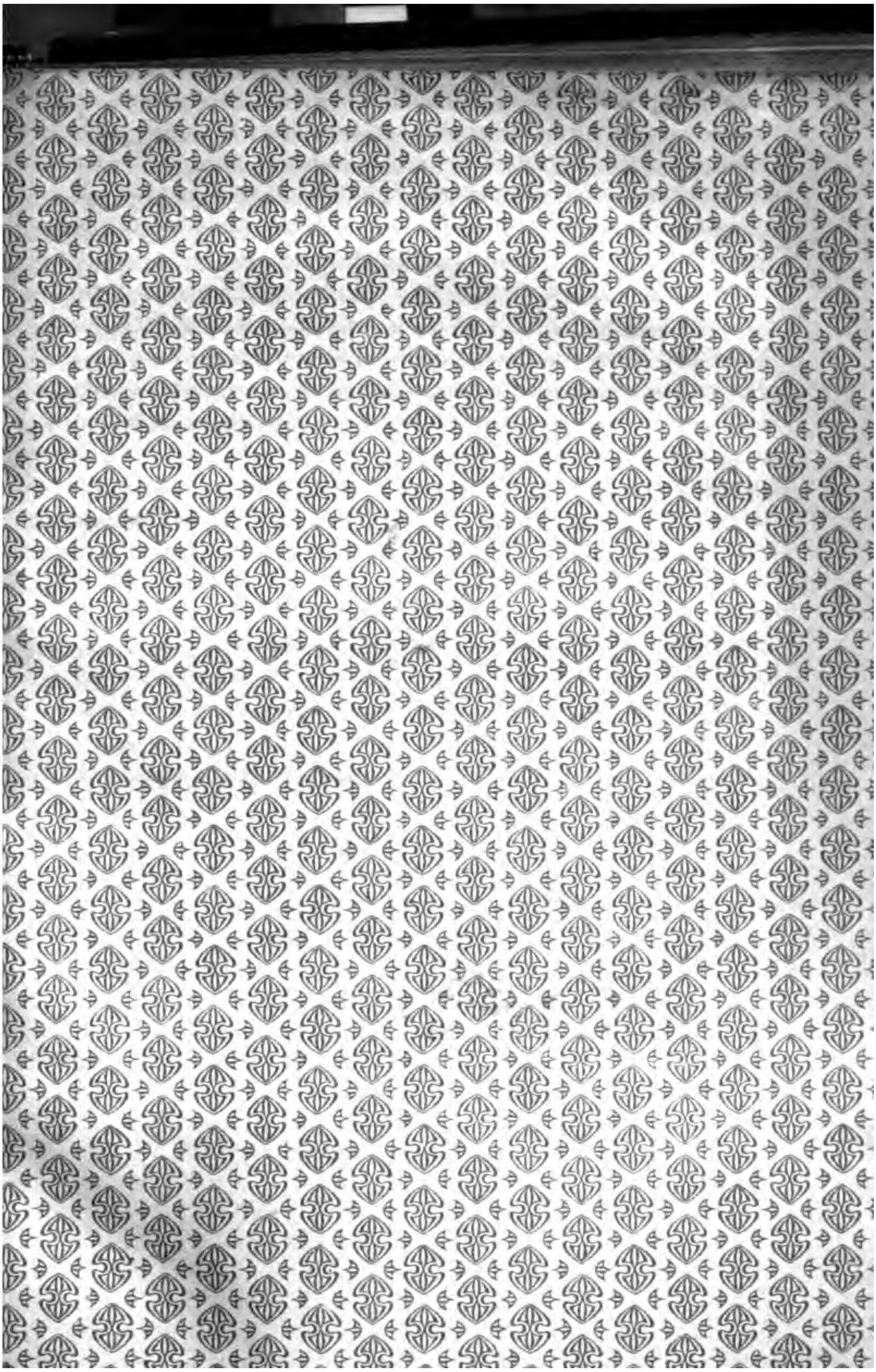
+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest



Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest

Q
54
.A17

MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS TERTIUS.

MÉLANGES
DE
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1762–1765.

A TURIN, MDCCLXVI.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
AVEC PERMISSION.

TABLE

des Mémoires contenus dans ce Volume.

Mémoire sur la différente dissolubilité des sels neutres dans l'esprit de vin, contenant des observations particulières sur plusieurs de ces sels. PAR M. MACQUER . . page 1

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA *de novis quibusdam experimentis electricis* 31

Hujus Opusculi impressa exemplaria jam inde a die 21. Februarii hujus anni 1766. doctiss. Viris & Amicis Auctor distribuerat.

De l'action de la chaux vive sur différentes substances. PAR M. LE COMTE SALUCES 73

Expériences pour chercher les causes des changemens qui arrivent au sirop violat par le mélange de différentes substances. PAR LE MEME 153

JOHANNIS - BAPTISTAE GABER *de humoribus animalibus specimen tertium* 165

CAROLI ALLIONII *stirpium aliquot descriptiones cum duorum novorum generum constitutione* 176

Manipulus insectorum Taurinensium a CAROLO ALLIONIO *editus* 185

JOH. PETRI MARIAE DANA *de Hirudinis nova specie, noxa, remediisque adhibendis* 199

EJUSDEM *de quibusdam Urticae marinae vulgo dictae differentiis* 213

Éclaircissemens sur le mouvement des cordes vibrantes. PAR M. EULER . . . . page 1

Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses. PAR M. EULER 27

Recherches sur l'intégration de l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{x^2} z$. PAR M. EULER . *p.* 60

Recherches sur la construction des nouvelles Lunettes à 5 & 6 verres, & leur perfection ultérieure. PAR M. EULER . 92

Formules de Dioptrique nécessaires pour l'intelligence du Memoire précédent. PAR M. DE LA GRANGE 152

Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1} dx\,(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$, *posito post interationem* $x = 1$, *Auctore* L. EULERO 156

Solution de différens problèmes de calcul intégral par M. DE LA GRANGE 179

Extrait de différentes Lettres de M. D'ALEMBERT *à* M. DE LA GRANGE *écrites pendant les années* 1764. & 1765. 381

MÉMOIRE

MEMOIRE

Sur la différente dissolubilité des Sels neutres dans l'esprit de vin contenant des observations particulières sur plusieurs de ces Sels.

PAR M. MACQUER.

L'Examen des propriétés des Sels neutres est une des plus importantes, mais en même tems une des plus vastes matières que nous offre la Chimie, sur tout si l'on étend comme celà est à propos la dénomination de *Sels neutres* à toutes les combinaisons des acides quelconques avec toutes les substances terreuses, alkalines salines & métalliques, avec les quelles ces acides sont capables de s'unir. La classe de ces corps-composés ou surcomposés est si étendue qu'il s'en faut encore beaucoup qu'on les connoisse tous; il en reste un grand nombre que les Chymistes n'ont jamais vû, & l'on peut dire même que toutes les propriétés des Sels neutres les plus communs, & les plus usités, ne nous sont point encore connues.

Une des propriétés de ces Sels qu'il est le plus important de connoître c'est leur dissolubilité plus ou moins grande, c'est cette propriété qui peut donner le plus de lumière sur le véritable état, ou sur le dégré de saturation réciproque de leurs acides & de leurs bases; il est aisé de sentir aussi que c'est de cette même propriété que dépendent principalement les phenomènes de leur cristallisation & que par consequent elle est intimement liée avec la théorie de cette grande & interessante operation.

a Mais

Mais quelques belles que soient les spéculations qu'on puisse faire sur ces objets, il n' est pas moins certain qu'elles ne peuvent être qu'incertaines & même trompeuses, à moins qu'elles ne soient fondées sur les faits, or les faits nous manquent précisément sur cette matière, ou du moins nous pouvons assûrer qu'il s'en faut encore beaucoup qu'on ait constaté tous ceux qu'il est essentiel de connoître. Plusieurs bons Chymistes ont à la vérité déterminé la quantité que peut dissoudre l'eau de plusieurs des Sels neutres des plus connus & c' est assurément un très-grand avantage, mais l' eau n' est pas le seul dissolvant qui ait de l'action sur les Sels; l'esprit de vin qui est un menstrue tenant en même tems de la nature de l'eau, & de celle de l'huile est capable d' agir aussi sur ces composés & d'en dissoudre plusieurs, en plus grande quantité que l' eau même; or personne que je sache n' à entrepris de déterminer quels sont les Sels, dont l' esprit de vin est le dissolvant & de quelle quantité il se charge de chacun de ces Sels; on sçait seulement en gros qu'il y a certains Sels, que l'esprit de vin dissout tels que, la *terre foliée*, le *Sel sedatif*, tandis qu'il ne touche point à d'autres, mais c' est là tout ce que l' on sçait, & cet objet mérite assurément bien qu' on se donne la peine de l' examiner plus à fond; une suite d' expériences exactes sur cette matière ne peut donc manquer de repandre du jour non seulement sur la nature des différens Sels, mais encore sur celle de l' esprit de vin; lors qu'on connoîtra bien quels sont les Sels que ce menstrue dissout, quels sont ceux qu'il ne dissout point, on sera à portée d'entreprendre une autre suite d' expériences relatives à la cristallisation de ces derniers qu'on pourra procurer par des additions successives de différentes quantités d'esprit de vin dans l' eau qui les tient en dissolution. Enfin l' esprit de vin étant un des dissolvans qu'on peut employer avec le plus de succès dans l'analyse des végétaux & des

des animaux par les menstrues, laquelle est sans contredit la plus exacte & la plus sure de toutes, on sera à portée de connoître quelles sont celles des parties Salines de ces composés que l' esprit de vin en peut extraire, & de les séparer ensuite de ce dissolvant pour les obtenir dans leur état naturel, & sans qu'elles aient souffert la moindre altération.

Ce sont là les principales considérations qui m' ont déterminé à entreprendre le travail que j' ai l' honneur de présenter à l' Illustre Academie des Sciences de Turin, & de soumettre à ses lumières; mais, comme je l' ai deja remarqué cet objet est d' une étendue si considérable, qu'il seroit impossible de l' épuiser dans un seul Memoire; j' ai donc été obligé de me borner dans celui-ci à un certain nombre de Sels, j' ai choisis ceux qui résultent de l'union des trois *acides minéraux*, *Vitriolique*, *Nitreux & Marin*, avec la *Terre calcaire*, *l'Alkali fixe végétal*, *l'Alkali fixe minéral*, *ou la base du Sel commun*, *l'Alkali volatil*, *l'Argent*, *le Cuivre*, *le Fer & le Mercure.*

Comme la qualité de l' esprit de vin peut influer beaucoup sur les résultats des expériences de la nature de celles dont je vais rendre compte, il est à propos que je détermine de quel espéce étoit l' esprit de vin dont je me suis servi; il a été le même pour toutes les expériences, j' ai crû devoir me servir d' esprit de vin le plus déphlegmé & le mieux rectifié qu'il seroit possible, mais rectifié sans aucune addition ny intermède, & simplement par des distillations bien ménagées & suffisamment réiterées, dans l'appréhension ou qu'il ne fut alteré par l' action des intermédes, ou qu'il n' en enlevat quelques portions avec lui dans la distillation, & que cela n'occasionnat quelque faux résultat dans les expériences. Celui dont je me suis servi & qui avoit été rectifié comme je l' ai dit sans aucun intermède, pesoit six gros cinquante quatre grains dans

 une

une fiole qui contient juste une once d' eau distillée, le Thermométre de M. de Réaumur étant à 10 degrés au dessus du terme de la glace. Je sçai qu'il est possible d'avoir de l' esprit de vin encore plus déphlegmé, j' en ai vû qui ne pesoit que six gros 48 à 49 grains dans la bouteille d'une once d' eau, mais j' ai donné la préférence a celui dont je viens de parler, par les raisons que j' ai dites, sauf à regarder comme nulles les quantités de Sel qu'il pourroit dissoudre à raison de son peu de flegme surabondant, quand ces quantités ne seroient que proportionnées à ce peu de flegme, c' est-à-dire assès petites, pour ne pouvoir être ni pesées, ni même appréciées.

En second lieu comme l' eau de la cristallisation des Sels pouvoit contribuer aussi à en faire dissoudre une beaucoup plus grande quantité dans l' esprit de vin, tous ceux des Sels que j' ai soumis à mes expériences, ont été d'abord entiérement dépouillés de leur eau de cristallisation par la désication la plus exacte, j' ai versé dans un matras sur chacun de ces Sels ainsi préparés une demi once de mon esprit de vin; j' ai mis le matras bouché, sur un bain de sable & je l' ai chauffé jusqu'à ce que l'esprit de vin commençat à bouillir, j' ai filtré cet esprit de vin tout bouillant, je l' ai laissé refroidir pour observer les cristallisations qui pourroient se faire par refroidissement, après quoi j'ai fait évaporer entiérement cet esprit de vin pour recueillir & peser ce qu'il laissoit de résidu salin. Toutes ces circonstances ont été observées pour chacune de mes expériences; elles ont été aussi reiterées chacune deux fois de la même manière, avec cette difference que la seconde fois je faisois bruler mon esprit de vin après la digestion sur le Sel, au lieu de l'évaporer, pour examiner les phenomenes que sa flamme pourroit présenter.

Tartre

Tartre vitriolé.

Après avoir avoir composé le *tartre vitriolé* moi même par la combinaison exacte & jusqu'au point précis de saturation de l' acide vitriolique avec l' alkali fixe végétal très-pur, après l' avoir exactement desséché, je l' ai traité comme je l' ai dit avec une demi once de mon esprit de vin, cet esprit de vin n'a rien laissé cristalliser par le refroidissement, & n' a laissé par son évaporation entière qu'une quantité trop petite de matière saline pour pouvoir être pesée & appreciée, ce qui me détermine à la regarder comme nulle par la raison que j' ai dite, & à conclure que l' esprit de vin ne dissout point le Tartre vitriolé. La flamme de l' esprit de vin qui avoit boüilli sur ce Sel ne différoit absolument en rien, de celle de l' esprit de vin le plus pur.

Nitre ordinaire.

Le Nitre que j'avois aussi composé moi même, comme je l' ai fait à l' égard de tous les autres, s' est dissous dans l' esprit de vin bouillant à la quantité de 4 grains sur la demi once d' esprit de vin, laquelle pése 288 grains une partie de ces 4 grains de Nitre s' est cristallisée très-confusement par le refroidissement. La flamme de cet esprit de vin étoit beaucoup plus grande, plus haute, plus ardente, plus jaune, & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur. La capsule dans laquelle cet esprit de vin avoit été brulé est restée seche, & j' y ai trouvé les quatre grains de Nitre sec. Je crois pouvoir conclure de cette expérience que l' esprit de vin dissout à l' aide de la chaleur de l' ebullition $\frac{4}{288}$ de son poids de Nitre.

Sel

Sel marin à base d'alkali végétal nommé communement Sel fébrifuge de Sylvius.

L'esprit de vin après avoir bouilli sur *le Sel marin à base d'alkali fixe végétal*, n'a rien laissé cristalliser par le refroidissement; par l'évaporation il a laissé près de 5 grains de ce Sel. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord comme celle de l'esprit de vin pur, mais elle est bientôt devenue grande, jaune, ardente, & lumineuse; il s'est trouvé pareillement 5 granis de Sel après cette combustion ainsi l'esprit de vin dissout $\frac{5}{200}$ de son poid du Sel dont il est question.

Sel de Glauber.

L'esprit de vin traité comme à l'ordinaire par l'ébullition sur le *Sel de Glauber* desséché, n'a rien laissé cristalliser de sensible par le refroidissement; il n'a rien laissé non plus après son évaporation, ny après sa combustion; cependant sa flamme avoit une couleur rouge considérable, mais malgré cette couleur de la flamme je crois pouvoir conclure que l'esprit de vin ne dissout point le Sel de Glauber, car on verra qu'il ne faut qu'une quantité infiniment petite de Sel pour changer totalement le caractère de la flamme de l'esprit de vin.

Nitre à base d'alkali marin nommé communement Nitre quadrangulaire.

L'esprit de vin traité avec le *Nitre quadrangulaire* a laissé cristalliser par le refroidissement, mais très-confusement, une asès bonne quantité de ce Sel; par l'évaporation & la déssiccation du tout, il s'en est trouvé 15 grains. La flamme de cet esprit de vin étoit d'un jaune lumineux rou-

rougeatre depuis le commencement jusqu' à la fin ; elle étoit décrépitante & même comme fulgurante & détonnante sur la fin ; après l' entière combustion, il s' est trouvé 18 grains de Nitre quadrangulaire un peu humide, qui se sont réduits à 15 grains par la désiccation. Il résulte de cette expérience que l' esprit de vin dissout $\frac{15}{100}$ de son poids de Nitre quadrangulaire.

Sel commun.

Le Sel commun traité avec l' esprit de vin ne s' est point dissous en quantité bien appréciable. Cependant la flamme de l' esprit de vin dans lequel il avoit bouilli avoit une couleur rouge considérable, & étoit plus grande & plus ardente que celle de l' esprit de vin pur.

Sel ammoniacal vitriolique.

J' ai fait le *Sel ammoniacal vitriolique*, qu'on nomme aussi *Sel ammoniac secret de Glauber*, en combinant ensemble jusqu'au point de saturation de l'acide vitriolique concentré avec de l' alkali volatil concret dégagé du Sel ammoniac par l' alkali fixe ; il s' est fait dans l' instant du mélange une très-vive effervescence ; il s' est excité beaucoup de chaleur ; il s' en est élevé beaucoup de vapeurs fort épaisses d' un odeur singulière. Ce Sel étant au point de saturation & bien desséché étoit très-blanc, d' une saveur vive & piquante, mais ni acide, ni alkaline, il s'est cristallisé en aiguilles comme le Nitre, & ne s' est point humecté a l' air. L' esprit de vin qui avoit bouilli sur ce Sel à laissé former par le refroidissement (le termométre de M. de Raumur étant à 14 dégrés au dessus de zero) quelques petits cristaux au tour du matras, ces cristaux étoient comme des points si petits que je n' ai pû en distinguer

ſtinguer la figure à la loupe, cet eſprit de vin n' a laiſſé par ſon entière évaporation qu'un enduit extrêmement mince & inappréciable. Sa flamme d'ailleurs ne différoit en rien de celle de l' eſprit de vin pur. Je conclus de là que l' eſprit de vin ne diſſout point le Sel ammoniacal vitriolique.

Nota. J' ai réiteré l' expérience précedente avec du Sel ammoniacal vitriolique, au quel j' avois donné pour baſe l' alkali volatil *fluor* du Sel ammoniac dégagé par la chaux, & il n' y a point eû de différence dans les réſultats.

Sel ammoniacal nitreux.

J' ai fait du *Sel ammoniacal nitreux* en mêtant jusqu' à parfaite ſaturation de l' eſprit volatil de Sel ammoniac dégagé par la chaux avec de l' acide nitreux très-pur. Cette combinaiſon s' eſt faite preſque ſans efferveſcence, mais il s'en eſt élevé un quantité très-conſiderable de vapeurs blanches fort épaiſſes. Ces vapeurs viennent des portions d'acide & d'alkali volatil qui s'élévent avant de s' être combinées & qui ſe rencontrent & s' uniſſent en l' air. Ce Sel après avoir été deſſéchè avoit une ſaveur de nitre très-fraiche, mais beaucoup plus vive & plus piquante que celle du nitre à baſe d'alkali fixe. L' eſprit de vin après avoir boüilli ſur ce Sel, & en avoir diſſous beaucoup comme on va le voir, le laiſſoit criſtalliſer abondamment par le moindre refroidiſſement; ces criſtaux étoient en petites aiguilles de la figure de celles du nitre, l' eſprit de vin chargé de ce Sel m' a paru avoir un odeur approchante de celle de l' *ether nitreux* il à laiſſé après ſon entière évaporation un gros & demi, ou 108 grains de nitre ammoniacal. La flamme de cet eſprit de vin étoit plus blanche & plus lumineuſe que celle de l' eſprit de vin pur; elle noirciſſoit un peu les corps blancs qu'on y expoſoit comme le fait celle de

de l' ether ; après que cette flamme a eu cessé d' elle même ; il est resté environ la moitié de la liqueur qui avoit une saveur de nitre ammoniacal très-forte.

La portion de ce Sel qui s' étoit cristallisée dans l'esprit de vin, étoit en cristaux transparens par ce qu'ils retenoient vraisemblablement de l' esprit de vin dans leur cristallisation, comme les Sels cristallisés dans l' eau retiennent pareillement une certaine quantité de cette eau dans leur cristaux. J' ai laissé ces cristaux exposés à l' air pendant cinq ou six jours le termométre étant à 18 & 19 dégrés ; ils ont perdu de leur transparence mais ne sont point devenus friables & en poudre comme ceux du Sel de Glauber, & autres Sels qui perdent beaucoup de leur eau de cristallisation par la seule exposition à l' air ; au contraire, ils ont acquis un consistance plus ferme, & adheroient assés fortement au verre qui les contenoit. L' esprit de vin dissout comme en le voit par cette expérience $\frac{100}{240}$ de son poids de Sel ammoniacal nitreux.

Sel ammoniac.

L' esprit de vin traité par la methode commune à toutes mes autres expériences avec le Sel ammoniac ordinaire, à dissout de ce Sel, & en a laissé cristalliser une quantité sensible par le refroidissement ; il s' est trouvé après son entiére évaporation qu'il en avoit dissous 24 grains. La flamme de cet esprit de vin ne m'a pas paru différer de celle de l' esprit de vin pur. L' esprit de vin dissout donc $\frac{24}{240}$ de son poids de Sel ammoniac.

Sel vitriolique à base calcaire ou sélénite.

Comme les Chymistes savent présentement que les *Pierres spéculaires gypseuses* sont des Sels neutres formés de l'union

de l'acide vitriolique avec de la terre calcaire; qu'elles ne sont en un mot que ce qu'on nomme *sélénite*, j'ai choisi pour l'expérience présente de nôtre Pierre spéculaire des environs de Paris. Après l'avoir bien lavée & netoyée, je l'ai calcinée & je l'ai traitée avec l'esprit de vin comme les autres Sels. Ce qu'il en a laissé après son entière évaporation n'étoit qu'un enduit infiniment mince & trop peu considérable pour pouvoir être recüeilli & apprecié, ainsi je mets ce Sel, par les raisons que j'ai dites, au nombre de ceux que l'esprit de vin ne dissout pas. La flamme d'ailleurs de cet esprit de vin n'avoit rien d'extraordinaire.

Nitre à base calcaire.

J'ai fait *le Nitre calcaire* en combinant ensemble jusqu'au point de saturation de l'acide nitreux très-pur avec de la *craye de champagne* lavée, après avoir filtré cette dissolution, je l'ai faite évaporer jusqu'à forte pellicule & l'ayant laissé exposée au frais de la nuit, le termométre étant à 11 dégrés au dessus de zero, cette liqueur s'est coagulée en une masse cristallisée en petites aiguilles extrêmement fines rassemblées en faisceaux & formant comme de pinceaux ou brosses; il y avoit autour de la capsule qui contenoit cette matière quelques points cristallisés en cristaux plus petits que les plus petits grains de sablon, ces points étoient environnés circulairement de petites aiguilles pareilles à celles de brosses, & ces aiguilles y aboutissoient comme à un centre, ensorte que cela representoit autant de petits soleils rayonnans, qu'il y avoit de points. Ce Sel avoit une saveur très-acre & très-amère & attiroit fortement l'humidité de l'air. Ayant voulu achever de le dessécher à feu moderé, je n'ai pu y réussir pendant plus de 24 heures; ce n'étoit toujours qu'une

liqueur visqueuse, un peu roussé, couverte d'une peau; elle se coaguloit lors qu'elle n'etoit plus chauffée, mais elle se resolvoit en liqueur tout de suite par l'humidité de l'air quoique le tems fût alors très-sec (c'étoit le 3 Juin) & que le termométre fût à 22 dégrés, elle avoit la consistence & la *poisserie* du miel. J'ai donc été obligé d'employer le feu nud au lieu du bain de sable dont je me servois d'abord pour dessécher; elle s'est reduite par la déficcation entière en une matière blanche ayant l'apparence d'une terre, il ne s'est néanmoins exhalé pendant cette déficcation aucunes vapeurs d'acide nitreux. J'ai pulverisé ce Sel & l'ai mis tout chaud dans un matras; il est si déliquescent que malgré la promptitude avec laquelle je faisois cet opération, il s'humectoit un peu, étant même encore chaud. J'ai versé dessus tout de suite la quantité ordinaire d'esprit de vin, & j'ai observé que cet esprit en dissolvoit beaucoup sans le secours de l'ébullition; à ce degré de chaleur il en à dissous une plus grande quantité, & s'en est même saturé, car il restoit encore au fond du Sel non dissous. L'esprit de vin chargé de ce nitre calcaire avoit une couleur rousse & un consistence huileuse à peu près comme celle de l'huile d'amandes. Ayant laissé refroidir cette dissolution, je n'y ai remarqué aucune cristallisation; il est vrai qu'il faisoit alors fort chaud; le thermométre étoit à 22 dégrés. Il s'est seulement formé au fond de la liqueur un léger sédiment terreux rousseâtre. J'ai fait évaporer cette dissolution spiritueuse jusqu'à siccité; elle s'est desséchée à une chaleur beaucoup moindre que n'avoit fait ce même Sel dissous dans l'eau; le résidu sec pesoit une demi once c'est-à-dire 288 grains autant que l'esprit de vin employé. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord semblable à celle de l'esprit de vin ordinaire, mais elle est bien-tôt devenue grande, lumineuse, rouge, décrépitante & pétillante;

 elle

elle a laissé après s'être éteinte un résidu blanc salin très-abondant & déliquescent.

Sel marin à base calcaire.

J'ai fait dissoudre de la même craye dans de bon acide marin jusqu'à parfaite saturation il en a resulté une liqueur saline neutre qui ayant été filtrée & évaporée avoit une saveur salée acre & amere. La déficcation de ce Sel s'est faite un peu plus facilement que celle du nitre calcaire cependant il a fallu employer aussi le feu nud, & le Sel qui est resté m'a paru aussi avide de l'humidité & aussi *déliquescent* que le nitre calcaire. L'esprit de vin traité avec ce *Sel marin calcaire* en a dissous aussi son poids égal, & la flamme de cet esprit de vin étoit toute semblable à celle de l'esprit de vin saturé de nitre calcaire.

Vitriol de lune.

J'ai fait le *Vitriol de lune* qui est une combinaison de l'acide vitriolique avec l'argent, par précipitation, de la manière suivante. J'ai versé de l'acide vitriolique concentré dans une dissolution d'argent faite par l'acide nitreux; il s'est fait aussi tôt, comme cela arrive toujours, un dépôt blanc qui est un composé d'acide vitriolique & d'argent & que je crois devoir nommer Vitriol de lune ou d'argent. Il ne s'est presque pas excité de chaleur dans cette opération; j'ai versé plus d'acide vitriolique qu'il n'en falloit pour séparer tout l'argent d'avec l'acide nitreux. La liqueur ayant été étendue dans de l'eau distillée pour faciliter la précipitation étoit très-acide; je l'ai décantée dessus le dépôt; j'ai séparé du vitriol de lune tout l'excés d'acide, ou plutôt tout l'acide libre, par plusieurs lotions dans de l'eau distillée & par imbitions

tions dans le papier gris, jusqu'à ce que ce Sel ne fit plus aucune impression de rouge sur le papier bleu après avoir parfaitement desséché ce Sel, je l'ai fait boüillir dans mon esprit de vin, il ne s'en est rien dissous, & la flamme de cet esprit de vin ne différoit en rien de celle de l'esprit de vin pur.

Nitre de lune nommé communement cristaux de lune.

J'ai fait dessécher parfaitement des *cristaux de lune* & ayant versé dessus la quantité ordinaire de mon esprit de vin, il m'a paru qu'il s'en dissolvoit: la liqueur mise à boüillir a pris une odeur d'ethér nitreux, & s'est un peu troublée par une espéce de poudre noirâtre; je l'ai filtrée toute boüillante comme dans toutes les autres expériences; à mesure quelle se refroidissoit, il y paroissoit une grande quantité de cristaux figurés en Rombes minces qui se formoient à la surface. Ces Rombes sont produits par quatre triangles un peu inclinés dans le même sens, ensorte qu'ils ne sont pas dans un même plan, leurs sommets réunis font au milieu du Rombe une espéce de pointe pyramidale mais fort peu élevée, & leurs côtés communs représentent deux diagonales qui se coupent leur milieu. Le tout ressemble donc à une Pyramide à quatre faces extrêmément basse & comme applatie: chaque face triangulaire paroit formée de lignes paralléles au côté opposé au sommet. L'esprit de vin après son entière evaporation a laissé un gros 12 grains de ce Sel nitreux. Sa flamme étoit plus blanche & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur & accompagnée d'un peu de fuliginosité. L'esprit de vin dissout donc $\frac{84}{1152}$ de son poids de Nitre de lune.

Lune

Lune cornée.

J'ai fait de la *Lune cornée* en verſant de l'acide marin dans une diſſolution d'argent par l'acide nitreux, & je l'ai traitée comme j'avois fait le vitriol de lune par un lavage à l'eau diſtillée, juſqu'à ce qu'elle ne donnat plus aucune marque d'acidité. L'eſprit de vin n'en a rien diſſous même à l'aide de l'ébullition. La flamme de cet eſprit de vin n'avoit rien de particulier.

Vitriol de mercure.

Le Sel réſultant de l'union de l'acide vitriolique avec le mercure que je nomme *Vitriol de mercure* & qu'il faut bien diſtinguer du *Turbith minéral*, en ce que ce dernier ne contient preſque point, ou même point du tout d'acide vitriolique, ce Vitriol de mercure, dis-je, a été fait par le même procédé dont j'ai parlé pour le Vitriol de lune, c'eſt-à-dire en verſant de l'acide vitriolique dans une diſſolution de mercure faite par l'acide nitreux. Je n'ai lavé que légérement à l'eau diſtillée le depôt blanc qui ſe forme dans cette opération, par ce qu'on ſçait que par un grand lavage on lui enleve tout ſon acide & qu'on le réduit en une eſpéce de précipité jaune indiſſoluble même dans l'eau & qu'on nomme Turbith minéral, ou plus-tôt parce qu'on décompoſe cette combinaiſon & qu'on la ſépare en deux autres dont l'une eſt le Turbith dont je viens de parler & l'autre reſte diſſoute dans l'eau des lavages & ne contient que fort peu de mercure tenu en diſſolution par une très-grande quantité d'acide : or ce n'étoit ni l'une ni l'autre de ces préparations de mercure dont j'avois intention de reconnoître le dégré de diſſolubilité dans l'eſprit de vin ; ayant donc lavé légérement, comme je l'ai dit, le Vitriol mercuriel qui s'étoit formé

dans

dans mon opération, je l'ai fait sécher parfaitement au bain de sable; il étoit aprés cette déficcation très-blanc & très-beau; je l'ai traité avec l'esprit de vin jusqu'à l'ébullition comme les autres, & je n'ai remarqué aucune dissolution: ayant filtré cette liqueur toute chaude, il ne s'y est rien cristallisé par le refroidissement; il n'est rien resté non plus après son entière évaporation. La flamme de cet esprit de vin étoit comme celle de l'esprit de vin pur; elle n'a laissé aucun résidu sensible après qu'elle a eu cessé d'elle même; le vaisseau dans lequel cet esprit de vin avoit brulé étoit sec; il avoit seulement une légére saveur acerbe métallique & l'ayant frotté avec un papier bleu mouillé, ce papier s'est trouvé un peu rougi. Il suit de là que l'esprit de vin ne dissout point sensiblement le Sel vitriolique mercuriel, ou Vitriol de mercure, même à l'aide d'un peu d'acide libre.

Nitre de Mercure.

Ayant fait dissoudre jusqu'à saturation du Mercure dans de l'acide nitreux trés-pur j'ai obtenu une grande quantité de cristaux de *Sel nitreux mercuriel* que je nomme *Nitre de Mercure*; j'ai lavé ces cristaux à plusieurs eaux distillées & je les ai fait égoutter sur du papier gris; après les avoir parfaitement séchés, je les ai traités par l'ébullition avec l'esprit de vin comme les Sels cy dessus; ces cristaux qui étoient blancs avant d'avoir boüilli dans l'esprit de vin sont devenus par cette ébullition d'un jaune citronné un peu gris. L'esprit de vin qui avoit servi à cette opération ayant été évaporé entièrement n'a laissé qu'un léger enduit d'un Sel un peu argentin & si mince que je n'ai pû le recüeillir. La flamme de cet esprit de vin ne differoit point sensiblement de celle de l'esprit de vin pur, cependant elle a donné quelques légéres marques de fuliginosité; il est resté, après qu'elle a eu cessé

d'elle

d' elle même, un enduit Salin argentin comme après l'évaporation; cet enduit a un peu rougi le papier bleu; ayant lavé à plusieurs eaux distillées le Nitre mercuriel sur lequel l' esprit de vin avoit boüilli, il m' a paru que l'eau en dissolvoit fort peu & il a pris une couleur de plus en plus jaune, come celà arrive au Turbith minéral je ne tire pour le présent d' autre conséquence de cette expérience, si non que l' esprit de vin ne dissout qu'une quantité prèsque insensible du Nitre de Mercure dans l' état ou je l' ai employé: comme je trouve quelque chose de singulier dans ce fait, je me propose de faire dans la suite d' autres expériences pour l' éclaircir.

Mercure sublimé corrosif.

De tous les composés de Mercure & d' acide marin, c' est celui qu'on nomme *sublimé corrosif* qui est le plus salin, & c' est par cette raison que je l' ai choisi par préférence aux autres pour en éxaminer la dissolubilité dans l' esprit de vin, j' ai donc fait boüillir de mon esprit de vin sur ce Sel, & l' ayant filtré tout chaud j' ai observé qu'il se cristallisoit beaucoup de Sel par le refroidissement, cet esprit de vin à laissé par son entière évaporation deux gros & demi & un scrupule, ou 204 grains de Sublimé corrosif. Sa flamme étoit d' abord comme celle de l' esprit de vin ordinaire, mais bien-tôt elle est devenue plus grande, plus jaune, & plus lumineuse; elle étoit mêlée de quelques traits de couleur bleue sur tout sur la fin elle étoit très-décrépitante. L' esprit de vin dissout donc $\frac{212}{240}$ de son poids de sublimé corrosif. Il est vray que voyant que l' esprit de vin dissolvoit beaucoup de ce Sel par l' ébullition, je l' ai laissé boüillir plus long tems que les autres Sels.

Vitriol

Vitriol de mars.

Ayant desséché du *Vitriol de mars* au bain de sable sans le liquefier, je l' ai fait boüillir avec mon esprit de vin; il m' a paru qu' il ne se dissolvoit rien ou qu'infiniment peu de chose. L' esprit de vin décanté de dessus ce Sel n' a rien laissé cristalliser par le refroidissement, & par son entière évaporation il n' a laissé qu'un légér enduit brun trop peu considérable pour pouvoir être recüeilli. Cet esprit de vin a brulé comme l' esprit de vin pur & n' a laissé dans la capsule ou il avoit brulé qu'une tache brune. Ayant appliqué un papier bleu moüillé sur cette tache, il a été rougi sensiblement. Il paroit par cette expérience que l' esprit de vin ne dissout point le Vitriol martial.

Nitre de mars.

J' ai fait dissoudre peu à peu de la limaille de fer non roüillée dans de l'acide nitreux très-pur; il m' a été impossible de saturer cet acide au point de ne plus rougir le papier bleu; la dissolution s' est épaissie considerablement; j' y ai ajouté de l' eau & de nouvelle limaille, le tout s' est mis en une espéce de pâte & malgré cela la dissolution étoit encore fort acide; elle étoit de couleur rousse rougeâtre; je l' ai faite évaporer à siccité; il s' est exhalé pendant cette évaporation beaucoup de vapeurs acides d' une odeur très-penetrante. Le residu sec étoit de couleur brune. Je l' ai traité avec l' esprit de vin; ce dissolvant a pris dessus, à l'aide d'une chaleur moderée, une couleur rouge de briques assés foncée, mais l' ayant porté jusqu' à l' ebullition, il a perdu presque toute sa couleur en déposant un sédiment considérable. Cet esprit de vin filtré & évaporé jusqu'à siccité n' a laissé que quatre

grain de matière acide d'un jaune de ſafran très-foncé; ce Sel martial a eu beaucoup de peine à ſe deſſécher entièrement & étoit ſi déliqueſcent qu'il s'eſt humecté étant même encore chaud. La flamme de cet eſprit de vin étoit d'abord comme à l'ordinaire, mais quand il y en a eu environ un tiers de brulé, elle eſt devenue rouge & pétillante & a duré de la ſorte juſqu'à la fin; il eſt reſté dans la capſule un enduit rouge brun aſſés conſidérable & un peu de liqueur fort acerbe & fort acide. Il faut remarquer ſur cette expérience que l'eſprit de vin diſſoudroit vraiſemblablement une beaucoup plus grande quantité de ce Nitre martial ſans le ſecours d'aucune humidité, ſi l'on pouvoit le deſſécher entièrement ſans ſéparer preſque tout l'acide nitreux d'avec le fer, mais cet acide tient ſi peu à ce métal que je crois que cela n'eſt pas poſſible.

Sel-marin martial.

J'ai fait diſſoudre peu à peu de la limaille de fer bien nette dans de bon acide marin; la diſſolution s'eſt très-bien faite ſans que le fer ſe changeat en ſafran de mars & ſans s'épaiſſir. Il eſt à remarquer au ſujet de cette diſſolution, que les vapeurs qui s'en élevent ont une odeur deſagréable pénetrante & fort différente de celle de l'acide marin pur; elles ſont auſſi fort inflammables & font une explosion violente quand on les allume dans une vaiſſeau clos. J'ai fourni une grande quantité de limaille à cette diſſolution, même après qu'il n'y avoit plus d'éfferveſcence, mais malgré cela elle rougiſſoit tojours un peu le papier bleu. Je l'ai faite évaporer, il s'eſt formé deſſus une pellicule ſaline luiſante & un peu chatoyante. L'ayant laiſſée refroidir quand elle a été à ce point, elle s'eſt toute coagulée en criſtaux confus dont je n'ai pû diſtinguer la figure même à la loupe. Ayant continué l'évaporation

poration au bain de sable jusqu'à siccité, la déficcation a eu beaucoup de peine à se faire; il a fallu une journée entière pour cela; sur la fin ce Sel avoit une odeur tout à fait semblable à celle du Vitriol de mars lors qu'on le desséche. Ce même Sel marin martial avoit une couleur de roüille assés claire & assés vive lors qu'il n'étoit que médiocrement chauffé, mais cette couleur devenoit beaucoup plus rouge & plus brune, lors qu'il l'étoit d'avantage. L'esprit de vin a pris par l'ébullition sur ce Sel une couleur de roüille un peu trouble & un peu changeante par l'opposition, ou l'interposition de la lumière; ayant soummis cette dissolution à l'évaporation il a fallu beaucoup de tems pour dessécher entièrement le résidu, il pesoit un demi gros ou 36 grains; il étoit d'une couleur jaune brune, s'humectoit à l'air mais lentement; il lui a fallu sept ou huit jours pour se résoudre totalement en liqueur. La flamme de cet esprit de vin étoit assés blanche, & assés brillante, à mesure que la déflagration avançoit elle devenoit plus lumineuse & plus blanche; elle étoit accompagnée sur la fin de beaucoup de petites étincelles blanches & brillantes comme des étoiles d'artifice; il est resté après cette combustion un résidu jaune brun assés considérable d'une saveur martiale styptique. L'esprit de vin dissout donc $\frac{25}{100}$ de son poids de *Sel marin martial.*

Vitriol de cuivre.

Le *Vitriol de cuivre* desséché parfaitement est devenu presque blanc; l'esprit de vin que j'ai fait boüillir dessus n'a pris aucune couleur; le même esprit de vin n'a laissé aucun résidu par son entière évaporation; il a brulé comme de l'esprit de vin pur, & n'a pareillement laissé aucun résidu après sa déflagration. Ce qui prouve que l'esprit de vin ne dissout point le Vitriol de cuivre.

Nitre à base de cuivre.

J'ai fait dissoudre du cuivre rouge très-pur dans de l'acide nitreux aussi très-pur; la dissolution s'est faite d'elle même très-rapidement après qu'elle a été entièrement saturée de cuivre, elle avoit une couleur bleue tirant sur le verd céladon; elle étoit troublée par une chaux de cuivre de même couleur, mais infiniment plus pâle que la liqueur & presque blanche. J'ai fait évaporer cette dissolution au bain de sable, il s'est formé dessus une pellicule de cristaux confus; l'ayant alors laissée refroidir, elle s'est coagulée toute entière en une masse de petits cristaux si confus, qu'il m'à été impossible d'en discerner la figure, même à l'aide d'une bonne loupe; ces cristaux se sont ensuite humectés & resous totalement en liqueur en fort peu de tems. J'ai remis cette liqueur en évaporation, la pellicule s'est reformée de nouveau & par le refroidissement toute la masse s'est encore coagulée; ayant entrepris de la dessécher ensuite entièrement; elle s'est liquefiée à la première impression de la chaleur, mais comme elle restoit toujours en cet état, j'ai augmenté le feu; alors quoiqu'à la reserve de la pellicule de la surface, ce Sel demeurat toujours liquide, il a commencé à en sortir beaucoup de vapeurs d'acide nitreux très-pénétrantes; ces vapeurs m'ont fait connoître que cette liquidité que j'attribuois à de l'eau surabondante au Sel n'étoit qu'une vraie fusion de ce même Sel, & que ce ne séroit qu'en lui enlevant son acide par l'action du feu, en le décomposant en un mot totalement que je pourrois l'amener sur le feu à l'état de solidité séche; l'ayant donc retiré de dessus le feu, il s'est figé sur le champ en une matière très-dure & fort avide de l'humidité de l'air; j'ai pulverisé promptement ce Sel & après l'avoir mis encore chaud dans un matras, j'ai versé par dessus

la

la quantité ordinaire d' esprit de vin. Je l'ai laissé agir à froid pendant deux jours : dans cet espace de tems, il a pris une belle couleur bleue de saphir assés foncée, & il est resté au fond du matras une espéce de chaux de cuivre d' un verd bleu pâle. Par l' ebullition cette couleur n' a point pris plus d' intensité ; j' ai donc filtré la liqueur elle a passé très-claire & du plus beau bleu de saphir ; il est resté sur le filtre beaucoup de chaux de cuivre de couleur de verd de gris fort pâle. Cette dissolution après son entière èvaporation a laissé 48 grains de Nitre à base de cuivre. La flamme de cet esprit de vin étoit d' abord comme à l' ordinaire, mais elle est bien tôt devenue beaucoup plus blanche, plus lumineuse & d'un verd très-beau, cette flamme étoit accompagnée d'une quantité assés considérable de fumée fuligineuse noircissante : il s'est formé au tour de la liqueur enflammée un bourlet de matière verte qui s' est noirci en partie par la chaleur & qui a pris un caractère charbonneux, aussi s' est elle allumée, elle bruloit en rougissant comme un charbon ; il est resté après la flamme cessée d' elle même, une quantité assés considérable de Sel bleu en liqueur. L' esprit de vin a dissous comme on voit dans cette expérience $\frac{48}{100}$ de son poids de *Nitre à base de cuivre*.

Sel marin à base de cuivre.

J' ai pris pour composer le *Sel marin à base de cuivre* du fil de cuivre rouge très-pur, je l' ai mis dans l'acide marin assés fort, distillé par l' acide vitriolique pur à la manière de Glauber ; la surface du cuivre s' est ternie promptement, mais sans qu'il parut aucun autre signe de dissolution ; il a fallu le secours du bain de Sable pour faire agir l'acide sur ce metal, alors les signes ordinaires aux dissolutions des métaux par les acides ont parus, mais je

je fus étonné de voir que la liqueur, à mesure que la dissolution se faisoit, au lieu de prendre une couleur verte, comme je m' y attendois, prenoit au contraire une couleur de caffé qui devenoit de plus en plus brune & foncée. Lors que la dissolution a été à peu près au point de saturation elle étoit un peu épaisse elle rougissoit encore sensiblement le papier bleu, quoique d' ailleurs l'acide ne parut plus du tout agir sur le cuivre qui restoit. J' ai versé cette dissolution dans une capsule pour l' évaporer & ayant rincé le matras avec de l' eau, j' ai vû aussi avec surprise que le peu de dissolution brune qui restoit dans le matras est devenue d' un très-beau verd tirant sur le bleu aussi tôt qu' elle a été étendue dans l' eau, & cette couleur s' est communiquée au reste de la dissolution dans laquelle javois mêlé cette rinçure. Par l' évaporation elle s' est réduite presque toute en cristaux de couleur verte & figurés en aiguilles; le peu de liqueur qui baignoit ces cristaux étoit redevenue fauve brun par l' évaporation; enfin lors que tout a été évaporé jusqu'à siccité, le verd des cristaux a disparu & tout étoit absolument brun: j' ai mis ce Sel tout chaud dans mon esprit de vin, ce dissolvant a pris presque aussi tôt un verd très-foncé, & a dissous beaucoup de ce Sel sans le secours d' autre chaleur que celle de l' air, qui à la verité étoit très-grande ce jour là & de 28 à 29 dégrés (c' étoit le 26 Août.) L' esprit de vin chargé de ce Sel a fourni après fort peu d' évaporation beaucoup de cristaux du plus beau verd ils étoient éguillés & comme soyeux; par la déficcation, ils ont perdu tout leur verd & sont devenus absolument bruns: ils pesoient 48 grains après avoir été bien desséchés. La flamme de l' esprit de vin chargé de ce Sel étoit du plus beau verd; on y appercevoit cependant des especes de fulgurations blanches & rouges; il est resté après la com buition de l' esprit de vin beaucoup de Sel dont une par tie étoit verte & l' autre brune.

Les

Les changemens de couleur qui arrivent à ce Sel ſuivant la quantité d' eau plus ou moins grande à laquelle il eſt uni ont quelque choſe de ſingulier & de remarquable; lors qu' il eſt ſec, ou qu' il ne contient que très-peu d' eau, il eſt d' un jaune fauve foncé brun; à meſure qu'on y ajoute de l' eau, il devient ſucceſſivement verd d'olives, beau verd de pré plein & foncé, verd bleuâtre, & enfin lors qu'il eſt étendu dans beaucoup d' eau, il eſt entièrement bleu, mais clair; il repaſſe enſuite ſucceſſivement par toutes ces mêmes couleurs, juſqu'à redevenir tout brun, à meſure qu'on fait évaporer l' eau qui le tient diſſous. Ces phenomenes m'ont fait ſoupçonner que ce Sel de couleurs ſi différentes lors qu'il eſt plus ou moins ſec pourroit être la matière d' une ſorte d' *encre de ſympathie.* Jen ai fait l' éſſai; ayant tracé des caractères ſur du papier blanc avec ſa diſſolution étendue dans beaucoup d' eau laquelle eſt comme je l' ai dit d' un bleu pâle ces caractères après qu' ils ſe furent ſechés ſimplement à l'air étoient inviſibles à cauſe du peu d' intenſité de la couleur; mais les ayant chauffès, j' ai vû auſſi tôt paroitre l' ecriture d'un jaune vif très-beau. Cette couleur qui n'eſt qu'une teinte affoiblie du fauve brun qu' a le Sel en maſſe lors qu'il eſt parfaitement deſſéchè, m' a rappellé que M. Baumé très-habile Chimiſte de cette Ville avoit publiè dès 1757 dans les cours de chymie que nous faiſons enſemble, une encre de ſympathie dont les effets ſont tous ſemblables à celle dont je parle actuellement, & comme la baſe de l' encre de M. Baumé eſt du cuivre de même que dans celle-cy, quoique le procedé qu' il a donné pour la faire ſoit différent, je ne doute nullement que ces deux encres ſympatiques ne ſoient eſſentiellement de même eſpéce & je reconnois avec plaiſir que M. Baumé eſt le prèmier qui ait obſervé cette ſorte d' encre, & qui en ait parlé, ce Chimiſte convenoit en annonçant cette encre qu'elle n'avoit

pas

pas la proprieté de redevenir invisible par la simple exposition à l' air aussi parfaitement que l' encre sympatique tirée du cobalt, & s' est toujours proposé de lui donner cette qualité, mais des recherches d'une plus grande importance l' en ont empéché jusqu'à présent; celle dont je viens de parler avoit aussi le même deffaut, mais après les observations que j' avois faites sur les changemens de couleur du Sel de cuivre, & sur la cause prochaine de ces changemens il m'etoit bien facile de donner à cette encre la proprieté desirée; on a vû que la différence des couleurs du Sel marin cuivreux dépend uniquement de la quantité d' eau plus ou moins grande à laquelle il est uni, si donc lors qu'il paroit en jaune par la désication parfaite sur le papier, il ne disparoit point ensuite entiérement par l' exposition à l' air, cela ne peut venir que de ce qu' il n'attire pas assés promptement & assés éfficacement l' humidité de l' air, & en effet ce Sel quoique deliquescent n'est pas à beaucoup près du nombre de ceux qui possedent cette qualité au plus haut point; il ne s' agissoit donc pour donner à l' encre en question la proprieté de disparoitre entièrement que de la rendre plus avide de l' humidité de l' air que ne l' est naturellement le Sel marin cuivreux, & c' est à quoi je suis parvenu facilement en mêlant dans sa dissolution un autre Sel exempt de toute couleur, qui ne peut le décomposer & qui est infiniment plus déliquescent; il y en a assurement plusieurs qui peuvent être employés pour cela avec succés; j' avois sous la main le Sel marin à base de craye qui m' avoit servi dans mes expériences précedentes; jen ai mêlé dans la dissolution de Sel marin cuivreux à peu près autant qu'elle pouvoit contenir de ce dernier Sel; j' y ai ajouté un peu d'excés d' acide marin & de l' eau, ensorte que le tout avoit une couleur d' aigue marine assés belle, & ayant fait l' epreuve de cette encre, jai trouvé qu' elle disparoissoit presque aussi bien que

que celle de cobalt je rappelle au reste icy que l' acide marin qui m' a servi pour ma dissolution de cuivre avoit été distillé par l' acide vitriolique libre, parce qu' il n' est pas impossible qu'un peu de ce dernier acide mêlé avec le premier ne contribue aux effets dont j'ai parlé; j'avertis aussi ceux qui voudroient vérifier cette encre que c' est le Sel marin à base de craye au quel j' ai donné la préference sur les autres Sels marins à base calcaire, parce qu' il m' a paru par des expériences faites anterieurement sur les combinaisons de l' acide marin avec différentes terres calcaires, que les Sels qui en résultoient n' étoient pas tous également déliquescens, & que celui-cy l' étoit beaucoup plus que la plus part des autres.

Je n' attache au reste aucune prétention à cette espéce d' encre de sympathie, non seulement, par ce que je n'en suis pas le premier observateur, mais encore par ce que ce n' est là qu' un de ces petits faits curieux qui se présentent comme d' eux mêmes aux Chimistes dans leurs recherches & aux quels on ne doit donner qu'un moment d' attention quand on a pas intention d' en developper la theorie. Je ne me suis peut être que trop arrêté à celui-cy, c' est pourquoi je me hâte de revenir à mon objet principal.

Les expériences dont j' ai rendu compte dans ce memoire, quoique deja nombreuses, ne le sont cependant point ancore assés à beaucoup près pour en tirer des consequences & une theorie générale; elles font entrevoir à la verité que les Sels neutres sont d' autant plus dissolubles dans l' esprit de vin, que leur acide est moins fortement uni avec leur base, & qu' à cet égard, ils suivent par rapport à l' esprit de vin à peu près la même régle que par rapport à l' eau; mais la saturation plus ou moins parfaite de l' acide des Sels n' est certainement point l'unique cause de leur différent dégré de dissolubilité dans

d l' esprit

l' eſprit de vin, car il y en à qui ſe diſſolvent en plus grande quantité dans ce menſtrue que dans l' eau même. Le principe philogiſtique, ou inflammable, influe probablement beaucoup dans les effets de ces diſſolubilités, mais je le repete, nous n' avons point encore aſſés de faits connus ſur ces objets pour en developper la Theorie génerale. Je m' abſtiens donc pour la préſent de toute ſpéculation à cet égard, & je me borne à quelques réflexions particulières ſur les expériences dont j' ai rendu compte.

En raſſemblant ſous un même point de vüe tous les Sels vitrioliques que j' ai examinés, il ſe trouve qu' il n' y en a aucun que l' eſprit de vin ait diſſous, ou du moins dont il ait diſſous une quantité ſenſible, & le Sel de Glauber eſt le ſeul qui ait apporté quelque changement à ſa flamme. Si cette indiſſolubilité ſe ſoutient dans les autres Sels vitrioliques qui me reſtent à examiner, elle ſera une nouvelle preuve de la ſuperiorité deja reconnüe de l' acide vitriolique ſur les autres acides à raiſon de ſa plus grande ſimplicité & de la plus grande force avec laquelle il eſt capable d' adhérer à toutes les ſubſtances ſuſceptibles d' union avec les acides, auſſi ais-je deja fait obſerver ailleurs que dans la claſſe des Sels vitrioliques nous n' en connoiſſons encore aucun qui ne ſoit criſtalliſable, ou dont la qualité deliqueſcente annonce une connexion foible de l' acide avec ſa baſe.

Comme aucun de mes Sels vitrioliques ne s' eſt trouvé ſenſiblement diſſoluble dans l' eſprit de vin, il n' eſt point étonnant, qu' ils n' ayent occaſionné aucun changement à la flamme de cet eſprit, mais on pourroit être ſurpris que je n' aye obſervé aucune couleur verte à la flamme de celui que j' avois fait boüillir ſur le vitriol de cuivre, tandis que M. Bourdelin dit dans ſon memoire ſur le Sel ſedatif imprimé dans les memoires de l'Academie des ſciences de Paris pour l'année 1755, qu'ayant fait bruler de

l' eſprit

l' esprit de vin sur du vitriol de cuivre, il à observé une belle couleur verte dans sa flamme. Il est très-certain cependant que la contradiction qui se trouve entre nos deux expériences n' est qu' apparente, & qu' elles sont exactement vraies l' une & l' autre. M. Bourdelin avoit pour but dans le memoire que je viens de citer, non d' examiner le dégré de différente dissolubilité des Sels dans l' esprit de vin, mais de reconnoître s' il s' en trouveroit quelqu' autre que le Sel sedatif qui eut la proprieté de communiquer une couleur verte à sa flamme, il n' étoit pas necessaire en conséquence que ce savant Chimiste prit comme moi la précaution de priver ses Sels de leur eau de cristallisation avant de les soummettre à l' action de l' esprit de vin, aussi ne dit il point qu' il eut desséché le vitriol de cuivre, sur le quel il a fait son expérience, & l'on ne doit point douter que ce ne soit l' eau de cristallisation de ce Sel qui l' ait rendu miscible à l' esprit de vin en quantité suffisante pour verdir la flamme, d' autant plus qu' il est prouvé par plusieurs des expériences dont j' ai rendu compte qu' il ne faut qu'une quantité de Sel infiniment petite, pour changer considérablement la flamme de cette liqueur. Ces différences demontrent bien au reste, combien il étoit necessaire que je prisse la précaution de priver mes Sels de toute humidité surabondante, pour en reconnoître au juste le dégré de dissolubilité.

Si nous jettons après cela aussi un coup d' œil général sur le Sels nitreux nous verrons, que tous ceux que j'ai soummis à l' expérience se sont comportés à l' égard de l' esprit de vin bien différement des Sels vitrioliques on sait que l' acide nitreux tient en général infiniment moins que l' acide vitriolique aux différentes substances qui peuvent former des Sels neutres avec ces acides; il est demontré aussi en chymie que ce même acide renferme le

principe inflammable dans sa composition ; or il est très probable que ce sont là les deux causes principales de la dissolubilité des Sels dans l' esprit de vin, aussi resulte-t-il des expériences que j' ai rapportées, que presque tous les Sels nitreux sont dissolubles dans l' esprit de vin, & la plus part même en quantité assés considerable ; il y à cependant deux de ces Sels qui font une sorte d' exception le premier c' est le Nitre de Mercure dont l'esprit de vin n'a pas dissous une quantité sensible, & le second c' est le Nitre de mars dont le menstrue n'a dissous que fort peu, quoique ce dernier Sel soit très déliquescent & paroisse par cette qualité devoir être un des plus dissolubles. Je n'ajoute rien pour le présent à ce que j'ai dit aux articles de ces Sels, ce sont de ces effets dont la cause demande à être recherchée par un plus grand nombre d' expériences : mais il est bon de remarquer encore au sujet de nos Sels nitreux qu' il n' y en a aucun qui n' ait alteré sensiblement la flamme de l' esprit de vin, ce qui indique toujours une grande disposition de leur part à s' unir à ce dissolvant en tout ou en partie. Au reste cette alteration de la flamme de l' esprit de vin par les Sels neutres est encore un objet important, qui mérite beaucoup d'attention & dont il paroit qu' on pourra retirer autant de connoissances nouvelles sur la nature des Sels, que de leur dissolubilité même, mais il demande aussi une nombreuse suite d' expériences & d' observations. Nous entrevoyons seulement par celles qui sont deja faites, que la flamme de l' esprit de vin peut recevoir trois sortes d' alterations de la part des Sels. La première c' est de devenir plus jaune, plus rouge, plus grande, & plus décrépitante ; la seconde c' est d' être plus blanche, plus lumineuse, & en même tems plus ou moins fuligineuse, & la troisième, c' est de contracter quelque couleur particuliere, comme par exemple la couler verte que lui donnent

nent les Sels à base de cuivre. Je soupçonne que la premiere de ces qualités a lieu lors que c' est le Sel neutre entièr & comme Sel neutre, qui agit dans cette flamme, que la seconde est produite particulièrement par l' acide des Sels, lequel donne à l' esprit de vin un caractére plus ou moins approchant de celui de l' ether, & que la troisième est duë principalement à la base ou à la substance qui est unie à l' acide des Sels, mais tout cecy a besoin d' une plus grande suite d' expériences pour être éclairci.

Enfin les phenomenes des Sels neutres contenant l'acide marin réunis aussi sous un même point de vuë nous font connoître que ces Sels se sont dissous pour la plus part dans l' esprit de vin, & ont causé de l' alteration à sa flamme; ainsi à cet égard l' acide marin paroit différer de l' acide vitriolique à peu près comme l' acide nitreux, mais il est bien remarquable que le composé de mercure, & d' acide marin soit infiniment plus dissoluble dans l'esprit de vin que les Sels résultans de l'union de cette substance métallique avec les autres acides, & que ce même composé, (*le sublimé corrosif*) se dissolve en plus grande quantité dans l'esprit de vin que dans l' eau même. L' acide de ce Sel, ni même la manière particulière dont il est uni au mercure ne paroissent pas les seules causes de cette singulière dissolubilité; je supçonne que la nature de cette substance métallique très abondante en principe inflammable & qui est, peut être même celle de toutes qui en contient le plus, influë pour beaucoup dans les phenomenes de sa dissolubilité, mais c' est encore là un objet qui demande des recherches & des expériences ulterieures. Je finis par une dernière remarque sur la nature de la flamme de l' esprit de vin traité avec les Sels contenant l' acide marin je fais donc observer que de tous ceux de ces Sels que j'ai examinès jusqu' à présent le Sel

marin

marin martial eſt le ſeul qui ait donné à cette flamme la couleur blanche & un caractére rapproché de celui de la flamme de l' ether ; je ne doute point que parmi ceux qui reſtent à examiner, il ne s' en trouve pluſieurs autres qui produiſent le même effet, mais en attendant on peut toujours en inferer que le fer eſt un des métaux qui peuvent communiquer un caractére particulier à l' acide marin, par la quantité abondante de principe inflammable qu' il lui tranſmet.

A Paris ces 8.e Octobre 1765.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De novis quibusdam experimentis electricis.

CUM in eximia gallica symmeriani libri versione, quam suis notis auctam Cl. NOLLETIUS ad me perhumaniter miserat (*a*) nova multa, ac ingeniosa experimenta invenirem, illud maxime laude dignum videbatur, quod & in cruralibus per frictionem excitatis, & in vitris electricitatem ex communicatione habentibus oppositae electricitates sejunctae distinctaeque exhibeantur. Sic enim earum electricitatum mutuas actiones mutuasque relationes melius pervestigari posse censebam, sicque viam pandi ad explosionis electricae theoriam luculentius declarandam. Hisce excitatus eo quoque operam meam contuli, & multa collegi, quae etsi manca adhuc sunt, & imperfecta, proponenda tamen duxi, quod hujusmodi videantur, quae acriori ingenio, ac diuturniori, quam mihi licuerit diligentia amplificari, ac perfici possint.

CAPUT I.

De frictione binarum taeniarum sericearum ejusdem coloris.

1. DUas taenias sericeas albas (*) igne recenter exsiccatas, alteram alteri superextensam, & plano levigato, sive deferenti, ut metallico, sive coërcenti, ut vitreo, superpositas regula ex ebore in aciem exsecta fricabam: inde taeniae electricitatem acquirebant, qua ad planum adhaerescerent; ab eo simul divulsae, se se attrahebant, superiore, quae fricata fuerat, resinosam, eamque majo-

(*a*) Experiences, & observations nouvelles concernant l' electricité par M. *Robert Symmer.*
(*) Gallice *des rubans.*

majorem, ſubjecta vitream electricitatem oſtendente. Si ſeorſim divellerentur a plano, ſupra quod fricatae fuerant, ſeſe repellebant, & utraque reſinoſam electricitatem monſtrabat.

2. Eveniebat vero interdum, ut etiam ſimul a plano revulſae taeniae ſe ſe repellerent; idque quoties, vel inter fricandum ſuperior ab inferiore fuerat revulſa, vel laxiores taeniae erant, ſicque ex frictione inferior taenia adverſus ſubjectum planum atterebatur, ut inde congenerem, & ſuperiori parum diſparem electricitatem acquireret.

3. Enimvero ad eum frictum, quo electricitas inducitur, magnam corporis ſupra corpus excurſionem haud requiri, ſatis intellexi poſtquam expertus ſum eaſdem albas taenias, etiam charta inaurata rigidiore, aut lamina plumbi interceptas, ex ipſius chartae, aut plumbi frictione ſatis ſenſibilem electricitatem adeptas fuiſſe.

4. Dum porro taeniae a plano, ſupra quod fricatae ſunt, revelluntur (1. 2) in locis, ubi ſecedunt, ipſas inter & ſubjectum planum ſcintillae emicant, quae ſcintillae ſimiliter conſpiciuntur, quando taeniae ſimul a plano divulſae, & in unum adhaereſcentes ab invicem ſeparantur, ubi vero ſemel a plano, ſupra quod fricatae ſunt, taeniae revulſae fuerint, aut a ſe invicem, quantumvis iterum deinceps ad planum, aut ad ſe mutuo admoveantur, nulla unquam amplius in earum ſeparatione lux ſe prodit.

5. Similiter quamvis taeniae a plano, ſupra quod fricatae ſunt, ſingillatim ſejunctae, ſe ſe repellant (1), ſi tamen ſemel ab eodem una revulſae fuerint, atque adeo ſe ſe attrahentes factae ſint, quantumvis ad ipſum iterum applicentur, & ſeorſim ſejungantur, ſe ſe attrahere pergunt; & viceverſa, quae taeniae a plano ſeorſim divulſae fuerunt, & propterea ſe ſe repellunt, licet poſtea altera ſuper alteram ad ipſum iterum aptentur, & quocumque modo rurſus dimoveantur, ſe ſe repellere pergunt.

6.

6. Ex his modus patet, quo taeniae ex parte alia se se attrahentes, ex alia se se repellentes fieri possint, si postquam supra planum leve fricatae sunt, pars alia earumdem simul, alia seorsim, & singillatim ab eo plano divellatur. Verum de his phoenomenis fusius deinceps disseremus.

7. Porro quamdiu taeniae supra planum, supra quod fricatae sunt, relinquuntur, vix ulla electricitatis indicia praebent; simul vero revulsae, & adhuc invicem adhaerentes, praepollentis resinosae electricitatis (1), ex utraque facie indicia praebent, & instar unicae taeniae resinosam electricitatem habentis se gerunt: si ad planum iterum admoveantur, iterum signa electrica in ipsis sopiuntur, quae iisdem ab eo revulsis denuo se produnt, & ita deinceps, donec omnis ipsarum electricitas extincta sit.

8. Quod si modo dictae taeniae non jam levi superficiei, supra quam fricatae sunt admoveantur, sed imponantur corpori hirsuto, ac deferenti, uti telae ex cannabe, aut gossipio haud exsiccatae, cito ipsarum electricitates ad aequilibrium perducuntur, ita ut inde dimotae taeniae, quamdiu simul junctae perstant, nulla praebeant electricitatis indicia, si dimoveantur, electricitates ostendant contrarias, & aequales, quae, iisdem iterum junctis, rursus delitescunt, & ita porro.

9. Imo vero taeniae se se repellentes, quae levi deferenti superficiei altera super alteram admotae, eique quantumvis adhaerescentes, se se repellere pergunt, quoties revelluntur (5), si hirsutae deferenti superficiei altera super alteram imponantur, intra aliquot secunda temporis minuta jam se se attrahent, ut iisdem ab ea superficie quovis modo revulsis apparet; idque ex eo fit, quod electricitas taeniae hirsutae superficiei proximae jam in contrariam abierit, & ex resinosa vitrea facta sit.

10. Hinc est, ut si binae albae taeniae supra hirsutam superficiem dicto modo (1) fricentur contrarias semper electricitates acquirant, ita ut quovis modo inde revulsae fuerint, superior semper resinosam, inferior, quae hirsutae superficiei proxima fuit, vitream electricitatem ostendat.

11. Quod autem efficit substratum hirsutum deferens corpus (9), id ipsum praestat deferens quodcumque in apicem efformatum. Etenim si duae taeniae ex electricitate se se repellentes (1) parallelo situ suspendantur, ut planis faciebus se mutuo respiciant, tum acuminatum metallum taeniarum alterutri obvertatur, & per ejus longitudinem promoveatur ad unius, duorumve pollicum distantiam, mox opposita taenia ad hanc, cui apex obvertitur, accurret, eique juncta adhaerebit, & neutra jam amplius taenia ulla electrica signa dabit, quamdiu junctae perstabunt: quodsi divellantur, constabit, illius taeniae, ad quam apex conversus est, electricitatem mutatam fuisse, & ex resinosa in vitream evasisse.

12. Eodem autem artificio, quo resinosa taeniae unius electricitas in vitream mutatur, potest etiam taenia non electrica electricitate imbui: si nempe, taenia non electrica hirsutae superficiei imposita, super ipsam electrica taenia extendatur (9), vel si, taenia electrica ad non electricam applicita, ad hanc acuminatum metallum obvertatur, & juxta ipsius longitudinem promoveatur (11). Constabit vero semper taeniam, quae electricitatem hoc pacto acquisivit danti contrariam acquisivisse, ita ut si illius electricitas vitrea fuit, hujus sit resinosa, & vicissim: constabit insuper taeniam, quae hoc modo electricitatem largitur, inde vix majorem pati virium electricarum jacturam, quam si per id tempus suspensa stetisset, nullamque electricitatem communicasset.

13.

13. Hinc est, ut una eademque taenia electrica pluribus non electricis contraria electricitate imbuendis inservire possit, si singulae successive eidem applicitae exposito modo (12) tractentur. Unaquaeque vero ipsarum electricitatem acquiret contrariam quidem, sed aequalem electricitati taeniae excitantis, eo tempore, quo vis excitabatur (8), ut propterea ea ratione electricitas absque frictu mirum in modum multiplicari possit.

14. Taeniam albam minus siccam, adeoque minus coërcentem alii item albae recenter ad ignem exsiccatae supponebam, easque supra planum leve, sive deferens, sive coërcens impositas regula ex ebore fricabam: quovis modo taeniae a subjecto plano divellerentur, superior semper resinosam, inferior vitream electricitatem ostendebat.

15. Ex quo apparet vim apicum in superioribus experimentis in eo positam esse, ut taeniam, cui obvertuntur, magis deferentem efficiant, seu faciliorem reddant electrici fluidi per eamdem fluxum, quum humiditas subjectae taeniae, quae ipsam vapori electrico magis penetrabilem reddit, idipsum efficiat (14), quod suppositi eidem apices, si sicca esset, praestare potuissent (10).

16. Hactenus exposita experimenta eodem omnino successu tentari possunt duabus nigris taeniis optime exsiccatis, ut certo constet, sericum sive album, sive nigrum ex frictione, quae ebore fit, resinosam electricitatem adipisci.

17. Si loco eboris, pelle uterer ad fricandas duas taenias, sive utramque albam, sive utramque nigram, idem iterum erat experimentorum omnium exitus, ut similiter concludere fas sit sericum utrumvis ex pelle resinosam electricitatem recipere. Si vitrum ad fricandum adhiberem in eisdem experimentis, idem eventus. Si demum sulphur, electricitas taeniae, quae fricabatur vitrea erat, caetera simili modo, ac in superioribus experimentis contingebant, sed

ſed inverſo ordine, ut ubi in illis reſinoſa electricitas habebatur, hic haberetur vitrea, & viciſſim.

18. Et haec quidem conſtanter ita ſe habere viſa ſunt, ut nimirum taeniae ſericeae, ſive albae, ſive nigrae, ex frictu ope eboris, pellis, vitri, vim reſinoſam acquirerent, ex frictu ope ſulphuris vitream, idque non modo in recenſitis experimentis, ſed in aliis quibuſvis; quando nempe vel alterutrius coloris taenia utroque extremo affixa, & horizontaliter per aërem tenſa dictis corporibus fricabatur, vel iiſdem circumjecta, & utroque extremo prehenſa, altero, alteroque alterne ita trahebatur, ut adverſus ea corpora attereretur, vel demum aliquo ex iis corporibus tranſverſim obvoluta juxta longitudinem per ipſa ita trajiciebatur, ut in eo trajectu vehementem ab iiſdem attritum ſubiret.

19. Cum charta nuda, vel inaurata taenias fricarem minus conſtans fuit inductae electricitatis indoles; quamvis enim plerumque ex his albae taeniae vitream (*a*), nigrae reſinoſam electricitatem reciperent, contigit tamen interdum, ut haec aliter aliterque ſe haberent. Cujus quidem inconſtantiae cauſſas omnes hactenus aſſequi non potui; viſum tantummodo eſt, attritum, quem olim eae taeniae ex aliis corporibus paſſae fuiſſent, ipſas ad inſuetam electricitatem a charta vel nuda, vel inaurata recipiendam aptas effeciſſe.

20. Illud vero etiam conſtans fuit, ut taeniae binae albae, tum binae nigrae charta nuda, aut inaurata interceptae, interea dum ipſa charta ſupra tabulam fricaretur (3), vim electricam ejuſdem generis acquirerent, & quidem reſinoſam, ob quam de charta exemtae ſe ſe repellebant: quo in experimento, cum taeniae nonniſi adverſus chartam, aut inauraturam, qua undique obvolvebantur, af-

fri-

(*a*) Sericum globo vitreo circumductum, & charta inaurata fricatum vitream electricitatem in catenam emiſiſſe Cl. *P. Beccaria* expertus eſt. *lettere* §. 134. 135.

frictum pati potuerint, patet in eo saltem experimento, chartam tum nudam tum inauratam vim etiam resinosam taeniis sive albis, sive nigris impertiri, indeque fit verosimile varium etiam modum, quo frictio peragitur, ad eam inconstantiam (19) aliquid conferre.

CAPUT II.

De frictione binarum taeniarum sericearum oppositis coloribus infectarum: tum de Symmeriana cruralium electricitate.

21. EX experimentis in praecedenti capite expositis satis constitit contrarietatem electricitatum serici albi, atque nigri, quas Cl. Viri SYMMERUS (*b*), & NOLLETIUS (*c*) proposuerunt generatim admitti non posse, cum contra ex plerisque corporibus (18), & in quibusdam adjunctis ex omnibus, quae experiri libuit, solo sulphure excepto, (18. 20) sericum album similiter ac nigrum resinosam electricitatem acquirat (*d*). Praestabit igitur ea ipsa experimenta expendere, ex quibus Cl. VIRI in eam opinionem adducti sunt.

22. Symmerianorum experimentorum haec summa est. Cruralia sericea oppositi coloris, alterum scilicet album, nigrum alterum (*e*) prius excalefacta (*f*) in crus vel in brachium (*g*) opportuna tempestate (*h*) immitebat, ibique vel

(*b*) P. 30. 33. 38. 39. 40.
(*c*) In *Symmerum* p. 43.
(*d*) Revera sericum generatim inter corpora resinosam electricitatem possidentia recenseri consueverat. *Nollet Leçons VI.* p. 345.
(*e*) P. 7. 32. 13. 41.
(*f*) P. 7.
(*g*) P. 9. 25.
(*h*) P. 6. 7. 25. 75. 76.

vel relinquebat aliquamdiu (*i*), vel etiam susque deque trahebat (*k*) dein utrumque simul e crure, vel brachio detrahebat (*l*). Quamdiu conjuncta erant exigua electricitatis indicia dabant: si alterum ab altero educeretur, ac removerentur, utrumque vehementer electricum se ostendebat, & album quidem vitrea, nigrum vero resinosa electricitate imbutum erat (*m*).

23. Nullibi porro SYMMERUS meminit exterioris affrictus, quo ad tibialia excitanda usus fuerit: unde ipsorum electricitas soli eorum frictui adversus crus dum induerentur, aut exuerentur (*n*), vel cruralium inter se frictui tribuenda erit.

24. Porro si ex frictu cruralium adversus crus electricitas inducta fuisset, illud perpetuum fuisset, ut crurale cruri proximum, quod maximam frictionem passum esset vim resinosam reciperet, cujuscumque demum coloris esset (17) contra SYMMERUS monet, si crurale album sit, vitream electricitatem constanter recipere, seu subsit nigro, seu eidem sit superpositum, & vicissim, si nigrum, constanter recipere resinosam (*o*), ex quo constat electricitatem cruralium in iis experimentis eorumdem frictui adversus crus tribuendam non esse.

25. Reliquum igitur est, ut cruralium electricitas eorumdem inter se frictui tribuatur (23): & quidem expertus sum sericum album quovis ex recensitis modis (18) serico nigro fricatum, vitream electricitatem acquisivisse, nigrum fricatum albo resinosam.

26. Cl. NOLLÆTIUS crurale album, & nigrum alterum alteri superextensum, & corpori deferenti imposita confricabat

(*i*) P. 7.
(*k*) P. 11.
(*l*) P. 8. 9.
(*m*) Vid. loca cit. n. e.
(*n*) Huic electricitatem tribuere videtur *Symmerus* p. 7. 9.
(*o*) P. 6. 141.

cabat, & ſimiliter ea ratione album vitrea, nigrum reſinoſa electricitate conſtanter imbuebat (*p*).

27. Porro cum duas taenias oppoſitis coloribus infectas alteram alteri ſuperpoſitam, ſupra deferens leve planum confricarem, eveniebat interdum, ut alba vitream, nigra reſinoſam electricitatem reciperet, ſeu alba ſubeſſet, ſeu nigra, ſeu pelle, ſeu charta, ſeu corpore quovis fricarentur. Eveniebat alias, ut taenia ſuperpoſita electricitatem reciperet reſpondentem indoli corporis, quo fricabatur (18. 19), ſubjecta vel eamdem, vel contrariam, prout taeniae vel ſimul, vel ſeorſim a ſubjecto plano ſeparabantur, non aliter, ac quando duas taenias albas (1) vel duas nigras (16) adhibebam.

28. Quare cum in primo caſu indoles electricitatis naturae confricantis corporis non reſponderet, ſed fricati ſerici colori, conſtat ſimiliter, ac §. 24. electricitatem non ex frictione, quae charta aut pelle fit, inductam fuiſſe, ſed ab alterius taeniae adverſus alteram attritu (confer 3), cum contra in caſu altero electricitas inducta reſpondens indoli corporis fricantis oſtendat confricatam taeniam majorem adverſus illud, quam adverſus ſubjectam taeniam attritum paſſam fuiſſe.

29. Revera primum illud (27) eveniebat conſtanter, quoties ſericum confricandum laxum erat, ac cedens, & cruralium inſtar retiforme (*q*), ut contra ſubjectum ſericum facilius excurreret, ac fricaretur; corpus vero confricans ex iis, quae minorem ſerico electricitatem impertiuntur; cum contra contigeret alterum, ſi ſericum fricandum ſtrictius, craſſius, rigidius eſſet, corpus vero confricans ex iis

(*p*) Mem. de l'Acad. an. 1761. p. 248.

(*q*) *Fait à maille.* Ex his patet, eam ſtructuram, quam prae textura ordinaria telae ſericeae his experimentis aptiorem exiſtimaverat. Cl. *Symmerus*, revera plurimum conferre ad contrarietatem electricitatum ſerici albi, & nigri ſervandam, quoties alterum ſuper alterum fricatur.

iis, quae majorem ferico electricitatem tribuunt; (*) fic enim fericum confricatum ab ipfius affrictu potius, quam ab affrictu adverfus fubjectum fericum, electricum evadebat.

30. Idque adeo verum eft, ut fericeum crurale, etiam album, fupra vitrum charta inaurata fricatum, vim reciperet refinofam, fubjectum vitrum vitream oftenderet; cum contra tela fericea firmior, ac denfior (*r*) vitro fuperextenfa ex frictione per inauratam chartam plerumque, ex frictione fulphuris perpetuo vitream electricitatem reciperet, tuncque fubjectum vitrum refinofa imbueretur. Ex quibus patet (ut obiter id obfervemus) fericum album fupra vitrum fricatum, quod ab ipfo attrahitur, contrariam femper eidem electricitatem poffidere, hinc ftare leges electricorum motuum a DESAGULIERIO propofitas (*s*). Eas enim electricitates contrarias effe luculenter conftat, tum quod ex binis taeniis oppofita electricitate imbutis (18), quae ab eorum altero attrahitur ab altero repellatur, & viceverfa, tum quod cæteras omnes contrarietatis notas exhibeant.

31. Igitur fricatum fericum interdum electricitatem recipit a corpore fricante, alias a ferico fubjecto, pro ut ab eorum alterutro majorem attritum patitur, & pro ut alterum prae altero electricitati in ferico per affrictum ciendae aptius eft.

32. Huc etiam facit experimentum aliud, quod nempe fi binae taeniae, alba altera, altera nigra, vel fi tres, quarum duae extremae albae, & media nigra, aut duae ex-

tremae

(*) Hinc diuturna frictio, quae ut vitrum (*Nollet Leçons* tom. VI. p. 274.) fic fericum aptum reddebat ad majorem electricitatem ex frictu fufcipiendam id etiam efficiebat, ut fricatum fericum potius a fricante corpore, quam a fuppofito contrarii coloris ferico electricitatem reciperet.

(*r*) Gallice *fatin blanc*.

(*s*) Confer *Cl. Nolletium* in *Symmer*. p. 149. 150., & Mem. de l'Acad. tom. cit. p. 253.

tremae nigrae, & media alba; aliae aliis hoc ordine impositae charta inaurata intercipiantur, ex chartae frictione, albae semper vitream, nigrae resinosam electricitatem acquirant, cum contra, ut diximus (20), binae albae taeniae, aut binae nigrae, ea ratione, resinosa semper imbuantur. Quo quidem in experimento, qnam vis affrictus inauraturae circumpositae adversus taenias, & taeniarum contra se mutuo aequalis fit, inde colligi potest, posita aequali frictione, sericum majorem ab oppositi coloris serico, quam ab inaurata charta electricitatem recipere; adeoque talem exhibere, qualis ab oppositi coloris serico induceretur.

33. Ex his jam facile est intelligere, cur cruralia in crus inducta, etiam nulla externa adhibita frictione electrica fierent (23): nempe dum alterum super alterum induebatur inter se mutuo fricabantur. Cur perinde esset sive albo crurali nigrum, sive album nigro subesset (24): scilicet, sive album sericum nigro, seu nigrum albo fricetur, album constanter vitream, nigrum resinosam electricitatem acquirit (25). Cur etiamsi cruralia cruri inducta manu fricentur, album perpetuo vitream, nigrum resinosam electricitatem recipiat (*t*); nempe cruralia cum cedentia sint ex manu superducta minus atteruntur, quum adversus se invicem confricentur (Confer. 29. 32.) Cur duo cruralia ejusdem coloris vim acquirant exiguam (*u*), cum tamen duae taeniae, etiam ejusdem coloris ex frictione non minus electricae fierent, quam si diversum colorem praeseferrent (1. 2). Nempe SYMMERUS cruralia cruri applicita extrinsecus non fricabat (23) hinc si ejusdem coloris essent, non aliam electricitatem acquirere potuerunt, nisi quam levis eorum affrictus adversus crus dum induerentur,

f

(*t*) Ut in experimentis *Cl. Nolletii.* Mem. de l'Acad. tom. cit. p. 245. 252.
(*u*) Symmer. p. 26. 27. 30.

tur, aut exuerentur, excitaſſet, quae porro exigua eſt; quod ſi vero poſtquam ejuſdem coloris cruralia induta fuiſſent, manu fricarentur, non ſecus, ac taeniae in ſuperioribus experimentis (1. 2) eximiam electricitatem acquirebant (v). Ex his etiam eruitur, cur cruralia ſimul detrahi debeant (x). Si enim alterum prius educatur, contra ſubjectum confricari debet directione illi contraria, qua confricabatur, dum indueretur, ex quo eorum vis infringi proculdubio debet, ut taceam, quod generale eſt corporibus contrarias electricitates poſſidentibus, ut nimirum ſejuncta multo citius electricitatem diſperdant, quam ſi juncta ſerventur. Quod ſi crurale nigrum albo ſuperpoſitum ſit, quod frequentius contigiſſe videtur in SYMMERI experimentis (y), & manu etiam fricetur, cum eadem electricitas, & a manu fricante, & ab albo ſubjecto in nigrum crurale ex eo frictu conjiciatur, ſcilicet reſinoſa (17. 25), hinc fiet, ut nigri cruralis electricitas electricitate albi multo ſit vehementior; proindeque ea obtinebunt, quae de binis taeniis, aut ſimul, aut ſingillatim a ſubjecto plano divellendis adnotata fuerunt (1). Ex his demum conſtat cruralium electricitatem inprimis excitari, dum alterum ſuper alterum induitur, aut ſi ſimul induantur (z), dum alterum ſuper alterum trahitur, extenditurque; dum enim detrahuntur, cum detrahantur ſimul, vix, ac ne vix quidem inter ſe mutuo atteri poſſunt; imo vero, ut diximus, ſi ſeorſim detrahantur, quando ingens fieri

(v) Etiam album ſericum ſuper album, aut nigrum ſuper nigrum cruri impoſitum, & manu fricatum electricum fieri, ſed minus. *Nollet in Sym.* p. 25. Alibi de gradu electricitatis cante eſſe decernendum, ſeque taeniis ſericeis experimenta inſtituiſſe, quae *Symmerianis* contraria videantur p. 43. 44.

(x) Il faut bien prendre garde de ne pas les deſunir. *Symmer.* p. 8. 9.

(y) Uti p. 10. 11., & 30. 31., & 143. 144. j'ai trouvé que le bas noir ne doit point ſon electriſabilité ſur le bas blanc &c. *Nollet in Sym.* p. 42.

(z) Il eſt aſſez indifferent, comment on met les bas *Symmer.* p. 8. Ambo ſimul in eros induxiſſe videtur *Nollettus* Mem. de l'Acad. cit. p. 245.

fieri debet alterius super alterum affrictus, eorum vis infringitur. Postquam cruralia detracta sunt inter se mutuo tenacissime adhaerent, certo indicio jam susceptae electricitatis, ut propterea affrictui, quem patiuntur, dum a se mutuo separantur, ea electricitas tribui non possit (&).

CAPUT III.

De constanti taeniarum electricarum ad laeves superficies adhaesione.

34. LAminam plumbi planam ac laevem ex sericeis filis suspendebam; ut *insidata* undique esset. Tum taeniam vitrea electricitate imbutam uno extremo ita prehensam, ut manus ipsam sustentans a plumbo dissita esset, ad planam plumbi superficiem admovebam; segniter attrahebatur. Si interim ad plumbum digitum ferrem, hunc inter & plumbum prosiliebat scintilla, & multo alacrius eo momento taenia ad plumbum ferebatur, eique firmiter adhaerens toto pondere suo facile sustentabatur. Pergebat deinde taenia ad plumbum adhaerere (a); at quantumvis juncta relinquerentur, nec plumbum, nec adhaerens taenia ulla amplius electrica signa dabant. Si taenia a plumbo removeretur, nova plumbum inter, & admotum digitum scintilla emicabat, & taenia ut prius electricans se praebebat.

35. Si loco taeniae vitream electricitatem habentis, taenia adhibeatur resinosa electricitate imbuta, eadem omnino observabantur.

 36.

(&) Quae Cl. *Nolletii* suspicio est in *Symmer*. p. 19.

(a) Constantem hanc serici electrici ad laeves superficies adhaesionem Cl. *Symmerus* primum observavit p. 68. 69. Confirmavit Cl. *Nollenius*, licet ejus explicatio adhaesioni taeniarum ad leves coërcentium superficies tantummodo consentanea sit. Ib. pag. 80. 81.

36. Si taenia electricitate ſive vitrea, ſive reſinoſa imbuta ad plumbi laminam, ut prius (34) aptetur, nec ſcintilla ulla ex plumbo eliciatur, plumbum taeniam aliam cognomine electricitate imbutam repellit, imbutam electricitate oppoſita attrahit. Si ſcintilla primum ex plumbo eliciatur, attrahit utramque. Si, poſtquam ſcintilla ex plumbo excuſſa eſt, prior taenia revellatur, plumbum taeniam aliam cognomine electricitate imbutam attrahit, imbutam oppoſita repellit.

37. Igitur plumbum, cui electrica taenia adplicita eſt, ejuſdem generis electricitatem emittit, qua cognomine electricitate imbutam taeniam repellit: ubi ea electricitas ab admoto digito recepta fuerit ſcintillae ſpecie, jam plumbum inſtar corporis ſe habet, nullam electricitatem habentis, & taeniam utramvis indiſcriminatim attrahit. Demum ſi revellatur taenia, jam plumbum aptum fit electricitati, quam emiſit, recipiendae, & propterea ipſi taeniae contrariam electricitatem oſtendit, & admoto digito, novam ſcintillam edit.

38. Similiter taenia, quamdiu ejuſdem generis electricitas ex plumbo hauſta non fit per admotum digitum, ſigna electrica edit; poſtquam ſcintilla ex plumbo educta eſt, inſtar non electricae ſe habet; ſi a plumbo dimoveatur iterum ſuam electricitatem oſtendit.

39. Patet itaque taeniam electricam planae faciei plumbi admotam, niti ut contrariam, & aequalem in plumbum electricitatem inducat; poſtquam admoto ad plumbum digito talem in ipſo electricitatem excitavit, plumbum, & taeniam aequaliter, ſed contrario modo electrica, firmiter invicem adhaerere, & nullam jam in exteriora corpora electricam vim exerere: demum ſi dimoveantur ſibi mutuo contrarias, & aequales electricitates oſtendere.

40. Et haec quidem ſtellulae & pennicilli obſervatione confirmantur. Etenim ſi dum taeniam electricam planae

faciei

faciei plumbi admoves (34. 35.), acuminatum metallum oppositae plumbi faciei obvertas, stellulam ad ejus apicem emicare videbis, si taeniae electricitas vitrea sit, pennicillum, si resinosa: mox utrumvis evanescet, nec ullam amplius electricitatem ad eum apicem observabis, quantumvis taeniam plumbo adhaerentem relinquas. Hanc demum si revellas, & removeas a plumbo, apex iterum electrica signa, sed contraria dabit; nempe pennicillum, si revulsae teniae electricitas vitrea fuerit, stellulam si fuerit resinosa. Si acuminatum metallum non plumbo obversum, sed ipsi adnexum fuerit, eadem omnia, sed contrario, ut consentaneum est, ordine apparebunt (*b*).

41. Igitur ut taenia electrica non electricae applicita, contrariam, & aequalem in hanc electricitatem inducit (12, 13.), sic etiam inducit in plumbum, si eidem applicita sit (39). Totum discrimen in eo positum est, quod in taeniam vapori electrico difficilius penetrabilem contraria electricitas alici non possit, nisi eidem acuminatum metallum obvertatur (15); in plumbum, quod deferens est, & acuminato metallo, & cujuscumque figurae deferente corpore admoto, facile aliciatur. Rursus quemadmodum, postquam taenia electrica oppositam, & aequalem electricitatem in adplicitam taeniam non electricam induxit, utraque atmosphaera caret (8), sic etiam postquam taenia electrica aequalem, & contrariam in plumbum electricitatem induxit, nec jam ipsa, nec plumbum ulla oppositarum electricitatum signa praebent, quamdiu juncta relinquuntur, eas ostensura, ubi primum a se invicem fuerint dimota (39).

42. Ex quibus jam intelligitur, cur si duae taeniae opposito modo, & aequaliter electricae (8) ad planam plumbi faciem successive admoveantur, ex cujusque admotione

(*b*) Confer de his signis electricis Cl. *Beccaria elettricis artific.* §. 200. & seq.

ſione plumbum inter, & digitum ſcintilla exiſtat, quae iterum exiſtat ex cujuſque dimotione, ſi ſucceſſive dimoveantur: contra ſi ſimul vel admoveantur, vel dimoveantur, ſcintilla nulla ſit. Cur ſi taeniae electricae ad plumbum haerenti, taeniam oppoſito modo, & aequaliter electricam (8) admoveas; illa huic adhaereat, a plumbo ſecedens (c) & interim plumbum inter, & digitum ſcintilla exiliat: nimirum dum taeniae oppoſitas, & aequales electricitates habentes in ſe invicem agunt, agere deſinunt in ambientia corpora (§. cit.); hinc plumbum ab actione teniae ipſi primum applicitae jam liberum, aptum fit, ut electricitatem per hanc inductam amittat, ac ſcintillam edat. Demum intelligitur ex his, cur duae, aut plures teniae eamdem electricitatem habentes; atque adeo ſeſe repellentes ſucceſſive laminae plumbeae applicitae, ſucceſſive hanc inter & admotum digitum totidem ſcintillas excitent; & interim aliae ſuper alias ad plumbum adhaereant, ſi ſingillatim dimoveantur, totidem ſcintillas iterum excitaturae.

43. Quoniam vero electricitas in plumbum inducitur oppoſita, & aequalis electricitati adplicitae teniae (39), patet in eo ſaltem experimento deferentia corpora tantum vaporis electrici recipere, aut emittere poſſe, quantum continent coërcentia; propterea minus tutum ratiocinium eſſe, quo ex coërcentium onere concluditur, longe majorem in coërcentibus, quam in deferentibus corporibus ipſius copiam contineri (d).

44. Imo experimentum habeo, ex quo directe confici videtur aequalem in utriuſque claſſis corporibus vaporis electrici quantitatem contineri. Nempe glaciem intra vas metallicum ex ſericis filis ſuſpenſum aeſtivo tempore immiſi, tum leviſſima deferentia corpora circa vas conſtitui, quae a qua-

(c) Id. etiam a Cl. *Symmero* notatum p. 69.
(d) *Franklin* Tom. I. pag. 186. 187. & 196. & 202. verſ. gallicae.

a quavis, vel minima in vase orta electricitate commoveri possent. Glacies tota in aquam liquata est, quin ulla in illis corpusculis commotio observata sit. Jam vero aqua, ut notum est, succussionem defert, & pro armatura interna phialae succutientis inservit, glaciei frustum ipsam deferre similiter non potest (e), adeoque haec coërcentibus vaporem electricum, illa deferentibus est annumeranda (*f*); quapropter si coërcentia corpora majorem quam deferentia electrici ignis copiam continerent, glacies, quae liquescendo ex coërcente deferens fit, excessivum ignem emittere deberet in vas metallicum, quo includitur, tantamque ejus copiam duntaxat retinere, quantam deferentis corporis, in quod liquescendo abit, natura postularet. Quum igitur nil simile observetur, maxime probabile fit, parem in utroque corpore, glacie scilicet, & aqua, parem adeo in coërcentibus, ac deferentibus corporibus ignis electrici quantitatem inesse (g).

45. Si taeniam electricam non planae plumbi *insulati* faciei (32), sed ejus marginibus in aciem sectis, angulisve admoverem, attrahebatur primum, sed mox repellebatur. Tunc, admoto ad plumbum digito, scintillam excutiebam, & rursus taeniae attractio habebatur, mox remoto digito, in repulsionem abibat, sicque alterne admoto, remotoque digito, alterne attrahebatur, ac repellebatur taenia, donec omnis ipsius electricitas extincta esset.

46. Inde liquet, in hoc experimento ex taenia in plumbum ejusdem generis electricitatem diffundi, quae dum diffunditur attractionem efficiat, mox vero diffusa repulsionem pariat: tunc si, admoto digito, plumbi electricitas extinguatur, iterum residuam taeniae electricitatem in plum-

(e) Ib. p. 190. 191.
(f) Uti concludit idem *Franklinus* p. 40. in adnotatione.
(g) Similiter ceram fusam, & resinam deferentia esse ex *Wilsono* tradit *Franklinus* (loc. ult. cit.) & tamen resinas fusas sola frigefactione electricas non fieri, sed affrictu incante admisso accuratissimis experimentis Cl. *Beccaria* demonstravit, l. c. §. 468. & seq.

plumbum diffundi, quae dum fluit, novam efficiat attractionem, dein ubi, sublato digito, rursus in plumbo accumulata fuerit, denuo repulsionem producat, sicque alterne, donec omnis taeniae electricitas fuerit exhausta.

47. Si istud experimentum (45) cum superiore (34) conferatur, patet in illo taeniam electricam oppositam, & aequalem electricitatem in plumbum inducere (41); in hoc ejusdem generis (46); hinc in priori casu constantem taeniae, & plumbi attractionem haberi, in altero attractionem mox in repulsionem abire. Ejus vero discriminis rationem in eo totam positam esse constat, quod taenia illic planae plumbi faciei, hic ejus angulis admoveatur: scilicet dum planae faciei plumbi admovetur taenia, cum aegre ejus electricitas, ob naturam coërcentem, ipsam deserere possit, & in plumbum se diffundere, reliquum est ut contrariam, & aequalem electricitatem in hoc ex admoto digito aliciat, cum qua possit aequilibrari (41); contra cum plumbi angulis admovetur taenia, horum vi ejus electricitas facilius exsugitur, idemque contingit, ac si taenia magis deferens esset (15); hinc plumbum ejusdem generis electricitatem acquirit, eaedemque taeniam inter, & plumbum, motuum leges obtinent, quae in deferentium corporum motibus observantur (g*).

48. Hæc

(g*) Similiter Cl. *Aepinus* tubum ex frictione electricum, in quadam distantia, ut electricitas communicari posset, vitream electricitatem, qualem possidebat, de more in aeneam laminam objectam emisisse observavit. Cum eorum distantia tanta evasisset, ut per interjectum resistentem aërem electricitas diffundi non posset, ac propagari, tubum contrariam, seu resinosam electricitatem in eam laminam ex corporibus ipsi vicinis alicuisse (Vid. Nov. Com. Ac. *Petrop.* Tom. VII.). Et his porro similia jam proposuerat Cl. *Cantonus* (Vid. Auct. exper. adjecta edit. parif. oper. *Frankl.* II. a pag. 289. ad 293.) Propterea electricitas, sive interpositione coërcentium intercepta, ut in experimentis *Aepini*, & *Cantoni*, sive eorum poris implicita, ut in nostris, adeout in circumposita, aut applicita deferentia propagari non possit, contrariam electricitatem in ipsa ex vicinis aliis deferentibus accersit, ac congerit.

48. Hac adnotata diſtinctione (47) facile eſt reſpondere quaeſtioni, quam Cl. Nolletius proponit: cur nempe folia metallica a tubo vitreo, reſiniſve electricis, plerumque alterne attrahantur, & repellantur; alias tamen attrahantur dumtaxat, & pertinaciſſime ad ipſorum ſuperficiem adhaereant (*h*), nempe quoties electricitas a corpore electrico aegre extricatur (*i*), quae folia acutos margines, anguloſve ad id corpus convertunt ea omnino ſunt in adjunctis §. 45., propterea alterne attrahi, ac repelli debent; quae vero plana ſuperficie ad ipſum converſa ſunt, vel angulum ad oppoſitas partes obvertunt, quae res vicem ſuppleat digiti tangentis (*), vel manu ad electricum corpus aptantur, in caſum incurrunt § 34, proindeque iiſdem legibus obnoxia ſunt, & conſtanter adhaereſcunt.

49. Cum taenia electrica taeniae non electricae contrariam electricitatem conciliabat, inde non multum debilitabatur, ita ut aliis, & aliis taeniis oppoſitam electricitatem ſucceſſive impertiri poſſet (12. 13.). Similiter taenia electrica a plumbo dimota, cui contrariam, & aequalem electricitatem conciliavit (34) propriam electricitatem fere integram ſervaſſe deprehenditur. Hinc eſt, ut eadem taenia electrica aliis, aliiſque plumbeis laminis contrariam, & aequalem electricitatem ſucceſſive etiam tribuere poſſit, vel, quod idem eſt, ſi electricitas in plumbum inducta, admoto digito, ſcintillae ſpecie educatur, rurſus nova, & ejuſdem naturae ab adplicita taenia in id induci queat, ſicque repetito, donec taenia electricitatem aliquam ſervaverit. Igitur in quovis taeniae electricae ad

 pla-

(*h*) In *Symmerum* p. 56. & Mem. de l' Acad. pag. 254.
(*i*) Quando nam aegre extricetur infra conſtabit
(*) Monuerat jam Cl. *Nolletius*, quod ſi folia metallica aut alia levia corpuſcula in tubum *mediocriter* electricum demittantur, *Vous obſerverez très-ſouvent, qu' une partie de ces corps parois comme collèe au corps éléctrique, pendant que l' autre paroit ſoulevèe, & comme entrainèe.* Eſſai ſur l' électrecité pag. 76.

planam plumbi faciem accessu digitus ex plumbo scintillam eliciet, in quovis ejusdem recessu scintillam similiter educet, sed priori oppositam; adeout si illa a resinosa plumbi electricitate repetenda erat, haec vitreae ipsius electricitati tribuenda sit: scintillae propterea totidem ejusdem generis ex plumbo elici poterunt, quot vicibus taenia ad plumbum admovetur, scintillae iterum totidem ejusdem generis, sed priori oppositi habebuntur, quot vicibus taenia ab eodem plumbo removetur.

50. Eae quidem scintillae paullatim decrescunt, pro ut taenia paullatim electricitatem suam exuit; quandoquidem vero id lente fit, hinc est, ut alterna taeniae admotione, & remotione plures hoc pacto scintillae haberi possint satis vehementes, si celeriter taenia ad plumbum admoveatur, removeaturque. Et quidem cum externam phialae armaturam manu prehendissem, ejusque unco in qualibet taeniae vitream electricitatem habentis ad planam plumbi faciem admotione, scintillam ex plumbo elicuissem, dum scintillas ab ejus remotione ortas extraneo deferente corpore excutiebam, factum est ut quadraginta circiter satis validas, parumque decrescentes scintillas obtinerem, quibus phiala onerabatur, & succutiebat, interiore ejus facie vitream, exteriore resinosam electricitatem habente. Si eodem modo scintillas intra phialam accumularem, quas in quavis taeniae remotione plumbum praebebat, & vicissim, quas edebat in quavis ejus admotione, extraneo deferente corpore elicerem, phiala etiam onerabatur, & succutiebat; sed ejus interna facies resinosam, externa vitream electricitatem habebat: si utrasque scintillas, tum quas in taeniae accessu, tum quas in ipsius recessu plumbum praebet, in phialam similiter congererem, nullam inde phiala electricitatem acquirebat, oppositis scilicet electricitatibus sese invicem destruentibus. Demum si singula haec experimenta taenia resinosam electricitatem habente

insti-

instituerem, eadem omnia, sed inverso, ut quisque intelligit, modo eveniebant. Ex quibus illud confirmatur, quod aliis argumentis superius ostendimus (39. 40.), scintillas plumbum inter, & digitum conspicuas in taeniae admotione, tum in ejusdem remotione a contraria electricitate ipsius plumbi ortas esse.

51. Cl SYMMERUS cruralium electricitatem acuminato ferro haustam (45. 47.) in phialam adigebat, sicque succussionem habebat, quae porro tanta erat, quanta electricitas cruralium, qua phiala fuerat imbuta (*k*) nos scintillas totidem habemus, quarum singulae aequales sunt actuali cruralis electricitati, quot vicibus ad plumbum admovetur, totidem iterum, sed contrariae naturae, quot vicibus ab eodem removetur, sicque modum invenimus facilem electricitatem absque affrictu multiplicandi.

52. Ex hactenus dictis intelligitur ratio phaenomeni superius (7) propositi; cur nempe taeniae, quamdiu plano, super quod fricatae sunt applicitae perstant nulla electrica signa edant, quae statim praebeant, si ab eodem dimoveantur. Scilicet resinosa electricitas in taeniis praevalens, ab aequali quantitate vitreae electricitatis in subjecto plano aequilibratur, uti constat, si prius *insuletur* planum, quam taeniae removeantur: hinc nullam in exteriora corpora actionem exercet, donec, dimoto plano, aequilibrium non fuerit sublatum (41).

(*k*) P. 40. 41.

CAPUT IV.

De phaenomenis tubi aëre vacui, aut deferentibus corporibus pleni. De analogia cruralium oppositas electricitates habentium cum onerato vitro. De tenacitate electricitatis in coërcentibus.

53. Si duo vitra plana, nuda, optime exsiccata, alterum alteri superpositum supra corpus deferens laeve ex. gr. supra chartae inauratae folium cum solo communicans similiter ac taeniae (§. 1.) fricentur, inde electrica fiunt, & tum ad se mutuo, tum ad subjectam chartam adhaerescunt: si lamina plumbea haud valde crassa loco chartae inauratae adhibeatur, ipsa etiam vitris adhaerens ab eorum vi electrica toto pondere suo sustentabitur.

54. Quamdiu charta vitris adhaerens perstat, vix ullum praebent electricitatis signum: si removeatur, & vitra juncta serventur, utraque facie vitream electricitatem ostendunt: taeniam enim vitrea electricitate imbutam utraque facie repellunt, imbutam resinosa attrahunt utraque. Si charta vitris iterum aptetur, iterum electrica signa cessant, & ita deinceps, prout charta vitris adplicatur, aut ab eis removetur, ipsorum electricitas aut silet veluti sopita, aut ad exteriora se prodit, donec penitus extincta sit.

55. Si charta, aut plumbum vitris subjectum sericeam taeniam adnexam haberet, per quam a vitris divelli posset, quin tangeretur, atque adeo receptam electricitatem amitteret, ipsum inter, & vitra leve corpus ex serico filo pendulum oscillabat, aliaque omnia habebantur, quae contrariam vitris, atque adeo resinosam illius electricitatem ostenderent,

56. Vi-

56. Vitra vero ipsa contrariam electricitatem praeseferebant, adeo ut inter ipsa leve corpus ex serico filo pendulum oscillaret superiore vitream, eamque majorem, inferiore resinosam electricitatem habente.

57. Consideranti facile patebit hoc experimentum idem omnino esse cum illo, in quo duae taeniae ejusdem coloris altera super alteram supra planum deferens fricatae simul ab eodem divellebantur (1): ut enim illic resinosa electricitas in superiori taenia, vitrea cum ipsa aequilibrata partim in taenia subjecta, partim in substrato deferente corpore posita erat (7. 52.), ita hic vicissim vitrea in superiori vitro, resinosa cum illa aequilibrata partim in vitro inferiori partim in subjecta armatura residet, unde vitrorum electricitas non prius ad exteriora se prodit, quam detracta armatura aequilibrium fuerit sublatum.

Hisce itaque vitris eadem experimenta exhiberi possunt, quae taeniis electricis instituta praecedenti capite exposita sunt.

58. Quod si, detracta priori laevi armatura (53) fricata vitra per breve tempus hirsuto deferenti corpori imponantur, aut si supra id corpus fricentur, ab eo dimota vix ullam in ambientia corpora electricam vim exercent: cohaerent tamen inter se, & ab invicem dimota acquisitas oppositas, & quidem aequales electricitates ostendunt, quae iterum silent vitris ad contactum restitutis, & ita deinceps donec omnis ipsorum electricitas extincta sit. Et haec quidem iis iterum sunt similia, quae de taeniis in similibus adjunctis exposita sunt (8. 10.)

59. Jam vero patet experimentum nostrum (53) idem omnino esse cum haukshejano (*), in quo globus, aut tubus vitreus aere vacua, aut deferentibus corporibus re-

ferta.

(*) Experim. physl. mech. tom. I. p. 277., & seq. vid. etiam similia *Du Fay* experimenta a Cl. *Demarest* huc allata p. 299. & seq.

ferta confricantur, quando, ut notum est, nulla, aut perexigua habentur electricitatis signa, quae tamen absque nova frictione se produnt, si aut aer admittatur (*l*), aut deferentia corpora educantur. Quare hic etiam dicendum erit electricitatem ita dispositam esse, ut vitrea quidem electricitas ad exteriorem vitri superficiem, resinosa autem priori aequalis partim in interna vitri facie, partim in armatura adnexa resideat, aut in vacuo armaturae vices gerente (57.); hinc quamdiu oppositae illae electricitates aequales sunt, & aequilibratae, exteriora signa earumdem nulla haberi; sublata vero armatura, sicque resinosa electricitate diminuta, jam praepollentem vitream electricitatem se ostendere (*m*).

60. Illud vero etiam ex nostris experimentis deducitur, ut experimentum hauksbejanum ad votum succedat, corpora deferentia, quibus tubus repletur talia esse debere, ut internae illius superficiei aptari possint, & uniformem armaturam eidem praestare; secus enim si scabra, angulosa, hirsuta, jam tota, aut fere tota resinosa electricitas in internam vitri faciem inducetur, unde licet ea corpora post vitri frictionem detrahantur, oppositae electricitates in aequilibrio esse pergent, nullamque adeo, aut perexiguam in ambientia corpora vim exercebunt (58).

61. Si porro vitra descripto modo electrica facta (53. 58.), utrimque armentur ex oppositarum armaturarum contactu succussio nulla habebitur; imo & taeniae (7), & vitra, quamvis corpore deferente levi, ut charta inaurata ad aliquot minuta temporis undique obvoluta serventur cohaerere

(*l*) *Otto de Guerike* apud *Cl. Dalibar.* in histor. elect. Franklin. epist. praefixa p. XVI.

(*m*) Apparet igitur quam recte Cl. Nolletius comparaverit latentem electricitatem cruralium sibi mutuo applicitorum cum latente electricitate tubi deferentibus corporibus pleni, quoniam illa cruralium separatione, haec deferentium corporum detractione manifesta fit. In *Syst. ser.* p. 51.

re pergent, & detecta, ac sejuncta nondum oppositas electricitates amisisse observantur, quum consuetum onus ex oppositarum armaturarum communicatione temporis momento fuissent amissura.

62. Experimentum instituebam a FRANKLINO propositum, nempe bina vitra plana optime exsiccata, alterum alteri superpositum, ut instar unius essent, ad inferiorem faciem deferenti lamina tegebam; ita tamen ut armatura haec cum solo neutiquam communicaret, sed perstaret *insulata*, quamdiu opposita superior junctorum vitrorum facies fricaretur. Dein superiorem hanc faciem alterne fricabam, alterne ad subjectam armaturam admoto digito scintillam ciebam: inde vitra, ut prius (53), tum inter se, tum ad subjectam armaturam adhaerescebant, & quemadmodum FRANKLINUS docet (*n*), onerabantur; ita ut, imposita superiori faciei, quae fricata fuerat, armatura, ex hujus, & inferioris armaturae simultaneo contactu succussio haberetur.

63. Verum quod singulare videri potest, postquam vitra, facta oppositarum armaturarum communicatione, succussissent, adhuc tamen cohaerebant, & quamvis juncta electricas vires in exteriora corpora non exercerent, ab invicem tamen dimota oppositas electricitates ostendebant, taliaque, uno verbo, erant, qualia statim post frictum fuerant in superiori experimento (58.). Duplicem adeo in hoc experimento electricitatem adquirebant, alteram qua succuterent, & quae succutiendo extingueretur, alteram quam diutius servarent. Illam franklinianam, hanc symmerianam brevitatis caussa deinceps appellabimus.

64. Porro si, vitris illis (62), quibus oppositae electricitates inhaerent ab invicem dimotis, eorum armaturae tangantur scintilla ex utraque habebitur, & jam succutiendo inepta fient. Iis enim ad contactum restitutis, facta licet oppo-

(*n*) Tom. I. p. 217. 218.

oppositarum armaturarum communicatione nulla obtinebitur. Parum tamen ex eo armaturarum contactu symmeriana eorum electricitas infirmabitur; adhuc enim se mutuo attrahere pergent, & leve corpus ex serico filo inter ipsa pendulum in oscillationes adigere, eodem prorsus modo, quo in superiori experimento (63.) evenire diximus.

65. Igitur electricitas, quae succutit, similis est plumbi electricitati, quae solo contactu disperditur, quum primum taenia oppositam electricitatem habens ab ipso dimovetur (37.), cum contra symmeriana vitrorum, aut taeniarum electricitas hujusmodi sit, ut semota vitra, aut taeniae oppositas electricitates habentia jam quidem atmosphaeras electricas ostendant, quibus antea caruerant, sed easdem nonnisi lente, ac temporis progressu ex deferentium contactu amittant (38. 63. 64.)

66. Utraque igitur electricitas, sublata oppositae electricitatis propinquitate, nititur quidem, ut prodeat e corporibus, quibus insidet, sed electricitas, quae succutit, uti ea, quae plumbo inest, in objectum deferens corpus statim diffunditur, symmeriana nonnisi lente.

67. Iterum si symmeriana electricitas satis promte prodire posset, facta oppositarum facierum communicatione, succuteret, similiter ac frankliniana, & temporis momento extingueretur: quum vero contrarium contingat (61.63.), confirmatur eandem a corporibus, quibus insidet, irretitam difficilius, tardiusque se se expedire.

68. Revera si vitra, aut teniae symmeriana electricitate imbutae hirsuto deferente corpore undique obvolvantur multo citius eam electricitatem amittunt, quam cum laevi deferente quaquaversum tegerentur (61). Cujus quidem discriminis ratio, ut alibi innuimus, (15) in eo tota consistit, quod pili hirsutae superficiei faciliorem reddant electrici fluidi fluxum per coërcentia, quibus obvertuntur.

69.

69. Qui vero consideret, quam difficile coërcentia electricitatem suscipiant, susceptamve dimittant, qui noverit, quam tarde aër electricitatem hauriat, haustamve disperdat (*o*), is facile intelliget symmerianam electricitatem aëreae similem esse, porisque coërentium altius intricatam, franklinianam deferentium electricitati assimilari, & vel deferentibus insidere, vel nonnisi superficie tenus in coërentibus positam, ac liberam esse.

70. Ex his constat tenacitatem electricitatis serico haud esse propriam, sed coërentibus quibusvis corporibus communem (*p*): constat deinde oppositas succutientes electricitates dimidiam hinc inde vitri crassitiem neutiquam occupare, multo minus per vitrum ex una in alteram superficiem trasmitti: constat demum tenacitatem electricitatis ex sola difficultate, qua per poros coërcentium electricum fluidum movetur, deducendam esse.

71. Facile autem est intelligere, cur vitrum, cujus una superficies fricatur, dum oppositæ faciei armatura cum solo constanter communicat, succutere nunquam possit, nec sericum, nec corpus aliud quodcunque similiter confricatum; nam ut FRANKLINUS advertit (*q*) contrariae electricitates, quae ad oppositas vitri superficies liberae adhuc sunt, ex simultanea communicatione cum corporibus deferentibus hinc per manum fricantem, inde per armaturam, qua proportione congeruntur, dissipari debent, nec unquam propterea vitrum succutiendo aptum fiet. At contra cum earum electricitatum pars, quae altius in vitri poros penetravit aegre inde iterum emergat, & sola oppositarum

h facie-

(*o*) Vid. *Cl. Cantonum* l. c. p. 294., & cf. *Beccaria lettera* VII., ubi de hac aeris electricitate multa nova, & pulcherrima theoremata per experimenta demonstrantur.

(*p*) Cum talci laminam non secus ac vitra symmeriana electricitate imbuissem, ipsam parieti adhaesisse observavi, & ultra horam in ea adhaesione perseverasse.

(*q*) Loco ult. cit.

facierum communicatione cum deferentibus promte disperdi nequeat (61); hinc novam, & novam continuata frictione adigi posse liquet, quae memoratis hactenus signis se prodat.

72. Inde est ut sericum, etiam deferente lamina interceptum, ex ejus frictione symmerianam electricitatem acquirat (3. 20. 32.) in eo *tourmaline* lapidi quodammodo simile, quem ex medii deferentis, in quod immergitur, calore electricum fieri observarunt (*r*).

73. Ex hactenus dictis erui posse videtur I. electricitate alterutra, vitrea scilicet, aut resinosa in unam vitrorum, aut aliorum coërcentium faciem irruente, contrariam electricitatem ad oppositam faciem, si via detur, aequa quantitate accurrere. II. Eas electricitates in se invicem tendere, hinc coërcentium laminas, quibus incumbunt junctas servare. III. Dum ad se mutuo tendunt, neutiquam niti ut ad exteriora diffundantur, hinc ex neutra parte atmosphaeram efformare. IV. Interea tarde ac difficulter in interjectae coërcentis laminae crassitiem penetrare. V. Si via facilior ac commodior detur, per quam misceri possint, facta nimirum per deferentia corpora oppositarum facierum communicatione, electricitates quae ipsis liberae adhuc insistunt, eam viam legere, & sibi mutuo occurrentes se invicem destruere. VI. Eas vero, quae altius in poros coërcentis laminae penetrarunt, niti quidem ut eandem viam teneant, sed cum aegrius inde exsolvi possint, multo tardius id fieri, nisi, acuminatis deferentibus corporibus utrimque admotis, earum exitus adjuvetur (68). VII. Cum eae oppositae electricitates ad se invicem tendant, hinc fieri, ut si via alteri tantum detur, admoto deferente, dum opposita undique coërcetur, ne illa quidam prodeat hujus actio-

(*r*) Histoire de l'Acad. de Berlin tom. XII. p. 105., & seq.

actione retenta (*s*). VIII. Quotiescumque laminae, quibus oppositae electricitates inhaerent, sejunguntur, jam utrasque atmosphaeras electricas acquirere. IX. Et tunc quidem electricitates, quae liberae adhuc ad illarum superficiem sunt ex deferentium contactu momento dissipari (64). X. Eas vero, quae altius in ipsarum poros penetrarunt, multo tardius, nisi, acuminato deferente corpore objecto, ad exitum adjuventur (cap. III.)

CAPUT V.

De armaturarum officio in onere vitrorum, aliorumque coërcentium.

74. NOtum est FRANKLINI mirabile experimentum, in quo, vapore electrico per globi rotationem ab una ad alteram vitri armaturam deducto, vitrum onerat absque ullius extraneae electricitatis praesidio (*t*), tum aliud, in quo vitrum onustum, atque *insulatum* ope arcus deferentis item *insulati* deonerat, quin post deonerationem ullum in arcu deferente, aut in corporibus cum ipso communicantibus electricitatis vestigium supersit (*u*). Quibus quidem in experimentis, cum oneretur vitrum, nulla extranea adscita electricitate, deoneretur iterum, quin quidpiam susceptae electricitatis dimittat, inde VIR illustris concludit maximam electrici vaporis copiam in vitro delitescere (*v*), quae ex una in alteram ipsius superficiem deducta vitrum oneret, aequabiliter iterum distributa nativam ipsius habitudinem restituat.

h 2. 75.

(*s*) Ne acutissimo quidem obverso stilo cruralia electricitate exui potuerunt, quandiu juncta perstabant. *Symmer.* pag. 36. 37.
(*t*) Tom. I. p. 101. 102.
(*u*) Ib. p. 68. 69., & 115. 116.
(*v*) Ib. p. 9. 186. 196., 200. & alibi passim.

75. Enim vero vaporem, quo ex una in alteram armaturam deducto oneratur vitrum, non ex illa prodire, nec in hanc congeri censet VIR summus, sed a subjecta vitri superficie per armaturam alteram erumpere, ut per alteram in oppositam vitri superficiem immittatur. Nam, mutatis quantumvis onerati vitri armaturis, successionem haud minus haberi observat (*x*), & praeterea adnotat (*y*), dum deoneratur vitrum, iis ex locis, quibus arcus deferentis extremitates admoventur, ab emicante igne armaturae portionem disjici, & interpositum gluten comburi; ex quo confirmari contendit electricitatem, quae succutit, in armaturis neutiquam residere, sed sub ipsis positam in suo trajectu earum portionem abripere.

76. Quae quamquam maximam veri speciem praeseferant, experimenta tamen nonnulla afferam, quae suadere videntur electricitates, quibus vitra onerantur, in armaturis praesertim residere (*z*), ex iis in extimas vitri superficies, seu in exteriora ipsius strata deponi, quando armaturae divelluntur: idque non alio consilio, nisi ut acutiores excitem ad eandem rem accuratius pervestigandam.

77. Taenias plures sericas ejusdem coloris, quinque ad exemplum, aut sex, optime exsiccatas, alias aliis superpositas supra laminam deferentem laevem regula ex ebore fricabam, ea cautione, ne in eo affrictu taeniae, vel ab invicem separarentur, vel adversus subjectum deferens corpus attererentur. Postquam fricatae fuerant, si singulas seorsim, a suprema incipiendo, & ex ordine divellerem, in uniuscujusque divulsione inter taenias scintillae apparebant illis praecise in punctis, quae ab invicem separabantur:

(*x*) L. c. p. 140. & seq.
(*y*) L. c. p. 184. 185.
(*z*) Vim succutiendi in armaturis posuerat *Watsonus suis* p. 240. objectiones etiam contra doctrinam franklinianam proposuit, quibus tamen Franklinus ipse respondet tom. I. p. 164. & seq.

tur: eae scintillae similiter exiliebant in infimae taeniae separatione a substrata deferente lamina. Taeniae autem hoc modo divulsae omnes resinosam electricitatem praeseferebant.

78. Si postquam taeniae fricatae fuissent (77.), omnes simul a subjecto plano divellerentur, in unum fasciculum cohaerebant, qui praevalentis resinosae electricitatis ex utraque facie signa exhibebat. Tunc si facies, quae laminae laevi deferenti applicita fuerat ad hirsutam superficiem admoveretur, ut electricitates oppositae ad aequilibrium reducerentur (58), dein ab infima taenia incipiendo, singularum iterum, sed inverso ordine separatio fieret, iterum scintillae, ut prius, apparebant, sed taeniae omnes electricitatem habebant vitream, atque adeo priori oppositam, suprema excepta, quae resinosam electricitatem ex affrictu acquisitam servaverat.

79. Hinc est ut si taenias eas alias aliis superpositas supra hirsutum corpus fricarem, dein omnes simul ab eo divellerem, ut fasciculum haberem, in quo oppositarum facierum electricitates aequilibratae essent (58) intermediae taeniae omnes, vel supremae congenerem electricitatem acquirerent, vel infimae, pro ut a suprema incipiendo, & progrediendo versus infimam, vel contra ab infima ad supremum procedendo ex ordine revellebantur.

80. Porro si binae earum taeniarum simul revellantur (77. 78. 79.) sibi mutuo adhaerent, & simul junctae eandem electricitatem habent, quam una tantum revulsa habitura esset, sed si separentur, observabitur eam electricitatem in ipsarum extima residere, intima, per quam fasciculo adhaerebant oppositam, sed multo minorem electricitatem habente.

81. Ex quibus conjectare licet, per affrictum (77.) supremam taeniam electricitate imbui, caeteras, aut nullam, aut perexiguam recipere: oppositam vero, & aequalem

lem electricitatem in subjectam deferentem laminam congeri, quae cum supremae taeniae electricitate aequilibrium constituat, impediatque quominus suprema taenia ulla exteriora edat electricitatis signa. Si taeniae, a suprema incipiendo singillatim, & ex ordine divellantur, supremae electricitatem in subjectam deponi scintillarum specie, ex hac in tertiam, & ita deinceps, donec in infimam deponatur, propterea taenias omnes supremae cognominem electricitatem adipisci.

82. Si taeniae omnes simul a plano deferente divellantur (78), verosimile est electricitatem in eo congestam, & cum supremae taeniae electricitate aequilibratam in infimae superficiem, quae ab ipso divellitur, ex parte deponi scintillarum specie, hinc taenias in unum fasciculum junctas retineri: praevalere tamen in eodem supremae taeniae electricitatem, quod subjectae deferentis laminae electricitas cum ea aequilibrata, tota in infimam taeniam permeare non potuerit: quod si jam ea infima taenia hirsuto corpori obvertatur, ex quo majori vi in ipsam electricitas immittitur (15), tantam recipiet, ut cum supremae contraria electricitate aequilibretur, & tunc porro, si ab hac incipiendo singulae taeniae ex ordine divellantur, fiet, ut ejusdem electricitas similiter scintillarum specie ex una in alteram diffundatur, sicque taeniae omnes intermediae ipsi congenerem; atque adeo supremae contrariam electricitatem obtineant.

83. Quando porro binae earum taeniarum simul revellantur (80) earum extima comperitur habere electricitatem quam ex frictu, aut ex divulsa superincumbente taenia acquisivit, intima contrariam ab opposita extima taenia propagatam, sed multo minorem, tantam nimirum, quanta per interpositas adhuc taenias alias propagari potuit.

84. Cum vero electricitas in hac taeniarum separatione ab extremarum taeniarum alterutra (81, 82.), vel potius

utra-

utraque (83.) in intermedias diffundatur ſcintillarum ſpecie, hinc eſt ut ubi ſemel taeniae faſciculum componentes ſeparatae ſunt, quantumvis in faſciculum iterum ordinentur nullae amplius in earum ſeparatione ſcintillae conſpiciantur; nam, electricitate in eum modum ex taenia in taeniam jam propagata, ratio ceſſat, ob quam in nova earum ſeparatione ſcintillae fuiſſent appariturae.

85. Intelligitur etiam ex his, cur binae taeniae, ubi ſemel ſeorſim divulſae a ſubjecto plano, aut a proximis taeniis ſe ſe repellunt, vel ex ſimultanea ſeparatione ſe ſe attrahunt, quantumvis ad eas taenias, aut ad planum iterum admoveantur, ſive ſeorſim, ſive ſimul divulſae, ut antea ſe attrahere, aut repellere pergant. Nimirum electricitate imbuuntur taeniae in prima ea ſeparatione: ubi ſemel eadem imbutae ſunt fruſtra ad planum deferens, aut ad caeteras taenias iterum admoventur. Ex quibus porro jam ratio patet phaenomenorum plerorumque in capite primo expoſitorum (ab 1. ad 10.).

86. Similiter vero taenias alias aliis ſuperpoſitas laminae metallicae adplicabam, quae electricitatem ex globo recipiebat, dum interim ad oppoſitam taeniarum faciem acuminatum metallum obvertebam, & per ipſius longitudinem promovebam; dein cum ceſſante globi actione taenias explorarem, eadem omnino eveniebant, ac in ſuperioribus experimentis: nempe pro vario ordine, quo revellebantur taeniae, vel omnes metallicae laminae contraria electricitate imbui poterant, vel eadem, prima excepta, cui apex obverſus fuerat, quae ab eodem receptam electricitatem laminae contrariam conſtanter ſervabat.

87. Quemadmodum igitur ab extimis taeniis in ſubjectas electricitas propagatur, aut a ſubjecto plano in proximam taeniam, quando a ſe mutuo ſeparantur, ſic ab armaturis in vitri ſuperficies deponi in ipſarum ſeparatione eorum phaenomenorum affinitas maxima, vel potius identitas ſuadere videtur.

88. Revera cum vitrum optime exsiccatum laminis plumbeis armassem, quae eidem tantum adplicitae, nequaquam vero adglutinatae erant, vitro de more onerato, armaturas firmissime ipsi adhaesisse observavi, a quo cum postea divellerentur, lux pariter & scintillae in locis apparuerunt, ubi ab invicem separabantur.

89. Cum vero plura sericeae telae (*a*) folia alia aliis superposita similiter armassem, & onerassem (onus autem exiguum recipere poterant, quod, ubi paullo major electricitas congesta fuisset, per serici crassitiem ex una in alteram superficiem exiliebat, unde deonerabantur), firmiter etiam armaturae ad serici superficiem adhaeserunt; sed cum earum alteram, suspensa quamvis manu, divellere tentarem, nunquam id perficere potui, quin interim scintilla a punctorum aliquo, unde divulsio fiebat per serici crassitiem ad oppositam armaturam exiliret, unde & deonerabatur sericum, & opposita armatura proprio pondere secedens decidebat.

90. Quare verosimile est electricitates oppositas in oppositis armaturis praesertim locatas, eas esse, quae ipsarum ad vitrum, aut sericum adhaesionem efficiant, quaeque, dum armaturae divelluntur, in vitri superficies irruentes scintillas exhibeant (88), in ea divulsione conspiciendas. Cum maximo impetu ex armaturis, dum divelluntur, in proximam coërcentem superficiem irruant, hinc factum esse, ut armatura altera divelli a serico non posset, quin electricitas ab ipsa in ejus superficiem irruens ad oppositam armaturam perveniret (89).

91. Neque tamen electricitatem totam ab armaturis in armati coërcentis corporis superficies deponi, dum divelluntur, sed partem eius coërcentis restitentia reprimi (vid. cap. praec.) experimenta iterum insinuare videntur: etsi enim,

(*a*) *Du satin.*

enim, postquam ab onerato vitro armaturae revulsae fuerunt, oppositae electricitates aequilibratae esse pergant, id ex eo fit, quod aequa pars electricitatis ab utraque facie repellatur; cum autem vitrorum, aut taeniarum altera superficies electricitatem immediate a fricante corpore reciperet, altera nonnisi a subjecta armatura in eius separatione super ipsam depositam, eveniebat constanter, ut non tota deponeretur; nam electricitates oppositae, quae in aequilibrio erant, quamdiu lamina deferens applicita perstabat, ea dimota, amplius non erant, praevalente nimirum electricitate superficiei fricatae, ex eo, quod deferens lamina oppositae electricitatis partem secum abripuisset (conf. cap. I. IV.).

92. Eamdem rem experimentis etiam aliis confirmavi. Nam, si vitrum inferiori facie armatum, superiori nuda electricitatem ab acuminato metallo e catena pendulo reciperet, rursus eveniebat, ut oneraretur, & binae oppositae electricitates aequilibrarentur, quamdiu vitro adhaerens armatura eidem adplicita perstabat, ea vero detracta, supremae superficiei electricitas praevaleret. Si superficies superior armata electricitatem reciperet a catena, dum acuminatum metallum ad inferiorem nudam obversum per puncta superiori armaturae respondentia promovebatur, iterum onerabatur vitrum, & oppositae electricitates in aequilibrio erant, rursus armatura adhaerebat, rursusque, ea divulsa, apparebat haud totam electricitatem supra vitri superficiem ab ipsa depositam fuisse; nam praevalens inferioris faciei electricitas jam ex utraque vitri facie se ostendebat.

93. Scilicet, ut paucis rem hanc complectamur, in vitris, aliisque coërcentibus praevalet semper oppositarum electricitatum illa, quae in alterutram faciem majori vi adacta est: propterea, si hinc per frictionem, aut per acuminata corpora immitatur, inde per planas superficies, illa

niens intermediarum armaturarum nativam electricitatem ita secedere coget, ut resinosa illi aequalis in proximiorem colligatur, vitrea earumdem in alteram abeunte, unde aequalem resinosae electricitatis quantitatem in armaturam infimam, vitrisque subjectam a solo alicere potest. Quando, instituta inter externas armaturas communicatione, vitra haec simul deonerantur, vitrea, & resinosa interjectarum armaturarum electricitas iterum per easdem aequabiliter distribuitur, sicque ad nativum statum restituuntur. Quod si porro electricus vapor, quo vitra onerantur, ex una vitri in alteram superficiem abiret, in iisque resideret (74), nulla ratio esset, cur, etiam quando nulla armatura vitris interponitur, electricitas vitrea ab interna superioris vitri superficie expelli non deberet, & cum resinosa contiguae superficiei inferioris vitri commutari; cum enim eae superficies totidem punctis sibi invicem respondeant, vel potius se tangant, fluidum electricum nullo vehiculo opus habet, ut ex una in alteram transeat, quod unum officium armaturis fuerat relictum (*k*).

98. Ad argumentum alterum franklinianum quod spectat; armaturae nempe portionem inde excuti, unde ignis electricus emicat (74), videtur utique id non minus a repercussione electrici fluidi fieri posse, quam a directo ipsius transitu per armaturas (*) ex eo praesertim, quod in explosione vitra interdum ipsa diffringantur (*l*), quanquam

(*k*) Experimentum hoc symmerianum aliquoties frustra tentatum a Clarissimo *Nolletio* tandem ad votum successit *Mem. de l' Acad.* l. c. p. 267. Enimvero, ut propria observatione didici, vel levissimus humor vitris adhaerens efficit, ut non secus onerentur, ac si armatura esset interjecta. Ex quo apparet multo magis ab ipso cavendum esse in hoc & affinibus experimentis hactenus propositis, quam in plerisque aliis electricis, cum humor, qui pro armatura inservire potest illo multo adhuc minor sit, qui impedit, quominus vitra onerari possint.

(*) Vid. *Frank.* tom. I. p. 187.

(*l*) *Idem* tom. I. p. 187.

quam erumpens ignis electricus ipsorum crassitiem neutiquam trajicere debeat.

CAPUT VI.

De contrariarum electricitatum natura.

99. Contrarietatem vitreae, & resinosae electricitatis, quam experimentis memoratis (74), aliisque permultis (*m*) Franklinus demonstraverat, simplicissima, celeberrimaque hypothesi explicavit; alteram nempe contrariarum electricitatum ab excessu electrici fluidi, alteram a defectu nativae ejusdem quantitatis in corporibus proficisci; indeque fieri, ut pari copia permixtae se mutuo destruant. Cujus hypotheseos praestantiam facile perspiciunt quicumque naturae simplicitatem in intricatissimis etiam phaenomenis mirari consueverunt. Haud diffitendum tamen est, alii cuicumque hypothesi locum esse, si ita experimenta postulent, modo illi contrarietati aeque satisfaciat (*n*).

100. Et Symmerius quidem contrarietatem illam novis argumentis confirmavit (*o*), at hypothesim aliam francklinianae substituendam duxit: nempe binas oppositas electricitates a binis oppositis viribus *utrimque positivis* fieri, ex quarum contrarietate, & pugna phaenomena omnia electrica producantur, quae quidem vires oppositae a duobus fluidis oppositas naturas habentibus originem ducant (*p*).

101. Quanquam vero de duplicis fluidi natura nihil ulterius decernere audeat Vir modestissimus (*q*), manifestum est duo fluida elastica se se invicem attrahentia eius hypothesi

(*m*) Tom. I. a p. 85. ad 93., & alibi passim.
(*n*) Confer. Cl. *Beccaria lettera* II. §. 65.
(*o*) P. 116. 117.
(*p*) Pag. 111., & 119.
(*q*) Pag. 120.

jorem esse debere, quo angustior via est, per quam electricus vapor trajicitur, hinc aequalia brachia in omologis locis aeque percuti, & succussionem eo altius, seu ad ampliores brachiorum dimensiones pertingere, quo electricitas fuerit vehementior (ζ). Fimbrias vero oppositas directiones habentes ab expansione fluidi quaquaversus circa centrum undae (*a*), neutiquam vero ab ipsius undae directione fieri respondet FRANKLINUS (*b*), similiterque dici posset impressionum contrariarum, quae in folio metallico observantur, alteram quidem ab impetu advenientis fluidi produci, alteram vero ab ejusdem repercussione ob resistentiam chartae ad oppositam ipsius partem adhuc trajiciendae: nec aliter Cl. BECCARIA ex actionis, & reactionis aequalitate explicat in frankliniana hypothesi, cur vitrum pendulum, dum explosio fit, non commoveatur (*c*).

105. Contra vero, ut principio dicebam, franklinianam hypothesim mira eius simplicitas commendat, tum illud scholarum *entia sine necessitate non esse multiplicanda*. Id unum in ea desiderari posse videtur; ut, qua facilitate intelligitur, cur contrariae electricitates inter se permixtae se destruant, eadem explicetur, cur, quando misceri non possunt, se invicem alliciant, cohibeantque, nec aliter in se agant, quam si mutua inter ipsas attractio intercederet (41. 73. 74. 95.). Sed jam nimis multa de perobscura quaestione, quae magnos VIROS in contrarias partes distraxit, quae tamen indicare voluimus, ut constaret, hypothesim quamcumque, quae contrarietatem electricitatum in se tendentium, & aequabili mixtione se se destruentium explicet; notis hactenus phaenomenis aeque consentaneam esse.

(ζ) *Elettric. artific.* §. 431. 432.
(*a*) *Du courant.*
(*b*) Tom. II. pag. 230. Ita etiam *Cl. Beccaria elettric. artific.* §. 513.
(*c*) L. C.

DE L' ACTION
DE LA CHAUX VIVE
Sur différentes substances
PAR M. LE COMTE SALUCES.

1. PLusieurs Savans ont traité de la Chaux, & leurs productions sont très-intéressantes; mais les résultats différens qu' ils ont eus de leurs travaux, ayant contribué à une diversité de sentimens sur la nature de cette substance, la verité se trouva ainsi balancée par la réputation des grands hommes, qui y avoient donnés leurs soins, &, à quelque opinion près, on demeura dans la perpléxité & dans l' incertitude: c' est pour cette raison, qu' après ce qu' en avoient dit les VANHELMONT, les STAHL, les LEMERY, les ZWELPHER, les HARTMANN, les FICKIUS, les LUDOVICI, les KUNKEL, & beaucoup d'autres que j'omettrai pour plus de briéveté, M. du FAY en entreprit un nouvel éxamen: son travail ne fut pas néanmoins ni dès-plus suivis, ni décisif; car quoiqu' il en eut retiré un Sel, il n'en a pas déterminé la nature. M. MALOUIN travailla ensuite sur le même sujet, & prouva que la Chaux contenoit un Sel sélénitique. M. MACQUER voulut, au surplus, voir si ses propriétés étoient duës à quelque matière saline, qui concourut à sa formation, & il a démontré le contraire. M. POTT tourna ses vuës sur les phénomènes que présente la dissolution de la Chaux vive dans l' acide nitreux. M. Du HAMEL observa ce qui résultoit de la combinaison de cette substance avec tous les acides, & augmenta par là

le nombre des connoiſſances qu' on avoit ſur cette matière; en traitant enſuite de la nature du Sel ammoniac, ce Savant ayant paſſé à éxaminer quelle pouvoit être la cauſe de la conſtante décompoſition de ce Sel en liqueur en employant la Chaux pour intermède, conclud d' une ſuite d' expériences très-ingénieuſes, que la Chaux n' agit pas ſeulement ſur l' acide du Sel ammoniac, mais encore ſur la matière graſſe qui eſt de l' eſſence des Alkalis volatils. M. Brandt donna auſſi un Mémoire en 1749 à l' Académie Royale de Suéde ſur la Chaux; le premier objet qu' il a eû en vuë a été de décider ſi elle eſt entièrément diſſoluble dans l' eau, il paſſa enſuite à éxaminer, ſi par ſa combinaiſon avec les acides, il réſulte des Sels neutres, & il a trouvé que ni l' une ni l' autre de ces propoſitions n' étoit pas vraye; il entra enſuite dans une comparaiſon de ſes effets avec ceux des Alkalis fixes, & il finit par des recherches ſur les matières qui contiennent une terre ſemblable à la Chaux. M. Hoffmann a de même fait différentes expériences ſur la Chaux vive, & il lui attribue un principe terreſtre très-fixe, & un autre volatil preſque de la nature du feu; il prétend que le feu ne fait qu' unir ces deux principes avec plus de force, & qu' on peut en ſéparer celui qui eſt volatil par la cuiſſon dans l'eau; M. Nadault donna enfin une diſſertation remplie d' expériences toutes nouvelles, & fort ingénieuſes dans le recüeil que l' Académie Royale des Sciences fait paroître ſous le tître de Mémoires préſentés à l' Académie par divers Savans &c. Tom. 2. mais tous ces Illuſtres Ecrivains ont eut pour but, dans l' éxamen qu' ils ont fait de la Chaux, de voir ſi elle contenoit quelque matière ſaline; ſi cette matière entroit dans ſa compoſition, & quelle en étoit la nature. Le Seul M. Du Hamel, que je ſache, développa, par occaſion, & dans le cas particulier du Sel ammoniac la propriété dont nous avons parlé; propriété qu' on con-

noiſſoit

noiſſoit en quelque façon; car on ſavoit, par exemple, qu' on pouvoit rendre, par ſon moyen, diſſolubles dans l' eau les huiles, & les graiſſes, en formant avec elles une eſpéce de ſavon; ces connoiſſances étoient pourtant trop vagues, & trop peu circonſtanciées, pour que l'on en put inférer ce que ce Savant a enſuite établi par des procédés fort élégants. M. TALDUCCI avoit fait dès l' an 1671 des expériences ſur ce ſujet, & il avoit déja obſervé que la Chaux vive combinée avec le ſoufre augmentoit de poids, malgré l' inflammation de cette ſubſtance, & quelqu' autre phénomène qui reſulte de ſon union avec l' acide nitreux, ou avec quelqu' autre matière; ces expériences, quoique ingénieuſes, ne ſont cependant que des faits iſolés qui ne lui laiſſerent pas ſoupçonner la propriété qu' a la Chaux vive d' attaquer la partie phlogiſtique de pluſieurs corps: c' eſt ce qui fait l' objet de ce mémoire, que je crois d' autant plus intéreſſant, qu' il n' a encore été traité par perſonne ſous ce point de vuë, & que fourniſſant des phénoménes nouveaux, on peut en retirer des obſervations dont l' utilité ſera d' autant plus ſenſible, qu' on pourra, en les comparant à d' autres déja connuës, développer bien des vérités qui demeureroient encore, ou dans l' incertitude, ou, peut-être, dans l' obſcurité & dans l' ignorance.

2. C' eſt de cette matière que nous appellons auſſi du nom de *matière inflammable*, ou *ſoufre principe &c.* dont il eſt queſtion dans ce mémoire, & qu' il eſt néceſſaire de bien diſtinguer de ce qu' on entend communément par matière graſſe; car l' union qu' elle contracte avec toutes les parties, qui compoſent une ſubſtance graſſe, n' eſt pas, à beaucoup près auſſi intime, que l' eſt celle qu' elle contracte avec cette partie, dont la préſence, ou la privation, apporte des altérations, & des changemens ſi conſidérables aux corps.

3. Comme un tel éxamen ne peut naturellement que m'engager dans un grand nombre d' expériences, dont aucune n' eſt à négliger, & que, d'ailleurs, je ſerois trop diffus; je penſe de ne donner maintenant qu' un éſſai de tout le travail que j' ai fait, & dont je rendrai compte, par parties, conjointement à ce qui me reſte encor à faire. Je choiſirai pour ce mémoire les expériences dont les réſultats m' ont fourni quelques phénomènes, ou quelques obſervations plus particulières; pour ſuivre un ordre, je commencerai par expoſer ce qui m' eſt réſulté de la combinaiſon de la Chaux avec le ſoufre, & pour pouvoir procurer tous les éclairciſſemens que je crois néceſſaires, je me propoſe de faire obſerver, en même-tems, ce que m' a donné le mélange du Soufre avec l' alkali fixe, mélange qu'on connoît ſous le nom de foye de ſoufre, & le mélange d' un pareil foye de ſoufre avec la Chaux, c' eſt de ce dont je m' en vais rendre compte.

EXPÉRIENCE PREMIERE.

Combinaiſon du Soufre avec la Chaux: du Soufre avec le Sel de Potaſſe; & du foye de Soufre avec la Chaux.

4. JE fis, dans cètte vuë, un foye de Soufre, en mêlant quatre parties de Sel de Tartre à une de Soufre fondu, j' ai diſſous ce mélange dans l' eau, de même que les ſuivans. Je fis auſſi un mélange de quatre parties de Chaux vive avec une de Soufre fondu. J'en fis un troiſième enfin de ſix parties de Chaux, trois d'Alkali fixe, & une de Soufre. Je mis les trois cucurbites garnies de leurs Chapiteaux ſoigneuſement luttés dans un même bain de ſable.

5. Dans les deux premières combinaiſons la plus grande partie du Soufre ſe ſublima au Chapiteau; on voyoit néanmoins

moins des taches blanches très-luisantes, & principalement dans le col des cucurbites. Le caput mortuum étoit noir dans celle de la Chaux, & roux jaunâtre dans celle du foye de Soufre. Je ne m' arrêtai pas à éxaminer ces résultats, me réservant à le faire, lorsque j' en aurois eus des plus considérables.

6. Le troisième mélange, savoir celui du foye de Soufre avec la Chaux m' a fourni des observations plus remarquables; car il ne laissa rien sublimer, & la liqueur qui passa dans le récipient, quoiqu' insipide & sans odeur, changeoit cependant en rouge le papier bleu; il est vrai qu'elle ne fermentoit point sensiblement avec les Alkalis. Je suis cependant très-persuadé, qu' elle contenoit un peu d'acide; parcequ' outre ces indices, j' ai trouvé, depuis mon travail fait, que M. SEEHLIUS en avoit retiré, & qu' au sentiment de M. VOGEL, cet esprit tient de l' urineux; (*a*) la tête-morte étoit d' un blanc éclatant contre les parois du verre, noire dans le milieu, boursoufflée, facile à se réduire en poussière, grasse au toûcher, d'un goût très-salé. J' en retirai par la dissolution, filtration, & dessication, une substance très-blanche, cotonneuse feüilletée, à peu près, comme la terre foliée; cette substance étoit converte de petits cristaux luisants très-déliés qui s' élevoient en pointes, & se croisoient comme les brins d' une étoffe de laine blanche: son odeur approchoit beaucoup de celle que prend l' urine évaporée en consistence de miel, sa saveur étoit amère, & un peu salée.

Ayant répété cette expérience, en substituant au Sel concret du Sel qui étoit tombé en déliquescence, je commencai par remarquer que la liqueur avoit pris une couleur beaucoup plus chargée, je la décantai, & elle ne changea plus sensi-

(*a*) Ce Phénomène présente quelque chose d'extraordinaire, mais je ne dois pas dissimuler qu' il a été observé par plusieurs Savans.

ſenſiblement en rouge le papier bleu, (b) mais elle faiſoit une grande efferveſcence avec les acides : ayant enſuite calciné les matières dont j' avois décanté la liqueur, elles ſe ſont réduites en une maſſe pulvérulente, ſpongieuſe, très-légere, noirâtre dans la partie ſupérieure, bleuâtre dans l' intérieur de la ſubſtance, & très-blanche dans les autres endroits, comme la tête-morte de l' expérience précédente.

8. J' ai réïteré les deux combinaiſons précédentes, mais le rapport de la Chaux, & de l' Alkali fixe, au Soufre étoit dans chacune de 10: 1. Le foye de Soufre fournit une grande quantité de matière ſublimée au Chapiteau & au col du matras.

9. Cette matière étoit très- blanche & ne paroiſſoit tirer un peu ſur le jaune qu' au rebord du Chapiteau; elle étoit ſi graſſe que je ne pus la détacher du verre, ſans qu' elle s' engagea au pinceau, de manière à ne pouvoir l' en retirer qu' en le mettant dans l' eau.

Elle s' y eſt preſqu' entièrement diſſoute, ce qui reſtoit à la ſurface s' eſt enfin précipité ſous la forme d' une poudre blanche très-fine, & la diſſolution du blanc un peu jaunâtre devint claire, & paroiſſoit tirer ſur le bleu.

J' en pris une partie que je ſoûmis aux expériences dont je vais donner les réſultats.

10.

(b) La contradiction apparente qui ſe manifeſte dans ces réſultats, en ce qu'ils donnent des ſignes d' Alkali & d'acide ne viendroit-elle point de ce que par cette combinaiſon l' acide vitriolique eut perdu un peu de ſon affinité avec le phlogiſtique, de manière que ſon union n'étant plus ſi forte, chacun des principes du mélange put agir avec liberté ſur des nouvelles ſubſtances avec leſquelles ils auroient quelque rapport, ſans que ces principes néanmoins puſſent contracter entr'eux de liaiſon à cauſe préciſément du phlogiſtique, qui dans cette rencontre, produiſit l'effet qu' on voit arriver ordinairement dans la diſtillation des plantes qui donnent de l' acide, & de l' Alkali volatil? Si on réfléchit ſur la facilité qu' il y a à décompoſer, par la ſeule évaporation lente, le ſoufre dans le foye de ſoufre, & à en retirer du tartre vitriolé, il paroît que cette conjecture n' eſt pas entièrément deſtituée de probabilité.

10. Elle se mêloit avec beaucoup d' effervescence, & de chaleur à l' huile de vitriol, & donnoit un peu d' odeur sulphureuse.

11. Elle ne souffroit aucun changement avec l' eau-forte, & exhaloit seulement un peu d' odeur sulphureuse.

12. Avec l' Alkali fixe il se fit un petit mouvement dans la liqueur qui ressembloit à un principe de fermentation, & il s' éleva un peu d' odeur de lessive.

13. Il arriva à-peu-prés la même chose avec l' esprit volatil de Sel ammoniac, & il me parut qu' il émoussoit l' odeur pénétrante qu' il avoit (*c*).

14. Je filtrai le reste de la liqueur, & la fis évaporer; j' en retirai par une dessication totale une croûte séche jaunâtre tirant un peu sur le roux, je crus devoir redissoudre cette substance pour voir, si en lui enlevant la partie plus grasse qu' elle contenoit, elle pourroit se cristalliser, & je vis que la dissolution prenoit une couleur rouge très-belle, & qu' en même-tems, elle laissoit précipiter une matière brûne, laquelle ne s' enflammoit pas comme le soufre, quoiqu'elle en manifesta encore un peu l'odeur; cette dissolution filtrée n' a pas pû se cristalliser, & étant évaporée à siccité me donna de nouveau une petite pellicule qui fermentoit avec l' huile de vitriol, n' étoit point alterée par l' eau-forte, & donnoit avec l'un & l'autre une odeur sulphureuse.

15. J' examinai ce qui étoit resté sur le filtre, & il me parut à la couleur que ce n' étoit qu' une espéce de fleurs de

(*c*) Je dois avertir que le meilleur moyen que j' aye trouvé pour découvrir plus sensiblement l'éxistence de l'acide vitriolique a été celui d'employer la dissolution du Sel marin, ou celle du Sel ammoniac, car quelqu' affoibli qu' il fût par l' eau, ou quelqu' engagée que fut son activité par des substances hétérogènes, les signes en étoient beaucoup plus sensibles dans ces solutions, de ce qu' ils l' étoient avec les alkalis fixes, ou volatils: c' est là une observation qui m' a paru trop intéressante pour négliger d' en rendre compte.

de ſoufre combinées cependant avec beaucoup de matières étrangères. Il eſt toujours certain que ce réſidu contenoit encore du ſoufre, ce qu'on (*d*) reconnoiſſoit à ſa couleur un peu jaunâtre, & à des pointes bleuâtres qui en éxhaloient l'odeur, lorſque je le faiſois chauffer, juſqu'à brûler le filtre; de même qu'à la propriété qu'il avoit de ſurnager l'eau dans laquelle on le mettoit; de ne ſouffrir aucune altération étant mêlé à l'eau-forte, quoiqu'il fît effervefcence avec l'huile de vitriol; ce qui me porte à croire que le Sel qui ſe ſublime, ſouffre, par cette opération, une eſpéce de décompoſition, en ce qu'une partie de l'acide ſulphureux ſe détache de l'Alkali fixe, avec lequel il avoit contracté une union ſuffiſante à le volatiliſer, & qu'avant cette altération ce composé étoit une eſpéce de Sel ſulphureux de Stahl, qui ne diffère de celui qu'on fait à feu ouvert, que parce qu'il contient une plus grande quantité de phlogiſtique; car, certainement, il n'en paſſe pas autant dans la liqueur du récipient, & il n'en reſte pas, outre cela, une auſſi grande quantité dans la tête-morte, qu'il s'en diſſipe par la combuſtion à l'air libre; nous verrons, en effet, que la liqueur paſſée dans le récipient étoit ſenſiblement acide, il eſt vrai qu'elle manifeſtoit une odeur ſulphureuſe, lors qu'on la mêloit à l'huile de vitriol; mais j'ai lieu de penſer que cette odeur eſt produite par une eſpéce de déſunion qui ſe fait d'une partie du phlogiſtique du ſoufre, lorſqu'il eſt combiné avec l'Alkali fixe, de manière, qu'un peu d'acide vitriolique ſe convertit en eſprit ſulphureux, & qu'étant délayé

dans

(*d*) Les fleurs de ſoufre qu'on fait avec le Sel polichreſte ne devroient-elles pas plutôt leur blancheur à une petite quantité de ce Sel, que le ſoufre enléve dans ſa ſublimation, qu'à l'atténuation que le Soufre ſubit dans ſes parties par l'intermède de ce Sel?

N'en ſeroit-il pas de même du Magiſtère par une raiſon opposée?

dans plus ou moins d' eau, approche plus de l' odeur du Soufre brûlant, ou de celle du foye de ſoufre.

16. Pour s'en convaincre, il n' y a qu' à mettre un charbon ardent dans l'huile de vitriol, il s' élévera d' abord des vapeurs ſulphureuſes volatiles; qu'on diminue la force de ces vapeurs par l' addition de l' eau, on trouvera que ces vapeurs s' affoibliſſent, à meſure que l' eau eſt en plus grande quantité, au point de changer cette odeur, en une odeur très-approchante, ſi elle n' eſt pas, tout-à-fait, la même que celle du foye de Soufre (*e*).

17. Dans la tête-morte enfin, il ſe trouve trés-peu de phlogiſtique, eû égard à l' acide & à l' Alkali fixe; car on verra qu' on obtient, par la lixiviation, filtration & évaporation, un Sel luiſant, pendant qu' il ne reſte que très-peu de matière ſur le filtre, laquelle ne s' enflamme point: il eſt vrai que cette ſubſtance ſaline n' en eſt pas totalement délivrée; car, ſans cela, il devroit réſulter un Tartre vitriolé; mais je crois que c' eſt auſſi un Sel ſulphureux, qui approche plus du Tartre vitriolé commun, en ce qu' il contient moins de phlogiſtique, que celui qui ſe volatiliſe, & qui, probablement, ne doit ſa volatilité, qu' à la grande quantité de phlogiſtique, à la quelle il eſt uni, le Sel de Tartre étant une des matières les plus fixes.

18. C' eſt encore ici un exemple de la volatilité que peuvent acquérir les Alkalis fixes, par l'addition du phlogiſtique; nous nommerons le premier, Sel volatil, & le

 ſecond

(*e*) La petite quantité de phlogiſtique qui ſe trouve combinée avec un acide vitriolique affoibli par beaucoup d'eau, eſt la cauſe de cette odeur fœtide; ce qui a été très-bien prouvé par *M. Hoffmann pag.* 110. *T.* 2. or, dans l' addition qu' on fait de l' huile de vitriol au Sel en queſtion, on combine l' acide vitriolique au phlogiſtique ſurabondant du Sel, d' où il doit néceſſairement ſe manifeſter l' odeur des œufs pourris.

ſecond Sel fixe ſulphureux (*f*). La liqueur qui paſſa dans le récipient, étoit un peu trouble, & avoit une odeur ſingulière, étant mêlée à l' huile de vitriol; elle s' échauffa conſidérablement, & développa une forte odeur de Soufre brûlant; avec l' eau-forte, elle donna des fumées dont on ne pouvoit pas diſtinguer la couleur, mais qui ſentoient l' odeur de celles de l' eſprit de nitre fumant: elle fit efferveſcence avec l' Alkali fixe, de même qu' avec l' Alkali volatil. Le Caput mortuum étoit une ſubſtance compacte blanche, tirant ſur le gris à ſa partie ſupérieure; gris brun à la ſurface inférieure, avec une partie très-blanche au centre; j' en eſſayai un peu, comme j' ai fait ci-devant, & il me réſulta ce qui ſuit; ſavoir.

19. Il fit une grande efferveſcence avec les acides, ſe couvrit d' une matière onctueuſe; prit une couleur brûne avec l' huile de vitriol, laiteuſe avec l' eau-forte, ne manifeſta aucun changement avec l' Alkali fixe & volatil: il ſe fit au ſurplus un précipité, dans chacun de ces mêlanges. Ce précipité étoit tanné dans l' acide vitriolique, verd-clair dans l' eau-forte, tanné plus clair dans l' Alkali fixe, & preſque noir dans l' Alkali volatil.

20. J' ai diſſous le reſte, je l' ai filtré, & fait évaporer juſqu' à ſiccité, & il ſe forma une croûte épaiſſe, criſtalline & aſſez ferme, qui avoit une ſaveur onctueuſe piquante, amere, & ſentoit un peu l' odeur d' œufs pourris, moins cependant, de ce qu' elle le ſentoit, avant que la diſſolution fût filtrée: c' eſt-là le Sel dont nous avons parlé ci-devant §. 17.

21.

(*f*) J' ai dit un exemple de la volatilité qu' acquièrent les alkalis fixes, par l' addition du phlogiſtique, pour m' exprimer ſelon l'acception commune; car j' aurai occaſion de faire voir, dans la ſuite, qu' elle doit être attribuée, en grande partie, à l'aſſociation qui s'eſt faite de quelque peu d' acide, de manière, qu' on doit regarder ces produits comme des compoſés d'acide, de matières inflammables, & d'une ſubſtance fixe, au moïen de l' eau.

21. Il resta sur le filtre une matière grise sans saveur, & sans odeur, qui ne brûloit point, étant mise sur les charbons ardents, mais qui y prenoit, seulement, une couleur blanche; elle fermentoit beaucoup avec les acides, & manifestoit une forte odeur sulphureuse avec l' huile de vitriol; ayant ensuite mèlé la combinaison de ce résidu avec l'eau-forte, dans celle faite avec l' huile de vitriol, il s' est élevé une quantité de vapeurs si prodigieuse, qu' il paroissoit que le mélange dut s' enflammer; j' y projettai des charbons en feu, & les vapeurs s' éleverent avec une force surprenante; elles étoient d' une couleur jaune très-vive, & répandoient une violente odeur d' esprit de nitre fumant, mêlée d' esprit sulphureux: le reste de la liqueur, qui ne s' étoit pas dissipée, continua à répandre des vapeurs jaunes rougeâtres pendant plus de 24 heures que je le gardai, elles ressembloient parfaitement à celles de l' esprit de nitre fumant, & n' avoient plus rien de sulphureux; d' où l' on voit que l' affinité de l' acide vitriolique avec la matière inflammable, se montre encore supérieure, dans cette occasion à celle des autres acides.

22. Le Célébre STAHL a été le premier, qui ait donné ce procédé, pour décomposer le soufre, & pour faire du tartre vitriolé; mais c' est toujours par le concours de l'air libre, que se faisoit cette opération; personne, que je sache, n' ayant crû, jusqu' à présent, qu' elle put réüssir à vaisseaux clos; on peut consulter à ce sujet les Savantes notes que l' Illustre M. BARON a faites sur LEMERY: (*g*) & c' est de cette différence, que nous devons déduire celles de nos résultats; car le phlogistique, ne pouvant se dissiper, se combine, en partie, avec l' acide qui se détache

l 2 du

(*g*) V. Cours de Chymie &c. par *M. Lemery* nouvelle édition revüë cor. & augm. d' un grand nombre des notes &c. par *M. Baron* 1757. pag. 465.

du Soufre, & qui eſt alors délayé dans beaucoup d'eau; pendant que le reſte, qui eſt la partie la plus conſidérable, ſe joint au Sel de tartre avec un peu d' acide vitriolique; d' où il réſulte un Sel volatil ſulphureux, qui contient une plus grande quantité de phlogiſtique, que la tête-morte (*h*).

23. Le foye de Soufre fait avec la Chaux-vive, & diſſous dans l' eau, donna de même une matière ſublimée au Chapiteau, & au Col du matras; elle étoit encore plus blanche, & en plus grande quantité, que celle du foye de Soufre fait avec l' Alkali fixe, & avoit une apparence criſtalline un peu terne; elle étoit onctueuſe, & il me l'a fallu diſſoudre dans l' eau pour l' en retirer; rien ne ſurnageoit dans cette diſſolution, ſeulement après quelque tems qu' elle fut repoſée, il ſe fit un precipitè blanc, un peu verdâtre; j' ajoûtai de nouvelle eau, & il ſe diſſout encore une partie du precipité: la liqueur parut toujours un peu trouble.

J' en pris une partie, comme j' avois fait pour le foye de Soufre, & la mêlai avec les acides, & les Alkalis.

24. Mêlée à l' acide vitriolique, elle s' échauffa, fit une violente effervescence, & donna une odeur de Soufre brûlant. Avec l' eau-forte elle s' échauffa un peu, répandit des vapeurs; mais ne donna aucun ſigne ſenſible d' effervescence.

25.

(*h*) Ces Sels me paroiſſent être les mêmes que le Sel neutre que *M. Seypius* a obſervé dans les eaux minérales. Il le reconnoît de même nature que le Sel ſulphureux de Stahl dont il ne différe, que parce qu'il ne ſe laiſſe pas décompoſer par les acides nitreux & marin, & il en conclud qu'il ne doit cela, qu' à ce qu'il eſt moins volatil; je crois de même que le Sel du caput mortuum n'eſt qu' un tartre vitriolé altéré par un peu de phlogiſtique, & peut-être, ſurchargé d' acides, ce qui empêcheroit d' autant plus la criſtalliſation de ces Sels; comme le remarque *M. Junclker*.

25. Avec l' Alkali fixe il s' éleva des bulles d' air; je ne négligerai pas de faire observer ici, que dans le mélange de la dissolution avec l' huile de vitriol, il se fit un précipité brun, qui s'élevoit en petits filamens aux côtés du verre: il ne paroissoit qu' un peu de poussière très-fine, & très-blanche dans celui de l' eau-forte: celui de l' Alkali fixe étoit plus considérable, de même que celui de l' Alkali volatil, avec la différence, que ce dernier étoit d' un verd un peu plus foncé.

26. Je crus devoir ajoûter de nouvelle eau dans le reste de la dissolution, pour voir si le nouveau précipité n'étoit point faute de dissolvant; mais, quoiqu' il se mêla à l' eau dans le tems de l' addition, ce précipité reparoissoit néanmoins, à-peu-près en même quantité, après que j' avois laissé reposer la dissolution; je la filtrai enfin, je la fis évaporer jusqu' à siccité, & j' en retirai une substance qui adhéroit considérablement à la Terrine; ce n' étoit qu' une croûte bien mince d' une couleur fauve; elle répandoit un peu de fumée, étant exposée au feu, s' y noircissoit, sans s' enflammer, & sans donner d' odeur sulphureuse bien sensible.

27. Elle fermentoit puissamment avec les acides, & manifestoit avec eux une forte odeur sulphureuse.

28. Il se faisoit aussi un peu de mouvement en la mêlant à l'Alkali fixe, & volatil. Voici encore un autre exemple de la volatilisation d'une matière très-fixe. Dépend-elle du phlogistique, de manière que par son moïen, la matière fixe change de nature, & prenne un caractère volatil? Ou bien existeroit-il des parties volatiles par elles-mêmes dans la Chaux, mais dont la propriété seroit suspenduë, par une combinaison toute particulière, qui seroit détruite par l'addition de l' eau? C'est ici le sentiment du Célébre M. Hoffmann que nous aurons occasion de discuter dans la suite.

29.

29. La liqueur, qui passa dans le récipient, étoit claire; ne donnoit aucune odeur, & ne faisoit sentir aucune saveur, étant mise sur la langue.

Elle fermentoit avec violence, étant mêlée aux acides, & développoit avec eux une puissante odeur sulphureuse.

30. Elle excitoit aussi un mouvement en la mêlant aux Alkalis; mais, ce mouvement paroissoit plutôt de fermentation.

31. La tête-morte étoit une substance boursoufflée; grise, tirant sur le noir dans sa partie supérieure, blanche dans le centre de la masse, & un peu noirâtre au fond, elle étoit grasse au toûcher, soit dans sa partie grise, soit dans celle qui étoit parfaitement blanche; & se réduisoit avec toute la facilité en une poussière très-fine, qui s' attachoit aux doigts: son odeur approchoit de celle du foye de Soûfre, son goût étoit un peu amer, & sembloit tenir comme un glû à la langue. Je l' ai dissoute dans beaucoup d' eau, & après l' avoir filtrée, je l' ai fait évaporer.

32. Lorsque la dissolution fut, environ, à moitié évaporée, il se forma à la surface une forte pellicule, sans qu' il se précipita rien au fond; ce qui me fit penser qu' elle pourroit bien se cristalliser: mais ce fut inutilement que je l' exposai, pendant une nuit, au froid; je pris donc le parti de l' évaporer à siccité.

33. J' en retirai, par ce moïen, une croûte saline d'un goût salé & amer, avant qu' elle fut entièrement dessé-chée; mais lors qu' elle fut réduite à une entière dessication, elle ressembloit assez, au goût, à du Sel commun, à la seule différence près, qu' elle étoit un peu moins salée, que n' est le Sel marin, & un peu onctueuse, laissant quelque trace d' une matière terreuse grasse brûlée par l' acide vitriolique; ayant ensuite pris ce qui étoit resté sur le filtre, & l' ayant mis dans l' eau boüillante, que j' ajoûtois à chaque fois

fois que je filtrois la dissolution qui s'étoit faite, je mis toutes ces dissolutions sur la croûte saline, dont je viens de parler, & j'en eus, par l'évaporation, une croûte qui, du blanc, avoit passé au jaunâtre, d'un goût fade, & ayant la consistence d'une terre.

34. Cette substance dissoute dans l'eau, fait beaucoup d'effervescence avec l'huile de vitriol, donne une grande odeur sulphureuse, prend une couleur laiteuse, au moment du mélange, s'éclaircit, & se fait un précipité blanc, & une écume grasse à la surface de la liqueur.

Après qu'on a versé une certaine quantité d'eau-forte l'effervescence se manifeste avec des fumées blanches, & après quelque tems, il se fait un petit précipité.

35. Il se fait un peu de mouvement avec l'Alkali fixe, il se forme ensuite un coagulum blanc, qui nage dans la liqueur devenuë laiteuse, avec un petit précipité roux jaunâtre.

On voit le même mouvement avec l'Alkali volatil, la liqueur prenant une couleur rousseâtre; après être reposée, on ne sent plus d'odeur urineuse, il se fait une précipité brun; & on voit une tranche, à la surface de la liqueur, qui ressemble à une huile.

36. Ce qui est resté sur le filtre étoit une matière grise foncée, qui perdoit un peu de sa couleur, étant desséchée, pour l'en enlever, l'ayant mise sur une poële de fer à un feu violent, jusqu'à faire rougir à blanc la poële, elle a commencé par prendre une couleur jaune sans fumée, ni odeur & elle devint ensuite blanche.

37. Je pris une partie de ce résidu que j'avois fait dessécher sur le filtre, & je l'ai soûmis aux expériences ordinaires.

Il fit une violente effervescence avec les acides, & il manifesta une puissante odeur sulphureuse volatile avec l'huile de vitriol, & une très-forte odeur d'esprit de nitre fumant

fumant avec l'eau-forte; dans le premier, une écume surnageoit la liqueur que j'avois étenduë dans l'eau, & l'on voyoit des petites particules qui s'y soûtenoient, il se fit au surplus, un précipité gris-brun; dans le second on découvroit de même cette écume grasse, qui adhéroit aux parois du verre, & il n'y avoit point de précipité sensible.

38. Dans les Alkalis, il parut se faire un petit mouvement, & il se fit, sur tout dans l'Alkali fixe, une précipitation, à ce que j'ai pû conjécturer, presqu' entière de ce résidu, lequel prit une couleur obscure.

39. Ce même résidu, calciné, donna les mêmes signes d'effervescence avec les acides, & de mouvement avec les Alkalis; mais avec plus de force, de même que pour les odeurs qu'il développa dans le mélange des acides: cette écume se montra aussi avec l'huile de vitriol, mais elle n'étoit pas en si grande quantité, & le précipité en fut plus abondant, plus clair, & moins léger; rien ne se soûtenant dans l'eau; dans l'eau-forte, il ne se fit point d'écume.

40. Avec les Alkalis, il se fit une précipité très-abondant, mais plus clair que celui dont nous avons parlé ci-devant.

41. Je réïtérai cette expérience, en mettant 24. parties de Chaux sur une de Soufre, & j'observai que la matière sublimée au Chapiteau, & au Col de la cucurbite, étoit très-blanche & luisante, sans le moindre vestige de jaune; on y découvroit même des cristallisations en assez grande quantité; mais elles étoient tellement entrelacées les unes dans les autres, qu'on ne pouvoit pas distinguer la figure; cette matière étoit néaumoins très-grasse, & la partie, qui adhéroit au verre ne pût être enlevée, qu'en la dissolvant dans l'eau: j'en mis un peu de celle que j'avois détachée avec le pinceau sur les charbons ardents, & je vis qu'elle se boursouffloit comme fait l'alun, pendant

qu'elle

qu' elle donnoit des fumées qui sentoient le Soufre; je dissous le reste; & je mêlai de cette dissolution dans l'huile de vitriol, l'eau-forte, l'Alkali fixe, & l'Alkali volatil; je remarquai, outre les effets dont nous avons parlé ci-devant, §. 23. 24. 25. qu' elle manifestoit l' odeur de foye de Soufre avec l' huile de vitriol, une odeur sulphureuse avec l' eau forte; qu' elle se troubloit, devenoit laiteuse, & formoit une espéce de coagulum, éxhalant une puissante odeur de lessive, après s' être reposée, avec l'Alkali fixe: par l'évaporation du reste de cette dissolution filtrée, je retirai une substance grasse, amere, un peu salée, laissant une impression terreuse sur la langue, elle étoit par écailles comme la crême de Chaux desséchée, ce Sel manifestoit une forte odeur de Soufre brûlant avec les acides, & faisoit effervescence avec eux; il ne faisoit voir, au reste, aucun mouvement avec les Alkalis, & développoit l' odeur urineuse volatil du Sel ammoniac.

42. Je saturai d' acide vitriolique le peu qui me restoit de ce Sel, je l' étendis dans l'eau, & après l'avoir filtré & évaporé, j'en eus un Sel blanc fait, à-peu-près, comme le précédent qui ressembloit à un Sel sélénitique, mais dont le goût âpre & stiptique approchoit beaucoup de l' alun. Je tentai de le faire cristalliser par l' addition d' une lessive, mais je n' en retirai qu' une substance qu' il fallut dessécher, & qui ressembloit à des coquilles d' œufs pilées, & dont la saveur étoit extrêmément stiptique, & laissoit ensuite un impression terreuse sur la langue.

43. Les résultats des expériences faites sur la liqueur ont été les mêmes, que ceux dont j' ai parlé §. 29. 30.

44. La tête-morte ne différoit de la précédente §. 31. qu' en ce qu' elle paroissoit plus légere, & plus brûne à sa surface. Je trouvai

Qu' elle faisoit une forte effervescence avec l' acide vitriolique, & qu' il s' éxhaloit une forte odeur d' acide vi-

triolique sulphureux. Avec l'eau-forte, elle fit aussi beaucoup d'effervescence, & manifesta une forte odeur, telle que celle que donne l'esprit de Nitre fumant.

45. Avec l'huile de tartre, on voyoit un petit mouvement qui partoit de la Chaux, pour se rendre à la surface de la liqueur; & je crois être fondé à penser, que ce mouvement étoit produit par l'air, qui se développoit de la Chaux: mêlée enfin à l'eau, elle faisoit effervescence comme la poudre de la Chaux, &, à-peu-près, comme la *creta bathensis*.

46. Ayant mis le résidu qui étoit sur le filtre, & qui y étoit en assez grande quantité, dans un creuset sur le feu, je remarquai des petits points de flamme bleuâtre, qui indiquoient qu'il contenoit encore un peu de Soufre, quoiqu'en petite quantité; il apparoissoit ensuite des petites étincelles de feu, comme si elles eussent été de poudre de charbon: après un feu très-vif, cette terre qui étoit grisâtre, devint beaucoup plus claire; elle ne se dissolvoit qu'en très-petite quantité dans l'eau: il se fit un précipité considérable d'une terre très-fine, & très-blanche, d'ailleurs, insipide, & inodore: ce résidu mêlé à l'huile de tartre développa une odeur urineuse, pendant qu'il en donnoit une de lessive, lors qu'il n'étoit point calciné.

EXPE-

Combinaison de la Chaux avec le foye de Soufre décomposé par l'addition de l'acide vitriolique.

47. JE mêlai du Soufre avec du Sel de potasse, & je noyai ce mélange dans l'huile de tartre où j'avois mis la Chaux; lorsque ce mélange se fut reposé, je le saturai d'acide vitriolique, pour faciliter le dégagement du Soufre, & le soûmis à la distillation au bain de sable; le feu étant très-vif du commencement, il se fit néanmoins une séparation des substances, selon leur différente gravité spécifique; mais la liqueur qui se montroit rouge dans le matras monta claire, & après elle, il passa un peu de Soufre dans le bec du Chapiteau: lorsqu'il ne parut plus d'humidité, je poussai le feu jusqu'à faire rougir le sable, & il se sublima dans le Chapiteau des taches blanches en petite quantité; voyant, enfin, que la tête-morte avoit une apparence vitreuse brûne, je laissai refroidir le matras; l'ayant ensuite décoëffé, il s'éleva une violente exhalaison de vapeurs volatiles qui a une odeur urineuse, celle-ci étoit encore plus développée dans la matière saline du Chapiteau.

48. La liqueur, qui étoit passée dans le recipient, étoit un peu laiteuse, & n'avoit point d'odeur. Mêlée à l'acide vitriolique, elle ne fermenta point, & développa seulement un peu d'odeur sulphureuse; avec l'acide nitreux, elle produisit le même effet.

49. Mêlée à l'Alkali fixe, il me parut qu'elle avoit développé quelque peu d'odeur urineuse. Mêlée enfin, à une dissolution de Sel volatil concret dans l'huile de tartre, mélange qui ne donnoit plus qu'une foible odeur urineuse, elle se renouvella avec beaucoup de force.

50. Le soupçon que j'avois formé, que cette liqueur pût contenir du Sel ammoniac, me fit penser à la mêler

à l' eau-forte, pour en faire une eau régale; je mis de l'or dans la liqueur, elle l' a entièrement dissous (*i*).

51. En considérant les résultats de toutes ces expériences, il paroît qu' on peut conclure que le Soufre a changé quant à ses propriétés principales, & que l' association de la Chaux, & des Alkalis fixes le rend susceptible de plusieurs modifications, & d'une décomposition dans ses principes qui ne peut se faire d'ailleurs, que par la combustion à l'air libre; mais comme les substances, qui se mêloient, & se noyoient dans l' eau qui passoit dans le récipient, & celles qui se sublimoient dans le Chapiteau, où, qui s' élevoient dans le col, étoient en trop petite quantité pour en déterminer par des expériences éxactes la nature, & pour en déduire en conséquence les altérations arrivées au Soufre; j' ai pris le parti de saturer de Soufre une quantité déterminée

(*i*) *M. du Hamel* a observé p. 76. mém. de l'Acad. R. des Sciences an. 1747. un phénomène qui a beaucoup de rapport à celui-ci, & par lequel il paroît que l' esprit de nitre se régalise en passant sur la Chaux, ce qui avoit été dit par *Beker*, nous renvoyons à ces deux Auteurs ceux qui voudroient examiner le fondement de leur opinion, & nous nous contenterons d'avancer quelques réflexions qui y ont rapport.
M. Malouin dans son mémoire sur la Chaux dit pag. 95. d'en avoir tiré une liqueur de la nature de l' esprit de Sel commun &c.
On sait qu' en ne saturant pas les terres absorbantes d' acide marin, on obtient un Sel qui a les propriétés des Alkalis fixes.
On sait que le sang contient du Sel marin dénaturé par l' action des esprits vitaux.
M. Baumé dit avoir fait un Sel alkali artificiel, en saturant de la Chaux avec du phlogistique. Man. de Chimie pag. 74.
Ne pourroit-on pas soupçonner que par cette opération, on ne fit par une route inconnuë, que la combinaison de l' acide marin à la terre, dans le rapport qui est nécessaire pour former la substance saline dont nous avons parlé, qui a les propriétés de l'alkali fixe? ce seroit l'effet d' une décomposition, & récomposition, ou, au moins celui d'une surcomposition dont nous avons tant d'exemples.
Je n' oublierai pas de rapporter ici un phénomène qui semble prouver l'éxistence de l'acide marin dans la Chaux; c' est qu' en dissolvant de la Chaux dans une forte dissolution de Sel de glauber, il m' est résulté, par la filtration & évaporation, un Sel crystallisé comme le Sel d' Ebsom.

minée de Chaux, & d' Alkali fixe pour en éxaminer les produits.

52. Je pris pour cela de la Chaux ſulphurée, ou le caput mortuum d' une diſtillation de la Chaux faite avec le Soufre; le rapport de ces matières étoit de 16: 1. Sur deux onces de ce caput mortuum, je mis un gros de Soufre, ayant ſoin de bien mêler les matières, & de les incorporer par le ſecours de l' eau, je fis diſtiller ce mélange dans une cucurbite de terre à feu nud, ayant la precaution de n' augmenter conſidérablement le feu, que lorſqu' il ne ſe ſublimoit plus rien dans le Chapiteau, & je l' y ſoûtins ainſi pendant une heure; je laiſſai refroidir la cucurbite, j' en retirai la tête-morte qui étoit devenuë encore plus griſe, & plus légere; je la mêlai à un autre gros de Soufre, & la ſoûmis de nouveau à la diſtillation, remettant le même Chapiteau, & tel que je l' avois retiré de la diſtillation précédente, je mis à part l' eau que j' en avois retirée, & je rëitérai ſix fois le même procédé, en pouſſant le feu à la dernière violence la ſeptième fois.

53. Je vis à chaque fois ſe ſublimer une matière blanche comme celle dont j'ai parlé §. 23. elle péſoit 36. grains, & à la ſixiéme ſublimation la matière du Chapiteau devint jaune pâle en dedans, pendant qu'elle reſta blanche contre le verre.

54. La premiére liqueur qui paſſa dans le récipient, le rapport de la Chaux au Soufre étant de 10: 1., étoit un peu laiteuſe, elle avoit une odeur d' œufs pourris.

Mêlée à l' huile de vitriol, elle s' échauffa, fit efferveſcence & prit l' odeur de Soufre brûlant, en donnant des vapeurs blanches.

Je ne remarquai aucun mouvement avec l'eau-forte, ſeulement elle s' y mêloit comme fait le ſirop dans l' eau.

55. Il me parut entrevoir un peu de mouvement par l' addition de l' Alkali fixe, & il s' éléva une odeur de leſſive.

Cette

Cette liqueur étoit, d'ailleurs, si foible, que les seuls signes de l'huile de vitriol ont été manifestés.

56. La seconde liqueur étoit limpide, & sentoit un peu l'empireume.

Elle ne fit aucune effervescence avec les acides; elle donna seulement des fumées rousses & épaisses avec l'huile de vitriol, & une odeur de Soufre brûlant aromatique avec tous les deux; on doit encore observer, que l'huile de vitriol se précipitoit, & ce n'étoit, qu'en agitant les liqueurs, qu'elles se mêloient, faisoient paroître les fumées, & l'odeur en question.

Elle fit effervescence avec l'Alkali fixe, & diminua l'odeur urineuse avec l'Alkali volatil que je lui rendis, par l'addition du Sel de Potasse.

57. La troisiéme étoit aussi claire, sentant de même l'empireume, & donnant les mêmes résultats.

58. La quatriéme étoit aussi claire à la surface, on voyoit nager une liqueur qui paroissoit huileuse, elle sentit l'odeur d'esprit de nitre dulcifié, & produisit les mêmes effets que ci-devant.

59. La cinquiéme étoit claire, une huile verte sembloit nager à la surface, son odeur étoit sulphureuse très-volatile & très-pénétrante.

Mêlée à l'huile de vitriol, elle prit une odeur aromatique que l'Alkali fixe lui enlevoit, & elle suivit en tout, ce que nous avons vû ci-devant.

60. La sixiéme étoit, à-peu-près, comme la précédente, & donna les mêmes résultats; mais on voyoit un sédiment considérable d'un blanc jaunâtre.

61. La tête-morte dans les premiers procédés étoit bleuâtre; mais cette couleur se changeoit à chaque fois, & devenoit plus blanche, jusqu'à ce qu'elle passa au blanc sale à la sixiéme reprise; & elle ressembloit, pour lors, un mortier dont on fait les revêtemens, & sentoit

l'odeur de la Chaux, à laquelle on mêle la colle, & le gypse pour blanchir les murailles, elle étoit insipide, & pesoit onc. 2. $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$

62. La Chaux a donc augmenté son poids de $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ car je n'en avois employé que onc. 2. & , en ajoûtant les gr. 36. de la matière qui s'est sublimée, il manque encore $\frac{3}{8}$ au poids total, puisque j'avois fait l'addition de $\frac{6}{8}$ de soufre : or, il faut que ces $\frac{3}{8}$ soient passés avec l'eau dans les récipients; mais comme les liqueurs étoient sensiblement acides, & que dans les dernières, l'acide sulphureux volatile étoit manifesté & développé; il suit, qu'il doit avoir passé dans les récipients gr. 200. d'acide libre, étant, d'ailleurs, probable que le phlogistique se soit combiné (*k*) avec les parties de la Chaux, dont gr. 36. ont été sublimés à la voûte du Chapiteau: il est vrai que dans la sixiéme opération, il se sublima un peu de Soufre, sans avoir souffert aucun changement, autant du moins, que j'en ai pû juger par la seule inspéction; & quoique la quantité ne fut pas considérable, elle a, néanmoins, concouru aux gr. 36., & c'est cette partie que nous verrons qui ne s'est point dissoute dans l'eau.

63. Je pris la substance qui s'étoit sublimée, & qui n'étoit plus si grasse, qu'elle étoit, à la première & à la seconde sublimation; je la mis dans l'eau froide, elle se soûtint

(*k*) A la sixiéme reprise une partie du Soufre se sublima sans se décomposer, & c'est cette partie qui ne pût pas se dissoudre, & dont nous parlerons plus bas; le reste n'étoit, je crois, que des parties de Chaux combinées avec le phlogistique qui a abandonné l'acide vitriolique, ce qui doit revenir environ à gr. 9., savoir au quart du poids total.

soûtint à la surface pendant quelque temps; mais petit-à-petit, il se fit un précipité blanc, le peu qui surnageoit demeurant jaune; j' en mis un peu sur le feu & il s' enflamma comme le Soufre. Les premières sublimations cependant en contenoient très-peu; car cette matière étoit toute dissoluble dans l' eau, quoiqu' elle fut fort grasse, & qu' elle contint par conséquent beaucoup de phlogistique. Je crois néanmoins que dans l' un & dans l' autre, il se trouve encore du véritable Soufre; mais il n' est pas moins vrai, que la Chaux se volatilise avec lui, & qu' elle en décompose la plus grande partie: or il est probable que, pendant que la Chaux agit sur une partie du phlogistique du Soufre, & qu' elle en dégage l' acide, il y a des parties de cette Chaux, qui sont volatilisées, par l' aggrégation du phlogistique du Soufre, qui a été décomposé.

64. Ces observations servent à appuyer l' opinion de quelques Physiciens, qui prétendent que la cohésion des parties des corps dépend de la matière inflammable: M. STAHL a démontré qu' elle se rencontre dans les trois Regnes, & qu' elle n' y diffère, que par la quantité; or, cela posé, en raprochant des faits qui nous montrent que par une calcination suivie, & violente, ou par d' autres opérations réitérés, on peut dépoüiller les corps du principe qui servoit à les caractériser, sans qu' on puisse les récomposer par l' addition du phlogistique, il paroît naturel de conclure, qu' il n' est pas le principe qui constitue toutes les propriétés des corps, comme quelques Chimistes l'ont crû.

65. Quoique les expériences, que j' ai rapportées, prouvent que la Chaux décompose le Soufre, en attaquant la partie phlogistique, il est pourtant vrai aussi qu'on n' en retire environ que la moitié en acide sulphureux, en y comprenant une partie qui se sépare par la sublimation; il nous reste donc encore à examiner, si le Soufre restant, ne se trouve dans la Chaux, que comme un simple aggrégé, ou

ou bien s' il s' est combiné avec elle d' une manière plus intime; ce qui me porte à être plutôt de cette opinion, c' est que j' ai toujours fait rougir les cucurbites de terre dont je me suis servi dans ces dernières expériences, en employant un feu de bois très-vif & continué pendant long-tems, après toute distillation, & toute sublimation finie: or il paroit que par cette opération, le Soufre auroit dû reparoître, s'il avoit encore été uni à son phlogistique; mais je présume que ce phlogistique s' est combiné avec la Chaux d' une manière assez forte, pour ne plus être sujet à l' action de l' acide vitriolique, qui, à son tour, est puissament retenu par la Chaux comme le prouve M. HOFFMANN.

66. Pour déterminer plus exactement si le Soufre qui reste dans la Chaux, n' est plus sous la forme de Soufre, je fis les expériences suivantes.

Je mis la tête-morte §. 61. dans six livres d'eau, il s'en est dissout environ trois gros; je la filtrai, & ayant divisé cette dissolution, je mis du Sel de potasse dans une partie, elle devint d' un jaune clair, il ne se fit point du tout d' effervescence, & il parut seulement un peu de précipité; mais comme je n' ai eû aucune marque qui m' indiqua le point de saturation, je ne sais pas si ce peu de precipitè n' a point été produit par de l' Alkali surabondant; ce qui me paroit d' ailleurs très-probable. Il s' éleva nénamoins à la surface de la liqueur une substance blanche qui ressembloit à de la graisse figée, & qui, peu-à-peu, s' est précipité. (J' avois vû la même chose dans le mélange du foye de Soufre à la Chaux: toutes les fois que j' ajoûtois du Sel de potasse, le mélange alors sembloit même se gonfler, & il en sortoit une grande quantité de bulles d'air) mais revenons à l' expérience; je décantai la liqueur, & la fis évaporer au bain de sable, ce qui me fournit un Sel gras fait, à-peu-près, comme celui du §. 42. mais sentant

l' odeur d'urine évaporée sans aucune différence, son goût étoit fort acide étant bien desséché, (*l*) amer, un peu stiptique, & laissoit une impression onctueuse sur la langue, d' ailleurs très-avide de l' humidité.

67. Ce qui étoit sur le filtre desséché à l' air, étoit comme du limon, il se pétrissoit avec l' eau; mais il se fendoit au feu, il exhaloit un peu d' odeur de Soufre brûlant, & il paroissoit altéré par un autre odeur qui ressembloit à du Camphre; il ne donnoit point de flamme, son poids ne fut pas sensiblement diminué, il devint très-blanc & approchoit beaucoup de la craye friable.

68. Je mis le reste de la dissolution dans un alembic de verre, & après la distillation finie, je trouvai une croûte grise claire, dont le centre étoit roux noirâtre. Je ne pus détacher cette partie, tant elle adhéroit au verre; je pris le parti de la dissoudre dans l'eau, pour la remettre à évaporer jusqu' à siccité, sans pousser le feu sur la fin (comme j' avois fait dans la distillation, pour voir s' il ne se sublimoit rien au Chapiteau,) & j' eus encore une crasse rousse qui sentoit la graisse brûlée, & très-adhérente à la capsule; dans le milieu, on remarquoit une tache qui ne ressembloit pas mal à une pierre, dont on tire le gypse, qui est un peu argentine; j' eus beaucoup de difficulté à la détacher, & elle ressembloit éxactement à la poussière par sa couleur.

J' en mis une prise sur un fer rouge, elle y jetta beaucoup de fumées d'une odeur de graisse brûlée, & y prit la couleur du charbon; l'ayant mise dans l' eau elle parut s'y dissoudre, mais elle se précipita en entier, autant que j'en pû juger lorsqu'elle fut bien reposée.

69.

(*l*) Tout le monde sait, que de la combinaison de la Chaux avec un Alkali fixe il résulte le caustique potentiel dont se servent les Chirurgiens celui-ci cependant diféroit de la pierre à cautére, en ce qu'il étoit très-blanc.

69. En considérant maintenant tous ces résultats, nous commençons par reconnoître une décomposition du Soufre, dont une grande partie de l' acide se convertit en esprit sulphureux. 2.° Qu' une partie, & probablement la plus grande du phlogistique qui entroit dans la formation du Soufre, s' unit à des parties de la Chaux, & se volatilise. 3.° Que les Sels qui resultent ainsi de la combinaison de l'acide vitriolique avec la Chaux, sont très-dissolubles dans l' eau, propriété contraire à la nature des sélénites, qui sont les Sels résultants de l' union de cet acide avec les terres calcaires; soit que ces Sels soient naturels, soit qu'ils soient le produit de l' art. 4.° Qu' on peut obtenir une liqueur, & même du Sel volatil urineux, phénomène cependant déja connu, & qu' on trouve dans plusieurs Auteurs. 5.° Que la Chaux perd par ce moïen toutes ses propriétés, & qu' il reste une partie qui est très-difficile à se dissoudre dans l'eau; il y a apparence que c' est la partie qui, étant saturée d'acide vitriolique, ne contient point de phlogistique.

70. C' est de l'union du phlogistique, que nous devons déduire cette plus grande dissolubilité; en ce que, par son association l'acide s' unit d' une manière moins intime, & moins forte avec la base terreuse, d' où il suit que l' eau a une plus grande action sur ce composé (*m*).

(*m*) Nous ne laisserons pas d'observer aussi qu' il n'en est pas de même, lorsque la matière inflammable est unie en particulier avec une de ces substances, car nous voyons que, lorsqu'elle s' y trouve dans une quantité convenable que nous nommerons saturation; les composés qui résultent ne se dissolvent plus avec la même facilité dans l'eau, ou même point du tout, ce qui paroît une preuve convaincante que c' est de son interposition, qu' on doit déduire la propriété en question.

Il me semble, d'ailleurs, que ceci tient à la théorie de la surabondance d'un des principes qui entre dans la formation d'un composé, d'où il paroît que doit dependre la facilité de leurs décompositions, ou pour prendre la chose plus généralement, du défaut d' un des prin-

71. Cet effet ne doit cependant pas être regardé comme particulier au phlogistique, car je pense qu'un principe qui auroit du rapport avec ceux-là produiroit du plus au moins le même effet.

Je remarquerai de même en passant que cette induction est d'autant plus fondée, qu'on voit que c'est de-là que dépend la dissolubilité du Soufre dans l'eau par l'intermède de l'Alkali fixe.

72. Ne pourroit-on pas aussi penser que la décomposition des corps vient de ce que le dissolvant a une plus grande affinité avec la partie phlogistique du corps dont il est le menstruë, que n'en ont toutes les autres parties intégrantes de ce même corps avec la partie phlogistique ?

Cette conjecture, je l'avoüe, souffre de grandes difficultés; mais elle n'est pas dénuée de probabilité, & elle pourroit être discutée avec plus de fondement autre part: d'ailleurs, elle paroît être le fondement de la théorie des doubles affinités.

73.

cipes, ce qui est d'autant plus sensible, que les corps sont plus composés: dans cette théorie je comprens la volatilité soit naturelle soit artificielle comme le défaut d'un de ces principes, ainsi que nous verrons ailleurs.

Le travail que *M. Roüelle* a fait sur les Sels neutres capables d'une surabondance d'acide semble confirmer ce sentiment; en ce qu'ils m'ont paru plus aîses à décomposer. L'opération du départ par l'eau-forte qui ne peut se faire, que lorsque la quantité de l'argent est au moins triple de celle de l'or.

La décomposition du Borax pour en retirer le Sel sédatif sont des exemples de la surabondance absoluë d'un principe.

La dissolubilité du Soufre dans les huiles tient de même à cette classe; mais nous rapporterons à une classe opposée la dissolubilité du Soufre dans l'eau par l'intermède des Alkalis, & par conséquent, la facilité de sa décomposition, la facilité de la décomposition des Sels sulphureux &c. Ces dernières doivent être considérées produites par le défaut d'acide, de manière que la grande affinité qui se trouve entre cette substance saline, le phlogistique & les alkalis, produit à peu-près le même effet, que celui qui arrive aux Sels composés voyez n. du §. 7.

73. Cette décompoſition du Soufre, quelqu' extraordinaire qu' elle ſoit, eſt pourtant fondée ſur les mêmes principes que celle qui ſe fait par la cloche ; on ſait que l' union du phlogiſtique à l' acide vitriolique ne peut ſe faire, que lorſque celui-ci eſt dans ſon plus grand dégré de concentration, d' où il ſuit qu' il faut rendre à l' acide le phlegme, dont on l' avoit dépoüillé, pour obtenir la décompoſition du Soufre ; & c' eſt ce qui ſe fait dans cette opération, qui ſert de preuve à l' éxactitude de cette théorie, & qui eſt encore confirmée, par ce qu' on ne peut faire cette décompoſition par le moïen de la Chaux ni de l' Alkali fixe ſans le concours de l' eau; c' eſt pour m' aſſûrer de cette vérité, que j' ai fait un mélange de 8. parties de Chaux ſur une de Soufre, & de 8. parties d' Alkali de même ſur une de Soufre ; la Chaux, & l'Alkali étoient ſecs : je mis ces deux mélanges dans deux cucurbites de verre garnies de leurs Chapiteaux, & de leurs récipients bien luttés dans un bain de ſable, ayant eû ſoin de donner au commencement un feu tout-à-fait doux pour en retirer le peu d' humidité, qui ſe trouve toujours dans ces ſubſtances, quelque ſoin qu'on ſe donne pour les avoir ſéches, ſans qu' elle put favoriſer la décompoſition du Soufre, en effet, je retirai quelques gouttes de liqueur dans les deux récipients : celle de la Chaux étoit néanmoins foiblement ſulphureuſe, & celle de l'Alkali fixe avoit une odeur urineuſe trés-dévelopée ; (*n*) lorſque la chaleur commença à être

(*n*) En rapprochant ce que nous avons dit §. 6.18. 46. 49. il eſt aiſé de voir, que les différences des phénomènes dans les réſultats des expériences qui ne différent que par quelques circonſtances, nous conduiſent à des remarques intéreſſantes. Premiérement, nous avons vû que la combinaiſon de 24. parties de Chaux ſur une de Soufre §. 46. a donné à la voûte du Chapiteau un ſublimé que je ſaturai d' acide vitriolique, & que ce qui reſta ſur le filtré étant bien déſſéché, développa une odeur urineuſe dans l' huile de tartre.

2. Que

à être un peu plus grande, il s'éleva une matière blanche dans les deux cucurbites, elle ne fut pas considérable dans le foye de Soufre, mais elle le fut dans le mélange de la Chaux, & il résulta un soufre verd le long des parois de la cucurbite, pendant qu'il n'y avoit qu'une matière à peine colorée dans le Chapiteau.

74. La tête-morte du foye de Soufre pésoit $\frac{2}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$. la liqueur urineuse pésoit environ $\frac{15}{8}$; ce qui manquoit au poids total doit être assigné à ce qui a été sublimé.

On voit cependant que l'union que contracte le Soufre avec l'Alkali fixe est très-considérable, puisqu'il s'en est sublimé une si petite quantité dans laquelle on reconnoit que la plus grande partie, doit être assignée à de l'Alkali fixe qui a été volatilisé.

75. Le caput mortuum de la Chaux pésoit $\frac{2}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}$ le phlegme sulphuré pésoit aussi $\frac{15}{\text{gr.}}$ d'où, il suit que le subli-

mé

2. Que la liqueur du foye de Soufre, combiné avec la Chaux, & décomposé par l'addition de l'huile de vitriol, donna de même des marques sensibles d'esprit volatil §. 49.

3. Que le foye de Soufre mêlé à la Chaux §. 6. donna non seulement de l'esprit; mais un peu de Sel volatil.

4. Que le foye de Soufre sans être dissous §. 73. donna de même de cet esprit, pendant que nous n'avons qu'une liqueur qui sentoit le foye de Soufre dans une pareille combinaison noyée dans l'eau §. 18.

Je ne m'arrêterai pas à des conjéctures vagues, mais je ferai seulement observer que l'odeur volatil urineuse qui s'est manifestée par l'addition de l'Alkali fixe §. 46. & 49. prouve qu'il y étoit enveloppé par un acide; or, la dissolution de l'or arrivée par le mélange de cette liqueur à l'eau-forte, semble prouver la présence de l'acide marin: Je ne veux cependant rien assûrer sur ceci, car n'ayant pas preparé l'eau-forte moi-même, peut-être n'en étoit-elle pas tout-à-fait éxempte.

mé a été de $\frac{57}{gr.}$ l' odeur de ce ſublimé étoit celle d' ail brûlé.

76. Je ne négligerai pas de rendre compte ici d' un phénomène tout-à-fait ſingulier que j' ai obſervé, à l' occaſion où je m' étois propoſé de procéder ſur l' Alkali fixe, comme j' avois fait ſur la Chaux §. 51. c' eſt-à-dire, de chercher à le ſaturer de Soufre; quoique l' opération ait manqué par la rupture du Vaiſſeau, ce qui m' a empêché de faire fond ſur les produits de la ſublimation, & de ce qui étoit paſſé dans les récipiens, la tête-morte néanmoins me fournit des obſervations aſſez intéreſſantes, pour ne pas les paſſer ſous ſilence.

Je pris le caput mortuum de la diſtillation dont nous avons parlè §. 5. & dont le poids étoit de $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}$ j'y ajoûtai $\frac{6}{8}$ de Soufre dans 6. répriſes différentes, ce qui revenoit à $\frac{1}{onc.}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$ La tête-morte ne péſoit néanmoins que $\frac{2}{8}$ elle étoit d' un blanc éclatant, ſa gravité ſpécifique avoit conſidérablement diminué, elle étoit au reſte graſſe au toûcher, ſans gout & ſans odeur, enfin n' ayant aucun caractère de ſubſtance ſaline; j' en mêlai avec les acides, elle ne ſouffrit aucun changement; elle me parut ſe diſſoudre avec facilité dans l' huile de tartre, développant, en même temps, une forte odeur de phoſphore; la liqueur retirée par la diſtillation ſentoit de même cette odeur; mais elle paroiſſoit approcher beaucoup de celle de l' eſprit ſulphureux, & cela eſt aſſez naturel; car la cucurbite étant ſcellée, il ne pouvoit réſulter autre choſe, auſſi étoit-elle très-acide.

J' ai voulu diſſoudre le reſte qui ſe trouvoit être du poids de $\frac{111}{gr.}$ & il m' y a fallu $\frac{48}{onc.}$ d' eau; encore ſont-ils

reſtés

reſtés 3. $\frac{6}{8}$ d'une matière qui ſe précipitoit toujours au fond de l'eau, & en eſt-il reſté environ $\frac{30}{gr.}$ ſur le filtre ce qui revient à $\frac{75}{gr.}$ de matière qui s' eſt diſſoute, je la fis évaporer à un feu très-lent, & j' en obtins un véritable Sel ſulphureux qui s' eſt criſtalliſé en aiguilles fort minces; ce Sel différoit de ceux dont nous avons parlé §. 18 en ce qu' outre à la criſtalliſation, il faiſoit une grande efferveſcence avec l' acide nitreux, pendant qu'on ne voyoit preſque pas de mouvement avec l' huile de vitriol; ce phénomene me parut bien ſingulier, lorſque j' obſervai que très-peu d' eau-forte continuoit à faire efferveſcence avec beaucoup de ce Sel mis à différentes repriſes, & qu' il ſe précipitoit auſſi tôt ſous ſa forme (*o*) criſtalline. Après en avoir mis une quantité conſidérable, voyant que l' efferveſcence ne diſcontinuoit pas, je le fis évaporer juſqu' à ſiccité, je le diſſous enſuite & le mis de nouveau à évaporer, mais lentement, & il ne parut plus de criſtaux, mais une eſpéce de boüillie que j' eus beaucoup de peine à déſſécher. Je mis ce Sel ſur les charbons en feu, & il y eut très-peu de déflagration; il reſta une matière très-blanche, farineuſe qui reſſembloit aſſez à la Chaux lavée, par ce que je pus en juger à la ſeule inſpection.

77. Après avoir traité le Soufre avec la Chaux, la première idée qui me vint dans l' eſprit, fut de voir ſi, en la mêlant aux huiles, il ſe feroit un déchet conſidérable, & ce que je pourrois obſerver dans la Chaux même.

Je

(*o*) Ce phénomène eſt tout à-fait digne d'obſervation, l'efferveſcence n'avoit lieu qu'à la ſurface de l'eau-forte, le Sel ſe faiſoit par grumeaux, de blanc il devenoit jaune, & ſe précipitoit enſuite au fond. Les vapeurs qui en exhaloient étoient celles de l'eſprit de nitre; le Sel réſultant étoit pour la plus grande partie le même qu'auparavant; il y avoit néanmoins un peu du ſalpêtre.

Je pris à cet effet onc. 2 de Chaux-vive pilée, je la mêlai à $\frac{1}{onc.}$ de charbon pilé & passé par un tamis très-serré, je mis sur ce mélange $\frac{7}{8}$ d' huile d' olive, & après avoir mêlé exactement le tout je le mis dans une cucurbite de grés garnie d' un Chapiteau de verre bien lutté & avec son récipient à feu nud: je retirai d' abord une liqueur rougeâtre, ensuite un huile claire un peu empireumatique, & en troisième lieu une huile jaune tout figée comme l' huile commune est en hiver, elle sentoit fort l' empireume & restoit adhérante pour la plus grande partie aux parois du récipient, je filtrai la liqueur, & l' huile claire passa avec la première elles pésoient $\frac{3}{8}$; ayant ensuite rincé le récipient. Je trouvai que l' huile figée pésoit un demi gros, ce qu' ajoûté à $\frac{1}{8}$ pour celui qui étoit resté sur le filtre & aux $\frac{3}{8}$ des liqueurs filtrées, nous donne; $\frac{4}{8}$ $\frac{1}{2}$ donc il est resté $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ qui n' ont pas passé en liqueur malgré la vivacité du feu, mais une partie, il y a apparence, s' est sublimée avec les parties de Chaux dont le Chapiteau étoit couvert, sauf à la voûte tout-à-fait.

78. Le deux liqueurs mêlées ensemble à l' huile de vitriol ne donnerent aucun signe de changement; elles procurérent des fumées blanches d' une odeur aromatique dans l' eau-forte; elles firent un peu d' effervescence avec l'Alkali fixe & rougîrent le papier bleu, ce qui prouve que la première étoit sensiblement acide.

79. Ce qui s' étoit sublimé étant d' une couleur rousse, & sentant l' odeur d' ail brûlé. Je cherchai à le détacher du verre pour l' avoir sous une forme concrête, mais il

ne me fut pas possible, tant la matière étoit grasse. Je pris le parti de la dissoudre dans l' eau, persuadé que ce devoit être une espéce de savon volatilisé par la violence du feu, elle s' est en effet entièrement dissoûte, je tentai cependant en vain d' en séparer l' huile par le moïen de l'acide vitriolique, il se fit par ce moïen un précipité très-léger & par floccons.

80. Le caput mortuum étoit jaunâtre farineux sous poudré d' un peu de charbon au centre de la surface supérieure, je l' arrosai d' eau sans qu' il y ait eû la moindre effervescence, & je vis se former comme des graisses qui ne ressembloient pas mal à de l' huile noire empireumatique qu' on tire de la suye, & comme le melange étoit trop liquide, j' ajoûtai $\frac{4}{8}$ de charbon ce qui endurcit aussi-tôt la matière; je la détrempai avec de nouvelle eau la pétrissant, & la soûmis à une nouvelle distillation.

81. Je retirai une liqueur claire un peu onctueuse qui ne faisoit aucune effervescence avec les acides, en faisoit sensiblement avec l' Alkali fixe & rougissoit un peu les bords du papier bleu; son odeur étoit celle du noir de fumée. Il se sublima une bande très-blanche au Chapiteau. Cette liqueur acidule & ce sublimé me firent naître la pensée de cohober de nouvelle eau le caput mortuum, & de voir ce que j' en aurois; je disposai l' appareil, & ayant mis le même Chapiteau sans récipient, l' évaporation qui se fit pendant la nuit enleva tout le sublimé; je fis néanmoins la distillation, & l' eau que j' en retirai quoique ayant la même odeur que la précédente ne donna aucun signe d' acide ni d' Alkali, il se forma cependant un nouveau sublimé qui ressembloit aux fumées que laisse la bonne poudre à canon sur la batterie des mousquets.

82. Pour m' assûrer si ces sublimés dépendent du phlogistique qui entre dans ces combinaisons, ou si en effet ce

sont

ſont des parties volatiles qui exiſtent dans la Chaux, je mêlai encore $\frac{4}{8}$ de charbon à cette tête-morte délayée dans l'eau & en même-tems je mis $\frac{2}{\text{onc.}}$ de charbon dans une autre cucurbite & $\frac{2}{\text{onc.}}$ de Chaux dans une troiſième pour être aſſûré des mes réſultats; il paroît même que j'aurois dû commencer par-là; ſi en effet je n'avois pas regardé ceci comme un acceſſoire, ſans doute c'eut été ma marche; mais venons au fait: l'eau qui paſſa étoit rouſſeâtre onctueuſe & ſentoit l'odeur de la fumée du bois, d'ailleurs elle ne donna aucun ſigne d'acidité, il me parut à la verité qu'elle faiſoit quelque mouvement avec les acides, & que le papier bleu perdit quelque nuance de ſa couleur. Ce qui ſe ſublima au Chapiteau étoit ſi peu de choſe qu'il étoit à peine ſenſible.

83. La tête-morte étoit une matière farineuſe un peu jaunâtre, on n'y voyoit plus de veſtige de charbon quoique j'en euſſe mis un poids égal à celui de la Chaux ſans tenir compte de l'huile; ſon poids n'ètoit plus que d' $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$. Nous avons rémarqué §. 77. que la tête-morte après la première diſtillation devoit avoir augmenté de $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ le poids de la Chaux employée qui étoit de $\frac{2}{\text{onc.}}$; or il faut de toute néceſſité qu'il ſe ſoit volatiliſé $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ gros, de ces ſubſtances par l'intermède de l'eau; il me paroît naturel d'aſſigner cet effet à l'eau (*p*) car nous voyons,

 qu'elle

(*p*) C'eſt ici le dénoüement du doute propoſé §. 28.

qu' elle étoit toujours chargée de couleur ; la premiere sur tout donnoit des marques sensibles d' un Sel acide : une partie doit donc avoir été confonduë ou dissoûte par l'eau même, l' autre qui sans doûte n' étoit pas la moins considérable est celle qui s' est sublimée au Chapiteau les trois premières fois sur tout.

Cette volatilisation de la Chaux ne me paroît pas néanmoins l' effet de l'art, & semble nous convaincre que l' eau seulement est le véhicule propre à dégager ces parties, qui existent telles dans la Chaux, sans que le phlogistique concoure à cet effet, si ce n' est qu' en s' engageant à la Chaux, l' eau qui est dans les corps dont il arrive la décomposition, par sa privation, puisse alors opérer (*q*) cette séparation des principes fixes, & volatils de la Chaux; en effet nous voyons que la quantité de matière qui se sublime va toujours en diminuant, qu' elle continuë à se faire sans addition de phlogistique, & par le seul intermède de la nouvelle eau qu' on ajoûte.

84. Je crois de pouvoir me dispenser d' examiner ce qui regarde les Sels nitreux avec la Chaux; ce sujet ayant été traitè avec plus d' étenduë par des Savans du premier ordre (*r*) sous un point de vüe, exige un temps plus long que celui que je pourrois y donner pour le présent. Il me suffit de rendre compte ici, que nou seulement le nitre

(*q*) Les résultats dont nous avons rendu compte §. 81. 82. semblent nous prouver qu'il arrive le changement en question ; car quelque soin que je me fusse donné pour priver la Chaux, & l'Alkali fixe de toute humidité, il est néanmoins passé un peu de liqueur, & il s'est formé à la voûte du Chapiteau un peu de sublimé blanc qui avoit les caractères de ceux dont nous avons parlé §. 8. & 23. la petite quantité cependant de ces produits nous a encore fait connoître que ce n' est qu'à la favèur de l'eau que le Soufre peut être décomposé.

(*r*) Outre les observations de *M. Du-Hamel*, on trouve dans le recüeil des ouvrages de *M. Pott* un excellent mémoire dans lequel il rectifie bien des choses, qui avoient été avancées par d' autres Savans.

nitre calcaire est moins inflammable que le salpêtre commun, mais que la Chaux sulphurée ne fait point détonner ce Sel, & que la poudre à canon dissoûte dans une eau de Chaux, cohobée plusieurs fois sur de nouvelle Chaux, perd beaucoup de son inflammabilité.

Le travail que l' Illustre M. Du-Hamel a fait sur la Chaux, & sur le Sel ammoniac a jetté un si grand jour sur cette matière, qu' il ne reste plus que quelques expériences à faire, & dont il en a tenté quelques unes lui-même.

85. Celle qui paroît être la plus naturelle, & en même temps décisive est sans doute celle, par laquelle il s' étoit proposé de faire du Sel volatil en chargeant la Chaux de phlogistique; mais comme je n' ai pas vû la suite du travail dans laquelle il se propose la résolution de ce problême, j' ai cherché s' il étoit possible de réussir par un (t) procédé différent de celui dont le Savant M. Baume a fait usage. Ce procédé quelqu' ingénieux, & quelqu' élégant qu' il soit, me paroît néanmoins souffrir des difficultés pour la résolution du problême en question: ceci ne doit cependant diminuer en rien le mérite du travail

(s) Comme il n' est pas possible de se procurer tous les éclaircissemens nécessaires pour développer les causes qui produisent, ou qui concourent à un effet dans un sujet quel conque, sans chercher à déterminer s'il n' est produit que dans un cas particulier, où si c' est une loi constante dans des circonstances déterminées (ce qui emporte la nécessité de comparer le plus grand nombre de résultats qu' il est possible, & qu' on obtient des variations de quelque circonstance que l' on tâche de se ménager) on ne sera pas surpris si, m'étant proposé l'examen de quelques phénomènes qui résultent de l'action de la Chaux sur le Sel ammoniac, je donne une quantité d' expériences où la Chaux n'y entre pas, & qui ne doivent servir qu' à me faciliter le developpement de l' objet que je me suis proposé. Je ne crois cependant pas de devoir négliger quelques observations, & quelques réflexions qui se présentent naturellement dans le cours de ces expériences, & je me fais un plaisir de reconnoître que ce travail ne doit être regardé, dans cette partie, que comme une suite de celui du Savant *M. Du Hamel.*

travail de M. BAUME'; car il est en effet parvenu à faire non seulement du Sel volatil en employant la Chaux pour intermède, mais il a encore tellement dénaturé la Chaux, qu' il dit lui-même l' avoir convertie en Alkali fixe; d' ailleurs son but n' a pas été d' examiner, si ce Sel volatil étoit produit entièrement par la décomposition du Sel ammoniac, ou s' il ne s' en trouvoit pas une partie, qui fut produite par la matière animale avec laquelle il avoit phlogistiqué la Chaux; (t) mais ce fut pour réfuter un problême proposé dans le journal de Médecine en Octobre 1762. dans lequel il est annoncé qu' on peut obtenir par le moien de la Chaux-vive pure, l' Alkali volatil du Sel ammoniac sous la forme fluide ou concrête, à la volonté de l' artiste: on voit que c' en étoit assez pour démontrer l' *insubsistance* de l' énoncé du problême; mais en est il de même pour la résolution du problême proposé par le Savant M. DU-HAMEL? Je crois qu' elle suffit pour démontrer, que tant que la Chaux ne change pas sa nature, elle ne peut donner de Sel volatil.

86. Voici les difficultés qui me paroissent encore subsister dans leur entier.

Primo. La Chaux chargée d' une matière qui contienne du phlogistique, & dans laquelle on ne puisse soupçonner rien

(t) On pourroit objecter que par la violence du feu qui est necessaire pour cette opération, l' Alkali volatil auroit dû se dissiper; mais il me paroît qu' on ne seroit pas bien fondé à penser ainsi; car l' Alkali volatil n' existant pas par lui-même dans ces matières, & n' étant qu' une production de l' art, il est naturel de croire que la Chaux qui est capable de le retenir avec tant de force dans la combinaison qu' on fait de cette substance avec le Sel ammoniac, doit de même empêcher la dissipation qui s' en feroit en se combinant avec le Sel ammoniacal dont cet Alkali fait partie: il est vrai qu'on pourroit même nier la présence ou la formation de ce Sel ammoniacal, comme n' étant pas démontrée, si l'on réfléchit cependant sur les produits de l' analyse du sang, on verra que la chose n' est pas tout-à-fait hors de vraisemblance.

rien de volatil, donne-t-elle du Sel volatil avec le Sel ammoniac ?

Secundo. L'esprit volatil fait par la Chaux-vive, ou par les Chaux métalliques n'enleve-t-il rien de l'intermède ?

87. Voici les expériences que j'ai faites sur ce sujet: je commencerai par celles qui se rapportent à la première question.

Je mêlai aussi exactement qu'il me fut possible deux parties de charbon végétal sur une de Chaux, & j'en fis une pâte avec de l'huile d'olive, je la mis dans un creuset au feu, que je fis rougir à blanc aprésque l'huile fut toute brûlée & réduite en charbon; je retirai alors cette Chaux, & la pêtris avec de nouvelle huile, rémettant ce mélange dans un creuset au feu, je réiterai enfin trois fois cette opération.

88. La Chaux ainsi chargée des matières grasses, & exposée à un très-grand feu soûtenu pendant long tems se réduit en une poussière brûne sèche qui ne fait plus d'effervescence avec l'eau; j'en pris $\frac{9}{8}$ que je mêlai avec $\frac{3}{8}$ de Sel ammoniac dans une cucurbite de verre sur un bain de sable; je commençai par un feu doux que j'ai poussé ensuite jusqu'à faire rougir le fond de la cucurbite: il passa un peu de liqueur foiblement urineuse dans le récipient, & le Sel ammoniac s'éléva le long des parois du verre, sans qu'il se soit fait le moindre atôme de Sel volatil: je décoëfai l'alembic, & je mis $\frac{9}{8}$ d'eau de pluïe ayant soin de faire dissoudre autant qu'il m'étoit possible le Sel qui s'étoit élevé, mais comme il en étoit passé dans le récipient même, & qu'il en étoit resté dans le bec du Chapiteau, je ne crois pas que la quantité dis-

soûte

ſoûte par l'eau put arriver à $\frac{2}{8}$; je commençai de même par un feu tout-à-fait doux, & lorſque la diſtillation fut achevée, je pouſſai le feu à la dernière violence & il ſe ſublima ſur la fin une petite quantité de matières blanches, qui s'eſt néanmoins réſoûte en liqueur en continuant l'opération; le Chapiteau ne ſentoit pas d'odeur urineuſe & tenoit plutôt une foible odeur de foye de Souffre, ce qui s'accorde parfaitement bien avec les expériences de M. MALOUIN; la liqueur étoit du véritable eſprit de Sel ammoniac qui tenoit cependant en diſſolution une certaine quantité du même Sel, ſavoir celui qui avoit paſſé dans le récipient à la première diſtillation, & ce qui m'a prouvé que ce n'étoit point un Sel volatil ce ſont les vapeurs blanches qui éxhaloient du mélange de cette liqueur avec les acides vitrioliques & nitreux dans le temps de l'effervеſcence; phénomène cependant qui n'a pas lieu lorſqu'on mêle à ces acides un eſprit de Sel ammoniac tiré de la Chaux qui ſoit exactement pur: (*u*) une autre indice qui a ſervi encore à me confirmer dans ce ſentiment, c'eſt le mouvement qui s'eſt excité dans cette liqueur par le mélange d'un peu de Sel de tartre, ce qui a augmenté conſidérablement la force de cet eſprit.

Un phénomène cependant tout-à-fait digne de remarque, c'eſt la couleur verte decidée que cet eſprit fait prendre au papier bleu, ce qui paroît encore confirmer ce que nous avons dit à la n. du §. 70.

89.

(*u*) Je dis un eſprit éxactement pur, car il arrive très-ſouvent que par un coup de feu trop vif du commencement de l'opération, d'une proportion peu convenable entre le Sel ammoniac & la Chaux, il paſſe du Sel dans le récipient; auſſi ne ſauroit on aſſez prendre de précautions.

89. N'ayant pû réussir par ce procédé à retirer du Sel volatil, je me doûtai que cela eut pû provenir d'une trop grande quantité de matières grasses dont j'aurois impregnée la Chaux, & comme je n'étois pas dans le cas de chercher par un tâtonnement trop long à déterminer la quantité qui pourroit être nécessaire pour procurer à la Chaux cette propriété étrangère à sa nature ; je me flattai d'y parvenir de même en broyant ensemble du charbon à la Chaux, & en combinant ensuite ce mélange avec un tiers de son poids de Sel ammoniac.

90. Quoique je fusse assûré que le charbon ne peut pas par lui-même décomposer le Sel ammoniac, pour m'en convaincre cependant par l'expérience, je fis aussi un mélange de charbon & de ce Sel dont en effet je ne retirai rien.

Dans la première de ces combinaisons, la Chaux, le charbon & le Sel ammoniac que je mis dans une cucurbite de terre étoient en égale quantité, & il me résulta une liqueur insipide & sentant très-fort l'empireume avec du Sel concrêt à la voûte du Chapiteau, ce Sel n'étoit cependant que des fleurs de Sel ammoniac comme je m'en suis assûré en en mettant dans l'huile de vitriol avec l'huile de tartre, & la Chaux.

La liqueur quoiqu'insipide & sans odeur urineuse donnoit les mêmes signes, de manière que je ne savois si le défaut de saveur & d'odeur urineuse devoit être attribué à la surabondance des matières grasses dont elle avoit les caractères les plus marqués, savoir l'onctuosité, l'odeur très-empireumatique, la couleur rougeâtre, l'odeur sulphureuse qu'elle manifestoit avec l'huile de vitriol ; ou à ce que la plus grande partie du Sel ammoniac fut passée sans se décomposer en forme liquide : ce sentiment me parut le plus probable ; mais avant toutes choses je crus devoir réitérer cette expérience en variant la dose des matières.

91. Je retirai donc d'un mélange d'une partie de Chaux-vive ſur deux de charbon & une de Sel ammoniac une liqueur dont l'odeur approchoit très-fort de la précédente, & le Sel qui s'étoit ſublimé en plus grande quantité avoit un peu d'odeur urineuſe, à-peu-près comme les fleurs ammoniacales métalliques.

92. Je repaſſai une partie de ce Sel ſur deux parties de nouvelle Chaux-vive, mais les produits furent très-peu conſidérables; car ayant employé un gros de ces fleurs, je ne retirai que quelques grains de nouvelles fleurs de Sel ammoniac & quelques goûtes d'eſprit urineux, malgré que j'euſſe fait cette opération à feu nud dans une cucurbite de terre.

93. Quelque ſoin donc que je me ſois donné je n'ai pû parvenir à retirer du Sel volatil de la Chaux chargée de phlogiſtique tiré d'une ſubſtance végétale (*x*).

Je

(*x*) La Chaux ainſi chargée de phlogiſtique & ſaturée enſuite d'acide vitriolique, donne par la diſſolution, filtration & l'évaporation un Sel qui ne m'a pas paru différer de l'alun de plume & qu'on ne doit cependant pas confondre avec l'amiante comme fait *M. Lemery*, celui-ci eſt d'un goût aſtringent un peu douceâtre blanc comme de la neige, forme des végétations en bouquets par une évaporation moïenne, ſe bourſouffle ſur le feu, enfin il a tous les caractères de ce Sel qui eſt fort rare, & qui par-là peut devenir très-commun. Je ne ſache pas que perſonne ait encore donné la manière d'en faire, ni cherché à connoître ce qui entre dans ſa compoſition.

Je décompoſai cet alun par l'addition de l'eſprit volatil dans l'eſpérance de retirer un nitre, fondé ſur les expériences de *M. Vallerius* & de *M. Pietſch*. Le premier diſant qu'il avoit retiré de ce Sel par la combinaiſon de l'acide vitriolique avec l'huile de l'eſprit de vin & le Sel de tartre, & rapportant en même tems que ce dernier en avoit fait avec du vitriol, de l'urine putrefiée & de la Chaux: or comme il ſuivroit de ces expériences que le nitre ne feroit que l'acide vitriolique dénaturé par l'Alkali volatil qui ſe développe par la putréfaction, ou ſelon le premier que ce même acide chargé de matière phlogiſtique eſt combiné à un Alkali fixe; j'ai voulu voir ſi cette combinaiſon m'en fourniroit, mais je n'ai retiré que du Sel ammoniacal ſecret.

Je ne prétends pas dire pour cela que la chose ne soit pas possible ; si le problême de M. BAUME' est soluble dans cette circonstance, on voit qu'il ne rencontre plus de difficultés ; mais la résolution du problême proposé par ce Savant ne seroit-elle pas plus facile, * si on employoit la pierre à Chaux, la craye, ou toute autre substance capable de se convertir en Chaux, mais qui n'eut pas encore souffert l'action du feu, au lieu de se servir de la Chaux-vive ?

Comme c'est une question qui ne peut être décidée que par le fait, je me dispenserai d'exposer les raisons qui me déterminent à penser qu'il y ait un plus grand dégré de probabilité & qui m'ont engagé à proposer cette conjecture.

Les résultats des dernières expériences & les réfléxions que m'ont fourni d'autres qui sont très-connuës sur le Sel ammoniac, conjointement à celles du Savant M. DU-HAMEL, m'ont engagé à en faire de nouvelles dont je vais rendre compte.

Pour plus grande clarté, je commencerai par exposer quelques corollaires que cet Illustre PHYSICIEN a tirés de son travail rempli de sagacité.

„ I.° Toutes les fois que l'urineux ammoniac paroît
„ dans la distillation en forme concrête, c'est qu'il a em-
„ portée avec lui une portion concrête de l'intermède
„ avec lequel on l'a distillé.

„ II.° Toutes les fois qu'on a cet urineux en
„ forme d'esprit, c'est qu'il a passé dans la distillation
„ avec l'eau qui étoit contenuë dans les matières, &
„ qu'au lieu d'être joint à un substance solide qui lui
„ donne du corps, il l'est à un liquide qui le fait pa-
„ roître sous cette forme qui lui est propre.

Après les expériences que nous venons de rapporter, tout cela ne souffre plus de difficulté ; mais pourquoi la

craye passe-t-elle avec l' urineux dans la distillation, & que la Chaux resiste si puissament à ces effets?

94. Il nous est encore moins difficile de répondre à ces difficultés après ce que nous avons dit de la Chaux §. 83.; car nous avons démontré que la partie volatile de cette substance ne peut en être dégagée qu'à la faveur de l'eau qu' on y mèle & dont il est probable, comme nous le verrons dans la suite, que dépend la décomposition du Sel ammoniac; mais comme elle n' est pas en grande quantité, il est naturel de penser que l' eau qui lui sert de véhicule en quelque petite quantité qu'elle soit elle même, peut toujours dissoudre le Sel volatil qui se dégage par ce moïen (*y*).

95. L' éxamen des différences qu'on reconnoît dans plusienrs opérations entre l' esprit volatil tiré par la Chaux & celui que l' on obtient avec les Alkalis fixes, m' avoit fait penser aussi que l'esprit urineux fait avec la Chaux n' emportoit point de son intermède concrêt; je crus cependant devoir m' en assûrer, & je fis dans ce dessein l' expérience suivante.

Je distillai du Sel ammoniac avec de la Chaux éteinte à l' air dans une cucurbite de terre à laquelle j'avois adapté un Chapiteau ouvert à sa partie supérieure, pour qu' il put avoir la communication avec un second Chapiteau de verre que j' avois soigneusement lutté au premier qui étoit de terre garni de son réfrigératoire, au moïen du quel, en remplissant une grande partie de sa cavité, je pouvois mettre du feu autour du second Chapiteau; je décomposai de cette manière l'esprit volatil en trois parties, c'est-à-dire en une liqueur très-limpide qui sentoit un peu l' urineux & qui étoit passée par le bec du premier

Cha-

(*y*) Ceci ne suffit pas encore pour rendre raison de ce fait, mais nous en trouverons le dénoüement par la suite.

Chapiteau. Une couche de terre blanche insipide, sans aucune odeur urineuse & aussi mince qu'une feüille de papier laquelle adhéroit fortement au verre, & formoit comme une zone qui tenoit du rebord du Chapiteau jusqu' au commencement de la voûte. Une seconde liqueur très-rousse & sans odeur qui avoit passé par le bec du second récipient.

96. La première qui étoit limpide ne paroissoit pas augmenter son odeur urineuse par l'addition de l'Alkali fixe, au contraire la seconde développoit cette odeur avec beaucoup de force en y mêlant du Sel de tartre ou de la Chaux.

97. La matière blanche dont je viens de parler ne me paroît être autre chose que la partie terreuse du Sel séléniтique de la Chaux qui n'est que la crême de la Chaux même, laquelle est la véritable partie volatile dont nous avons parlé; en effet, j'en ai retiré du Sel sélénitique en y ajoûtant un peu d'huile de vitriol affoibli par beaucoup d'eau, & il s'est même reproduit une croûte cristalline un peu opaque & assez semblable à la crême de Chaux à la surface de la liqueur; l'odeur fort-urineuse qui se développa de la seconde liqueur par le mélange de la Chaux ou de l'Alkali fixe, semble nous prouver la présence d'un acide qui formoit un Sel ammoniacal; & je pense que c'est le même qui étoit auparavant engagé à la terre en question, & qui formoit avec elle la sélénite; pour me convaincre de la verité de cette opinion, je fis une distillation d'une partie de Sel ammoniac sur deux parties de crême & d'eau de Chaux que j'avois fait évaporer à siccité, mais n'ayant obtenu qu'une très-petite quantité de liqueur urineuse le Sel ammoniac s'étant sublimé, je decoëffai l'alembic, & je mis une quantité assez considérable d'eau, ayant eû soin de dissoudre autant qu'il m'étoit possible le Sel ammoniac; j'en fis ensuite

suite la distillation, & j' obtins une liqueur foiblement urineuse, un Sel par floccons à l' orifice de la cucurbite & au bord du Chapiteau; ce Sel me parut ne souffrir aucune altération de la part de l' eau-forte, quoiqu' il fît effervescence avec l'huile de vitriol; il ne m' a pas été possible de bien constater si ce Sel étoit réellement un Sel ammoniacal vitriolique, je suis cependant très-porté à le croire tel; la tête-morte étoit d' ailleurs un Sel ammoniac fixe très-déliquescent qui se boursouffloit & qui se fondoit au feu en répandant des vapeurs fort épaisses.

98. Cette expérience m' engagea naturellement à examiner ce qui résulte du mélange du Sel ammoniac avec la Chaux bien lavée; je pris pour cela une quantité de Chaux éteinte, je la lavai douze fois dans de l' eau toujours nouvelle & toujours boüillante, je la fis ensuite dessécher sur un support de mouffle & j' en mêlai $\frac{3}{\text{onc.}}$ avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac; je retirai par la distillation environ $\frac{3}{8}$ d' esprit volatil, & il se sublima à la voûte un Sel très-blanc qui avoit de l' odeur urineuse; comme il y en avoit cependant très-peu, je ne pus pas m' assûrer s' il ne se trouvoit pas encore un peu de Sel ammoniac avec l' Alkali urineux: ce qui cependant m' a donné lieu de former ce doûte, c' est la grande quantité de vapeurs blanches & ambrées qu' il répandit en y mêlant de l'huile de vitriol; M. Du-Hamel pourtant qui avoit déja fait cette expérience avec quelque changement dans les circonstances, dit que le peu de Sel qu' il en retira étoit de l' Alkali volatil; ce qui suffit pour tenir en suspend mon jugement sur une expérience que je n' ai pû répéter & qui doit être faite plus en grand. Je me contenterai pour le présent de faire remarquer que la tête-morte avoit été fonduë; sa couleur étoit d' un roux clair comme

sont

ſont les briques avant d' avoir ſouffert l' action du feu; ſa ſaveur étoit un peu douceâtre & avoit quelque peu d'aſtringent; elle attiroit l' humidité à-peu-près comme le Sel marin qu'on fait avec la craye, mais beaucoup moins que le Sel ammoniac fixe.

99. Ayant reconnu que dans toutes les décompoſitions du Sel ammoniac pour en tirer l' urineux volatil, il ſe fait un enlévement d' une partie de l' intermède concrêt; je me déterminai à reprendre mon travail de plus loin, en commençant par l' éxamen des effets qui arrivent au Sel ammoniac ſans intermède par le feu différement adminiſtré, & enſuite par ceux que préſente la combinaiſon de ce Sel avec d' autres matières.

EXPÉRIENCE PREMIÈRE.

Diſtillation du Sel ammoniac à feu nud.

Sel ammoniac fluor.

100 UNE once $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac en gâteau dans une cucurbite de terre, garnie d'un Chapiteau de verre, me donna à un feu d'abord aſſez vif $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}$ de liqueur teinte un peu en jaune, foiblement ſalée & amère, développant ſur la langue un goût lixiviel qui dégéneroit en un goût urineux: ſon odeur étoit un peu empireumatique, elle donna des vapeurs blanches & épaiſſes en grande quantité avec l' huile de vitriol, s' échauffa & boüillonna conſidérablement; elle manifeſta une forte odeur urineuſe avec la Chaux-vive en quelque petite quantité que je l' euſſe miſe, pendant qu'il falloit beaucoup d'Alkali fixe pour lui faire développer foiblement cette odeur.

Il

Il est clair que cette liqueur n' est (z) que du Sel ammoniac dissoût dans beaucoup d' eau.

II. I.

(z) Je voulus m' assûrer si cette résolution en liqueur dépendoit de ce que le phlogistique eut abandonné cette partie du Sel pour s' unir plus intimément à la partie du Sel ammoniac qui ne passe pas en liqueur, ou si c' étoit seulement à cause de la surabondance de l'eau dont ce Sel est chargé; j' en mis à cet effet $\frac{7}{8}$ avec $\frac{1}{onc.}$ de noir de fumée, & j'en fis la distillation au bain de sable. Il me vint premièrement une liqueur un peu opaque qui donnoit quelques fumées avec l' huile de vitriol, & ne donnoit d' autre odeur avec la Chaux & l' Alkali fixe que l' empireumatique qu' elle avoit naturellement; il se forma ensuite une petite quantité d'une substance blanche qui ressembloit assez à du Sel ammoniac & qui fut détruite par une huile jaune très-empireumatique qui s' éleva après & qui passa dans le récipient: comme j' ai fait cette opération au bain de sable, je n'ai pas pû pousser la tête-morte à un feu suffisant pour décider si après l' huile noire *je* n' obtiendrois pas du véritable Sel ammoniac: mais comme d' autre part l' Alkali volatil qui se trouve dans le noir de fumée pouvoit causer des altérations à ce produit, je crus inutile de pousser plus loin l' opération, d'autant plus que ces premiers résultats suffisoient pour me faire connoître que la surabondance d' eau est la cause principale de la liquidité du Sel ammoniac dans le procédé dont nous avons rendu compte; que ce Sel ammoniac fluor n'est cependant plus aussi chargé de matière phlogistique que lorsqu' il est sous la forme concrête; & cela me paroît d'autant plus sûr que les fleurs de Sel ammoniac qui se subliment, après que la liqueur est entierément passée, sont d'une couleur jaune très-foncée, & les dernières même sont rouges.

II.ᵉ EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac au bain de ſable.

Fleurs de Sel ammoniac.

101. JE fis en même tems cette opération dans une cucurbite de verre au bain de ſable, ayant pris la précaution de bien étendre le Sel ammoniac en lui faiſant occuper tout le fond de la cucurbite, mais je ne retirai que 5 à 6 goûtes de liqueur laquelle étoit conſidérablement urineuſe; le reſte du Sel ſe ſublima, n' étant reſté au fond du vaiſſeau qu' un peu de matière noire; je remarquai cependant que cette ſublimation peut être diviſée en trois parties; la première qui ſe fait à un feu tout-à-fait moderé, & les fleurs en ſont blanches; la ſeconde qui éxige un plus grand dégré de feu, & elle ſe fait principalement au parois de la cucurbite, y adhére fortement & paroît preſque avoir ſouffert la fuſion; la troiſième qui n' a lieu qu' après un dégré de chaleur beaucoup plus grand & long-tems continué; on obtient par celle-ci des fleurs d' un jaune très-foncé.

Nous déduirons de ces deux expériences. I.° Que toutes les fois que le Sel ammoniac entre en fuſion avant que de ſe ſublimer, il doit paſſer pour la plus grande partie en liqueur.

2.° Que la différence dans l' adminiſtration du feu, ſoit par rapport à ſa vivacité & ſa force abſoluë, que rélativement aux Vaiſſaux dont on fait uſage pour les opérations, apporte une différence totale dans les réſultats.

III.e EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac, qui n'a pas paſſé en liqueur dans la première expérience, avec la Chaux-vive.

Eſprit volatil cauſtique ; Sel ſublimé très-blanc.

102. SUR ce qui eſt reſté dans la cucurbite de la première expérience §. 100. je mis environ deux onces de Chaux-vive, & après avoir lutté le Chapiteau & le récipient, j'en fis la diſtillation dont je retirai un peu plus de $\frac{3}{8}$ d'eſprit très-pénétrant, & d'une couleur jaune, avec quelques grains d'un ſublimé très-blanc. La tête-morte avoit une ſaveur très-picquante, elle étoit d'une couleur rouſſeâtre & avoit été fonduë.

103. Le réſultat dont je viens de rendre compte, m'engagea à éxaminer ſi en enlevant ſeulement au Sel ammoniac une partie de l'eau qu'il rétient toujours en grande quantité, on peut parvenir à le décompoſer, & ſous quelle forme l'Alkali volatil ſe préſente.

Nous remarquerons en attendant. I.° Que le Sel ammoniac, qui ne ſouffre aucune décompoſition avec la Chaux-vive comme l'a très-bien obſervé le Savant M. Du-Hamel, peut cependant être décompoſé, au moins en partie, lorſqu'il eſt ainſi privé d'une grande partie de ſon eau. 2.° Qu'on doit néceſſairement convenir qu'il emporte des parties de l'intermède fixe ce qui confirme ce que j'ai dit dans les §§. précédents.

IV.e EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac légerement calciné avec la Chaux-vive.

Esprit volatil caustique sublimé en efflorescence sentant l'urineux.

104. SUR cette idée je pris $\frac{1}{onc.}\ \frac{1}{2}$ de Sel ammoniac en gâteau, & l'ayant mis dans un creuset au au feu, je le réduisis à $\frac{1}{onc.}\ \frac{2}{8}\ \frac{1}{2}$ & le mêlai à $\frac{3}{onc.}$ de de Chaux-vive que je fis encore dessécher à un feu violent, (*aa*) j'obtins par la distillation environ $\frac{6}{8}$ de liqueur d'une force extrêmément pénétrante & d'une couleur jaune semblable à celle que l'on retire par les substances métalliques. On voyoit au surplus dans la cucurbite & dans le Chapiteau une espéce d'efflorescence terne & acide qui sentoit un peu l'urineux en la passant entre les doigts. La tête-morte pésoit $\frac{3}{onc.}\ \frac{4}{8}\ \frac{24}{gr.}$, elle étoit spongieuse paroissant comme criblée, rousseâtre, très-picquante attirant beaucoup l'humidité, elle sembloit au reste avoir été fonduë de même que la cucurbite. (*)

(*aa*) Quoique la Chaux n'eut pas encore attiré l'humidité de l'air, & que j'eusse eû la précaution de choisir une grosse masse dont j'avois ôté une couche assez considérable. Je crûs devoir lui faire essuïer cette opération pour être toujours plus assûré du fait.

(*) Cette expérience découle naturellement de la précedente & lui sert de confirmation.

V.e EXPÉRIENCE.

Répétition de la précédente avec du Sel ammoniac privé d' une plus grande quantité d' eau.

105. CEtte singulière décomposition me porta à chercher, si en calcinant davantage le Sel ammoniac, je pourrois obtenir du Sel volatil au lieu d' esprit.

Je réduisis à cet effet $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de ce Sel à $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$, je le mêlai avec trois onces de Chaux-vive qui avoit été exposée à un grand feu pendant plus d' une heure; j' obtins par la distillation de ce mélange près de $\frac{4}{8}$ d' esprit urineux très-pénétrant & d' une couleur jaune comme le précédent avec des taches blanches comme celles dont j' ai parlé précédement; & quoiqu' elles fussent en plus grande quantité, je n' en pus pas recüeillir assez pour les éxaminer.

VI.e EXPÉRIENCE.

Addition de l' eau enlevée au Sel ammoniac par la calcination.

Esprit volatil.

106. JE voulus au reste voir si en rendant à la tête-morte & à cette substance blanche la quantité d' eau à-peu-près que j' avois enlevée au Sel ammoniac, je retirerois encore une quantité considérable d' esprit volatil, ou au moins toute l' eau que j' ajoûtois, & comme je ne doûtois pas qu' il ne se fut dissipé de l' Alkali volatil & de l' acide marin dans la calcination, j' ai crû

ne

ne devoir employer qu' une plus petite quantité d' eau, c' est pourquoi je n' en mis que $\frac{2}{8}$, & après avoir scellé avec soin les vaisseaux, j'en fis la distillation en commençant par un feu doux & le poussant sur la fin jusqu' à faire fondre la partie inférieure de la cucurbite, mais je ne retirai plus qu' $\frac{1}{8}$ d' esprit.

Voici un résultat tout-à-fait singulier; nous avons observé §. 102. que la quantité d' esprit dans cette expérience étoit un peu plus grande que celle du Sel ammoniac qui restoit dans la tête-morte de l' expérience §. 100., & qu' au surplus il se sublima quelques grains d' une matière blanche; nous voyons par celle-ci que bien loin d'excéder la quantité d' eau nouvellement ajoûtée, nous n' en avons pû retirer que la moitié; mais il est bon d' observer que malgré que le fond de ma cucurbite ait été fondu, le dégré de feu néanmoins n'aura pas été aussi considérable que celui qu' a souffert l'autre cucurbite qui étoit de terre, & à feu nud.

Quant à l' augmentation du poids, elle doit être attribuée aux parties de Chaux qui ont été enlevées dans l'opération ce qui ne paroit pas avoir besoin de plus grande démonstration, les résultats des expériences dont j' ai rendu compte ci-devant me paroissant plus que suffisantes pour nous convaincre de cette verité.

VII.

VII.e EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac avec le Sel ammoniac fixe.

Esprit volatil sublimé très-blanc.

107. JE fus curieux d' observer ce que le Sel ammoniac fixe donneroit avec du nouveau Sel ammoniac.

Je mêlai à cette fin $\frac{4}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ du Sel ammoniac fixe résultant des expériences 104. & 105 avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac sans être privé d' eau, & j' obtins environ $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ d' esprit urineux $\frac{1}{8}$ d' un sublimé très-blanc, & $\frac{16}{\text{gr.}}$ d' une matière de même sublimée qui étoit extrêmément grasse & qui adhéroit très-fort au verre, l' ayant détachée avec un pinceau, elle étoit d' un gris cendré; étant brûlée sur du papier à la chandelle, elle donna un couleur verte à la flamme; son goût étoit très-salé, & très-picquant sur la langue, moins cependant que celle du sublimé blanc qui communiquoit de même la couleur verte à la flamme. La tête-morte pésoit $\frac{4}{\text{onc.}}$ & un peu plus de $\frac{4}{8}$ elle attiroit très-fort l' humidité, sa couleur étoit rousseâtre, sa saveur étoit (*bb*) brûlante, sa texture enfin friable entre les doigts; son poids ne fut pas considérablement augmenté.

108. Mon plan étant celui de rapprocher les différens phénomènes que présentent les décompositions du Sel ammoniac faites par différens intermèdes, je ne saurois négliger

(*bb*) Cette substance me paroît devoir être mise au nombre des caustiques plus puissants.

gliger de rendre compte de ce que j' ai obſervé de plus remarquable dans la répétition que j' aì faite des opérations d'ailleurs trés-connuës.

VIII.^e EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec la grenaille de plomb.

Eſprit volatil cauſtique.

Plomb corné.

JE pris $\frac{2}{onc.}$ de plomb grenaillé que je mis dans une cucurbite de verre avec $\frac{6}{8}$ de Sel ammoniac: le feu fut administré dans le commencement avec beaucoup de précaution, pour que le Sel ammoniac ne ſe ſublima point, & fut pouſſé ſur la fin avec beaucoup de vivacité, de manière que le fond de la cucurbite s'étoit preſque fondu.

Il paſſa dans le récipient un eſprit jaune dès-plus pénétrants & dont la force étoit encore augmentée par l'addition du Sel de tartre, ce qui me fit conjecturer qu' il étoit paſſé un peu de Sel ammoniac fluor avec l' eſprit urineux; j' en fus d' autant plus convainçu que cet eſprit faiſoit une violente efferveſcence & s'échauffoit très-fort pas le mélange de l' huile de vitriol, répandant dans ce tems beaucoup de vapeurs blanches qui avoient une forte odeur d'eſprit de Sel; il ſe ſublima enſuite des fleurs de Sel ammoniac d' un jaune foncé qui contenoient un peu de plomb: les deux tiers environ de la téte-morte étoient convertis en plomb corné, & ce plomb corné en occupoit la partie ſupérieure, & adhéroit comme des ſcories à la partie inférieure qui étoit formée par le plomb qui avoit été fondu & que l'acide n' avoit point attaquée.

IX.^e

IX.e EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac avec le plomb & la Chaux-vive.

Esprit volatil caustique.

109. De la distillation d' $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de plomb avec $\frac{1}{\text{onc.}}\frac{1}{2}$ de Chaux-vive, & $\frac{9}{8}$ de Sel ammoniac je retirai de même un esprit caustique très-pénétrant & d' une couleur jaune; cet esprit faisoit effervescence avec l' huile de vitriol & ressembloit parfaitement en tout au précédent. La tête-morte cependant parut m' offrir quelque différence. I.° En ce que le plomb étoit presque tout converti en plomb corné. 2.° Que la Chaux sembloit n' avoir pas souffert de changemens sensibles; pour m' en assûrer d'avantage, j' en séparai une partie au moien d' un tamis fort serré; je la mis dans un creuset au feu, & je ne remarquai aucune des vapeurs que le Sel ammoniac fixe donne abondament dans cette opération; après cela il me parut qu' elle n' attiroit pas l' humidité de l'air avec plus de force que ne fait la Chaux-vive commune; & boüillonnoit, ou du moins faisoit un sifflement en entrant dans l' eau.

Les différences remarquables qui sont entre la tête-morte de l' expérience précédente & de celle-ci, me font conjecturer qu' il faut que l' acide marin soit délayé dans beaucoup d' eau pour attaquer le plomb, & que c' est pour (cc) cette

(cc) Je ne prétends pas que cette seule cause facilite la dissolution du plomb j' ai même raison de penser que cet effet n' a pas lieu lorsqu'elle est toute seule, mais que dans le cas où il se trouve de l' Alkali volatil combiné à cet acide, ce mélange exerce son action sur le plomb, tant que ces deux substances ne sont point dans un certain dégré de concentration.

cette raiſon que dans l' expérience précédente il n' y a eû qu' une partie du plomb convertie en plomb corné, pendant qu' outre à du Sel ammoniac fluor il s' eſt encore élevé une quantité conſidérable de fleurs de Sel ammoniac; ces deux effets n' ayant lieu probablement que lorſque l' acide & l' Alkali volatil ſont dans leur plus grand dégré de concentration.

2.° Que la Chaux ſert à retenir une partie de l'acide du Sel ammoniac qui s' échapperoit dans le commencement de l' opération avec l' Alkali volatil.

3.° Que l' acide marin affoibli par beaucoup d' eau a plus d' affinité avec le plomb qu' avec la Chaux (*dd*).

(*dd*) Cette opération a fait le ſujet d' une grande queſtion entre les Célébres *M. Geoffroy*, *&* *Neumann*. Ce dernier ayant remarqué que le Chimiſte François avoit placé les ſubſtances métalliques, au deſſous des Sels, comme ayant un moindre rapport avec les acides, dans la table des affinités, lui fit obſerver que cette régle ſouffroit des exceptions, en lui donnant pour exemple la décompoſition du Sel ammoniac par les ſubſtances métalliques; mais *M. Geoffroi* n' attribuant cette décompoſition qu' à l' altération conſidérable que ces ſubſtances ſouffrent en paſſant à l'état de Chaux, faiſoit rentrer cette exception dans la loi générale, en ſuppoſant que les Chaux metalliques contiennent quelque peu d' Alkali fixe qui ſe développe, où qui ſe forme dans la calcination. *M. Neumann* répondit que ſi cela eut été vrai, on n'auroit pas dû obtenir de l' eſprit urineux par le minium bien lavé dans de l'eau boüillante & deſſéché, comme l'on l'obtenoit de même en l' employant ſans aucune préparation, & pour couper court à toute ſorte de diſpute, il lui fit voir qu'on pouvoit ſubſtituer avec un égal ſuccès le plomb granulé, & ſous la forme métallique; je ne ſache pas que *M. Geoffroy* ait répondu depuis au Savant Chimiſte du Roy de Pruſſe, la preuve étant ſans réplique, mais ſi cet Illuſtre Phyſicien eut cherché à s' éclaircir plus particulièrement ſur cette exception en examinant avec ſoin les produits qu'on obtient par ces opérations, il eut ſans doûte vû qu' elle n' avoit lieu que dans le cas particulier de l' acide du Sel ammoniac, qui non ſeulement eſt très-foible, mais qui ſe trouve aſſocié à une grande quantité de matière phlogiſtique; ce qui, peut-être, ne contribuë pas peu à la déſunion qui ſe fait de cet acide d'avec l' Alkali volatil, & tout au moins auroit-il reconnu que la table qu' il a dreſſée ne pouvoit pas être exactement vraïe dans tous les

X.e EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec le plomb, & le Sel de tartre.

Eſprit urineux.

Sel volatil.

110. COmme le Sel ammoniac décompoſé par le plomb ne donne que de l'eſprit urineux, & que d'autre part les Alkalis fixes donnent très-peu d'eſprit, & beaucoup de Sel volatil; je me propoſai d'obſerver les réſultats qui me viendroient de la combinaiſon du plomb avec du Sel de potaſſe, & je crus en même tems de pouvoir m'aſsûrer, ſi dans cette opération l'acide marin attaque par préférence l'Alkali fixe comme il ſeroit aſſez naturel: pour n'avoir rien à me reprocher, je crus devoir emploier une quantité de Sel ammoniac capable ſeulement de ſaturer une quantité donnée de plomb dans la décompoſition qu'il ſouffriroit; c'eſt pour cette raiſon que je diſtillai une once de Sel ammoniac ſur $\frac{3}{\text{onc.}}$ de plomb, & $\frac{3}{\text{onc.}}$ de Sel de potaſſe.

Je

ſes cas, & qu'il auroit dû en former deux, comme le remarque fort-bien *M. Baumé*, ſavoir une qui exprima tous les rapports des ſubſtances dans les opérations qui ſe font par la voye humide, & une autre dans laquelle fuſſent marqués les rapports en opérant par la voye ſéche; ou pour m'exprimer d'une manière plus générale une table qui déſigna le plus ou le moins d'aptitude que les ſubſtances ont à s'unir, ſuivant que par la combinaiſon des principes ſecondaires, le nouveau compoſé approche plus ou moins du rapport des élémens ou des véritables principes qui conſtituent des compoſés plus ou moins aiſés à être détruits. La Chimie ne ſeroit plus alors une ſcience pûrement expérimentale, elle pourroit fort-bien être ſujette au calcul avec autant d'exactitude que le ſont les ſciences phyſico-mécaniques, l'aſtronomie &c.

Je dois cependant avertir que faute de plomb granulé, j' employai de petites lames minces, & que le Sel de potaſſe n' étoit pas bien pur, deux circonſtances qui certainement pourroient cauſer des variations, & c' eſt pour cela que j' en avertis.

Je retirai $\frac{1}{8}\ \frac{15}{gr.}$ d' eſprit volatil très-limpide qui faiſoit une violente effervescence avec l' huile de vitriol, & répandoit des fumées blanches & épaiſſes; rougiſſoit un peu le papier bleu pendant qu' il étoit humide, & qu' il devenoit blanc en ſe déſſéchant; cet eſprit contenoit $\frac{54}{gr.}$ d' un Sel volatil criſtalliſé en aiguilles très-déliées. Une partie du Sel ammoniac ſe ſublima, & il en reſta une petite quantité en forme d' efflorescence ſur la tête-morte, laquelle étoit d' une couleur brûne parſémée de points d' une très-belle couleur bleüe comme l' azur de Berlin, une partie du plomb paroiſſoit réduite en litharge, le reſte étoit fondu avec toute la maſſe, & préſentoit différentes couleurs dans la partie inférieure qui étoit tout-à-fait adhérante au verre, & sembloit ne faire qu' un tout avec lui; je me déterminai ſur cela à remettre dans la cucurbite tout le Sel ammoniac qui n' avoit point été décompoſé avec $\frac{3}{onc.}\ \frac{1}{2}$ d' eau commune ſur la tête-morte, & à faire ainſi une nouvelle diſtillation; je retirai par ce moïen $\frac{2}{onc.}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$ d' eſprit de Sel ammoniac un peu plus foible que le précédent, mais il ne ſe fit point de Sel volatil, ce qui d' ailleurs eſt aſſez naturel, vû que la quantité d' eau nouvellement ajoûtée n' a paſſé qu' en partie dans le récipient, le reſte ayant été abſorbé & retenu par la tête-morte, laquelle, de brûne qu' elle étoit, paſſa à un blanc éclatant, ſa ſaveur étoit ſalée & amère

 comme

comme l' est ordinairement le Sel fébrifuge; la partie du plomb qui touchoit le fond de la cucurbite n' a souffert d' autre altération que la fusion, & une petite partie de celui qui étoit mêlé à l' Alkali fixe vers la surface supérieure avoit changé légerement sa couleur, le reste ne paroissoit avoir souffert aucun changement, & n' étoit pas même entré en fusion.

XI.e EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac avec la Chaux de cuivre ; ou avec le fer.

Esprit volatil.

Ens veneris.

ou

Ens Martis.

111. LA distillation d' $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de Sel ammoniac avec $\frac{4}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de vitriol de cuivre bien calciné m'a aussi donné un esprit urineux jaune très-pénétrant & caustique ; des fleurs de Sel ammoniac teintes en jaune, & un peu en verd lorsque j' employois du Sel ammoniac impur au lieu de fleurs. La tête-morte étoit une matière rousse, un peu déliquescente & d'un goût stiptique.

La limaille de fer roüillée ou non me donna à-peu-près les mêmes résultats, la tête-morte seulement me parut différer considérablement, en ce qu' elle contenoit plus d' acide, son goût étoit beaucoup plus âpre, se gonfloit

davan-

davantage & se résolvoit entièrement en une liqueur épaisse & jaunâtre.

L'esprit urineux qu'on retire par l'intermède des Chaux ou des substances métalliques sous leur forme naturelle donne toujours des marques assûrées de la présence de l'acide marin, quelque soit le rapport qu'on ait observé entre le Sel ammoniac & l'intermède ; il en est de même de l'opération du Sel ammoniac privé d'une partie de son eau, avec la Chaux, ce qui prouve que la décomposition n'est pas complette.

112. Si nous réflechissons maintenant sur toutes ces différentes décompositions & sur les circonstances qui les accompagnent, nous remarquerons que pour qu'elles puissent avoit lieu, il est nécessaire qu'il se dissipe une plus ou moins grande quantité de l'eau du Sel ammoniac, & que c'est pendant cette évaporation qu'elles arrivent.

Or il m'a paru avoir observé trois cas différens, savoir, le premier dans lequel est comprise la décomposition par les Alkalis fixes, & tous les intermèdes qui donnent très-peu d'esprit & beaucoup de Sel; les composés qui restent dans le fond du vaisseau sont des Sels qui retiennent à-peu-près autant d'eau que le Sel ammoniac, & la retiennent même avec plus de force.

Le second dans lequel doivent être comprises les Chaux & les substances métalliques sous leur forme naturelle ; il demeure dans le fond des Vaisseaux des Sels qui attirent beaucoup l'humidité, mais qui la lâchent avec plus de facilité que les précédents.

Le troisième regarde la Chaux combinée avec le Sel ammoniac dans des circonstances différentes, savoir la Chaux-vive & le Sel ammoniac calciné, dont les resultats sont les mêmes que ceux des substances métalliques ; la Chaux-vive & le Sel ammoniac avec toute son eau dont on ne retire aucun produit, excepté le phosphore

D'

D' HOMBERG ; la Chaux éteinte & le Sel ammoniac ſans être calciné ; la crême & l' eau de Chaux évaporée à ſiccité avec du Sel ammoniac contenant toute ſon eau.

De toutes ces combinaiſons de la Chaux on a pour réſidu un Sel ammoniac fixe à la verité, mais qui différe dans chaque opération par le plus ou moins d'eau qu'ils attirent; cependant en général ces composés peuvent en être privés aiſément par l' action d' un feu plus moderée que tous les précédents, & c' eſt ſelon moi, de cette force plus ou moins grande de ces nouveaux composés à retenir l' eau, que dépend la décompoſition en eſprit ou en Sel volatil; mais comme les Sels volatils emportent avec eux une plus grande quantité de parties concrêtes de l'intermède, il eſt naturel de penſer que du moment que l' acide marin eſt dans le dégré de concentration néceſſaire pour former avec une partie de l' intermède un nouveau Sel de nature fixe, l' Alkali volatil ſe combine par le moïen de l' acide plus délayé, & dont l'eau ſurabondante ne ſauroit être entièrement enlvée, avec les parties de l'intermède qui reſte, & forme le Sel volatil concrêt: la Chaux étant en effet une ſubſtance dont les parties quoique d' une nature différente, ainſi que le penſoit le célébre M. HOFFMANN, & que nous avons eû occaſion de le conſtater, retient cependant ces parties avec une force que le feu ne fait qu' (*ee*) augmenter & que l'eau ſeule eſt capable de détruire : il eſt clair que plus la Chaux ſera vive, moins l' eau contenuë dans le Sel ammoniac, quoique ſurabondante, pourra opérer cette déſunion réciproque qui ne me paroît conſiſter qu' en ce que l' eau dégage la partie volatile de la Chaux, qui ayant attaqué la partie phlogiſtique du Sel ammoniac, facilite d' autant

(*ee*) Nous aurons occaſion de voir la raiſon de cette fixité de la partie volatile de la Chaux, & d' où lui vient cette derniere propriété.

d' autant plus la désunion entre le Sel volatil & l' acide marin, que cet acide affoibli par beaucoup d'eau paroît avoir plus d' affinité avec la Chaux qu' avec l' Alkali volatil, comme nous le ferons remarquer par la suite; d' où il suit que pendant que la Chaux est dans son état naturel, c' est-à-dire, que ces principes ne sont pas désunis par l' eau, elle peut bien former un corps surcomposé, en s' unissant au Sel ammoniac avec beaucoup de force, mais elle n' en peut pas procurer la décomposition.

XII.e EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac dissout dans l' eau de Chaux.

Sel ammoniac fluor.

Esprit de Sel.

Sels ammoniacaux.

113. POur ce qui est de l' enlévement de la partie inflammable des Alkalis volatils par la partie de la Chaux qui se volatilise, elle me paroît très-probable par ce que j' ai fait observer §. 97. où je rendis compte d' une double décomposition qui se fait par un tour de main particulier, & qui ne me paroît pas possible sans le secours du phlogistique qui diminuë la force d' union que l' acide vitriolique a contractée avec la partie terreuse, & cela paroît d' autant plus probable, que c' est en faveur du feu, que cette opération se fait (*ff*); car d'ailleurs la crême de Chaux ne procure point d' esprit volatil

(*ff*) Cette opération dont j' ai parlé §. 97. a quelque chose d' analogue à celle du Soufre artificiel.

til non plus que l' eau de Chaux, comme je m' en suis assûré en distillant $\frac{2}{\text{onc.}}\ \frac{2}{8}$ de Sel ammoniac dissous dans $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{2}{8}\ \frac{1}{2}$ d' eau de Chaux, qui contenoit beaucoup de crême de Chaux, & comme ce mélange étoit trop liquide, j'y ajoûtai encore environ $\frac{1}{\text{onc.}}$ de terre vitrifiable; mais les $\frac{7}{8}\ \frac{1}{2}$ environ de la première liqueur que j' obtins n' étoient que du Sel ammoniac fluor très-limpide au fond de laquelle étoit un peu de liqueur très-jaune qui ressembloit assez à de l' huile figée, & qui, en se mêlant par l' agitation avec l' autre, donnoit une grande quantité de bulles d' air (*gg*).

114. Par toutes les expériences que j' ai faites, je crois pouvoir conclurre que celles d' entre les décompositions qui méritent ce nom par excellence, sont celles qui se font par le moïen de la Chaux éteinte, & de l' huile de tartre, celle de l' Alkali fixe concret ne donnant qu' un Sel volatil surchargé de parties hétérogènes, de même que les crayes & les autres terres absorbantes: pour celles qui

(*gg*) La seconde liqueur qui passa dans le récipient étoit du véritable esprit de Sel fumant, elle pésoit environ $\frac{46}{\text{gr.}}$ ce qui prouve que l' eau de Chaux contient un véritable acide vitriolique, le reste du Sel ammoniac se sublima en fleurs jaunes, parmi lesquelles il s' en trouvoit une petite quantité qui étoit d' un beau rouge, & que je me doûtai être du Sel ammoniacal secret de Glauber. La seconde liqueur mêlée à la première servit de dissolvant à celle qui étoit au fond du matras, & toute la liqueur prit ainsi une couleur violette: je ne dois cependant pas laisser ignorer que les pierres à fusil que j' avois calcinées & dont je fis usage contenoient vraisemblablement un peu de parties férugineuses dont je cherchai à les délivrer par un peu d' esprit de vitriol, & par des édulcorations reïtérées, j' en enlevai l' acide.

qui se font avec les substances métalliques, elles sont très-imparfaites (*hh*).

115. Nous avons observé que le Sel ammoniac fluor éxige beaucoup d'Alkali fixe pour développer son odeur urineuse §. 100., pendant que très-peu de Chaux produit cet effet, cela me paroît prouver que l'acide marin étendu dans beaucoup d'eau a plus d'affinité avec la Chaux qu'avec l'Alkali volatil, & qu'il en a davantage dans cette circonstance avec celui-ci qu'avec l'Alkali fixe.

116. Nous avons aussi remarqué §. 101. & nous l'avons répeté ci-devant que le Sel ammoniac avant de se sublimer en fleurs donne un peu de liqueur urineuse, ce qui semble nous faire voir que l'acide marin s'unit à une plus grande quantité d'Alkali volatil lorsqu'il est foible, que lorsqu'il est concentré.

XIII.E EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac fluor avec l'Alkali fixe.

Sel ammoniac fluor.

117. POur m'assûrer si l'acide marin délayé dans beaucoup d'eau avoit plus d'affinité à l'Alkali volatil qu'à l'Alkali fixe, je pris $\frac{4}{\text{onc.}}\ \frac{36}{\text{gr.}}$ de Sel ammoniac fluor, & j'y mis autant de Sel de potasse qu'il en fallut

 pour

(*hh*) Une marque certaine que la décomposition du Sel ammoniac n'est pas complette & dont on peut juger par la seule inspection, c'est la couleur jaune qui est toujours plus foncée à mesure qu'elle contient plus de Sel ammoniac fluor, & ce qui sert à le prouver, c'est la facilité avec laquelle on peut l'enlever par l'addition d'un Alkali fixe ou de la Chaux.

Je

pendant que l' intermède retient auſſi quelque peu de la partie volatile.

Seroit-ce une loy générale des volatiliſations ?

Dépendroit-elle de ce que par des nouvelles combinaiſons une partie des ſubſtances fixes devint volatile, & une partie de celles qui ſont volatiles prit le caractère de fixité ?

Ou ſeroit-ce enfin que toutes les ſubſtances continſſent ces parties d'une manière diſtincte ?

La ſeconde de ces propoſitions peut fort bien être la véritable, mais comme il ſera toujours néceſſaire de quelques tours de mains pour les déſunir & les faire paroître chacune dans ſon état naturel, il me ſemble que la première eſt la plus générale & la plus conforme à l'expérience; car nous voyons qu' il eſt très-poſſible de faire prendre un caractère de fixité en entier à une ſubſtance volatile par des procédés très-connus, de même qu' on peut volatiliſer des ſubſtances très-fixes. Il eſt vrai cependant que dans pluſieurs ſubſtances il ſe trouve des parties plus ou moins doüées de ces propriétés.

XV.e EXPÉRIENCE.

Diſtillation de l' eſprit volatil avec le noir de fumée.

Eſprit urineux empireumatique.

121. JE tentai encore inutilement d' obtenir du Sel volatil, ou plutôt de convertir en Sel l' eſprit urineux en combinant $\frac{2}{\text{onc.}}\,\frac{1}{2}$ de noir de fumée avec $\frac{1}{\text{onc.}}\,\frac{1}{2}$ d' eſprit volatil fait avec la Chaux, mais je ne retirai qu' une liqueur urineuſe graſſe un peu empireumatique; la ſurface de la tête-morte étoit de la couleur du verdet, je

je crus néanmoins devoir soûmettre la tête-morte à une chaleur plus forte, je la mis pour cela dans une cucurbite de terre, & après avoir retiré une liqueur très-limpide, d' un goût salé un peu empireumatique qui développoit une odeur fort agréable par le Sel de tartre & la Chaux qui faisoit effervescence avec l' huile de vitriol sans répandre des fumées, il se sublima environ $\frac{36}{gr.}$ de véritable Sel ammoniac alteré par une odeur très-empireumatique.

XVI.E EXPÉRIENCE.

Distillation d' une dissolution de Sel ammoniac avec la tête-morte d' un Sel vitriolique calcaire qui avoit servi à une distillation d' urine putréfiée.

Esprit urineux.

Sel ammoniac sublimé.

122. JE ne me dispenserai pas de rendre compte d'une expérience que j' ai faite pour obtenir du Sel volatil en employant de la Chaux que j' avois chargée d'acide vitriolique après qu' elle avoit servi à retirer le phlegme d' une quantité d' urine putrefiée, & qui étant ainsi combinée avec beaucoup d' huile de vitriol, me donna une quantité considérable d' esprit urineux très-pénétrant accompagné cependant d' une odeur un peu fœtide, cet esprit boüillonnoit (*ii*) considérablement avec l' huile de vitriol

(*ii*) Cette combinaison est à-peu-près celle dont parle *M. Vallerius* dans un Mémoire sur le nitre artificiel, & par laquelle il dit que le Doćteur *Pietsch*, qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin, a fait

vitriol, jettoit des vapeurs blanches & épaisses, manifestoit un mouvement d'effervescence avec le Sel de tartre : d'où il suit incontestablement que cet esprit d'urine tenoit du véritable Sel ammoniac en dissolution : c'est donc du caput mortuum qui resta dans cette opération que je me suis servi ; c'étoit une substance d'une surface unie, & ayant des crevasses comme la Chaux éteinte, desséchée, d'un grain tout-à-fait fin, d'une légereté surprenante; elle étoit blanche dans sa partie supérieure, un peu bleuâtre daus le centre, d'un goût fade, ne s'humectant point à l'air : je mêlai $\frac{6}{\text{onc.}}$ $\frac{4}{8}$ de cette tête-morte avec $\frac{2}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac & environ $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$ d'eau distillée dans une cucurbite de terre, & j'en retirai $\frac{3}{\text{onc.}}$ $\frac{36}{\text{gr.}}$ environ d'une esprit urineux assez fort, $\frac{3}{8}$ d'un Sel sublimé à la voûte, & la tête-morte dont la couleur bleuë étoit considérablement augmentée pésoit environ $\frac{6}{\text{onc.}}$ $\frac{3}{8}$; ayant éxaminé le Sel sublimé à la voûte, je trouvai que c'étoit du Sel ammoniac.

123. Cette expérience sert à nous faire voir combien il est difficile d'enlever l'acide vitriolique à la Chaux, de même que le phlogistique dont elle se charge avec tant d'avidité, & confirme en même-tems ce que nous avons dit

fait du nitre artificiel ; je n'ai pas encore eû le tems de m'assûrer si je pouvois retirer de ce Sel, mais je puis avancer que cette tête-morte fait une grande effervescence avec l'huile de vitriol & manifeste l'odeur insupportable de l'esprit de nitre, en répandant dans cette occasion une grande quantité de fumées dont je ne pus pas distinguer assez bien la couleur ; il ne me fut cependant pas possible de retirer du salpêtre par la dissolution, la filtration & l'evaporation de cette tête-morte.

dit §. 112. ſavoir que le Sel ſélénitique enleve la partie phlogiſtique du Sel ammoniac & facilite par-là ſa décompoſition ; & quoique le Sel ſublimé ait donné des marques de Sel ammoniac de même que la liqueur ; ces ſignes cependant ont été beaucoup plus foibles que ceux que donnent les fleurs de ce Sel ou le Sel fluor, d'ailleurs la diminution de poids de la tête-morte nous prouve aſſez qu'il s'en eſt volatiliſé une partie, & il eſt probable qu'elle ſoit de la nature de la partie volatile qui ſe dégage de la Chaux par le moïen de l'eau, c'eſt-à-dire que ce ſoit un ſel ſéléniteux. Il eſt bon d'avertir auſſi que dans l'eſprit d'urine dont nous avons parlé ci-devant, l'on voyoit des petits corps précipités au fond de la liqueur, & d'autres qui y nageoient ; or il eſt probable que ce n'étoit que de ce Sel ſélénitique.

XVII.^E EXPÉRIENCE

Séparation du Sel volatil d'avec l'eau qui le tient en diſſolution au moïen du Sel ammoniac.

124. POur ne rien négliger de tout ce qui me paroiſſoit pouvoir contribuer à la formation d'un Sel volatil urineux par le moïen de la Chaux, je voulus éſſayer ſi la méthode que propoſe l'Illuſtre M. LEMERY m'en fourniroit effectivement, & pour faciliter l'opération, j'ai diſſous deux parties de Sel ammoniac en gâteau qui comme on ſait contient beaucoup plus de parties inflammables que les fleurs, dans trois parties d'eſprit de Sel ammoniac, & je retirai ſur $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{5}{8}$ d'eſprit volatil & $\frac{1}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac une quantité aſſez conſidérable de très-beau Sel volatil criſtallin, mais dont il me ne fut pas poſſible

possible de savoir le poids, parceque la liqueur ayant boüilli dans le fond des matras le détruisit dans peu de minutes; je l' avois cependant reconnu quelque tems avant cet accident, & son odeur étoit beaucoup plus pénétrante que n' est celle du Sel volatil fait avec l' Alkali fixe ou la craye.

XVIII.^e EXPÉRIENCE.

Séparation du Sel volatil d' avec l' eau qui le tient en dissolution.

125. CE résultat me fit esperer d' obtenir du Sel volatil avec le seul esprit de Sel ammoniac, comme l' avance, ainsi que je l' ai dit, le Savant M. LEMERY, je mis pour cela $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{6}{8}\ \frac{1}{2}$ d' esprit de Sel ammoniac fait avec la Chaux dans un matras à long col garni de son Chapiteau, & comme j' avois observé qu' il est indispensable pour réüssir de ne donner qu' un petit dégré de chaleur afin que l' eau ne puisse en s' évaporant détruire la formation du Sel volatil, je crus devoir employer un bain-marie en prenant la précaution de ne jamais laisser boüillir l' eau en la tenant toujours entre 60. & 65 dégrez de chaleur au termométre selon la production de M. RAUMUR.

Il se fit effectivement du Sel volatil par ce moïen, mais ce Sel n' étoit pas si beau ni si volatil que le précédent; d' ailleurs il se détruit avec beaucoup de facilité, sa couleur est un peu terne, & l' opération est dès-plus laborieuses (*kk*).

126.

(*kk*) Cette opération, toute pénible qu' elle est, ne laisse pas d' être fort intéressante par les singularités qu' elle fournit, je tirai, avant toutes

126. Ces expériences nous apprennent plusieurs vérités, & servent à confirmer ce que j'ai avancé §. 112. que la forme concrête ou liquide que prend le Sel volatil, ne dépend pas seulement de la quantité de l'intermède concrêt qu'il enleve avec lui dans cette opération, mais principalement de la force avec laquelle le nouveau Sel fixe qui résulte & qui reste dans le fond du vaisseau retient l'eau qui lui est nécessaire.

127. Nous déduirons encore qu'en emploïant de la Chaux-vive avec une suffisante quantité d'eau pour l'éteindre & pour opérer par la décomposition du Sel ammoniac, la chaleur étant assez grande pour résoudre en vapeurs l'humidité surabondante au Sel ammoniac fixe, il n'est pas étonnant que dès le commencement de l'opération où il n'est pas même nécessaire d'emploïer le feu, cette décomposition ne se fasse qu'en esprit.

tes choses, que je retirai par ce moïen environ trois gros de Sel volatil très-dur qui est sans contredit plus pénétrant que celui qu'on retire par d'autres méthodes.

Ce qu'il y a de plus singulier c'est qu'au dessous de 50. & à 70. il se détruit, & qu'il ne se forme qu'entre ces limites; outre cela pendant que le Sel se forme dans le col du matras on voit des vapeurs dans le Chapiteau, ce qui prouve que ce Sel est moins volatile que l'eau, apparemment à cause des parties de Chaux aux quelles il s'est associé, & ce qui me paroît servir de plus forte preuve à cela, c'est qu'il se dissout à un degré inférieur que celui au quel se forme le Sel; de manière que par cette chaleur il s'evapore une plus grande quantité d'eau qu'il ne s'éleve de Sel volatil pour former des cristaux avec elle; quant au degré supérieur, il est clair que cette proportion sera encore moins conservée, puisque l'evaporation à mobilité égale sera toujours proportionelle à la quantité absoluë des deux substances; & comme il se trouve dans l'esprit urineux assez d'eau pour tenir le Sel en dissolution, car sans cela il feroit sous la forme concrête; il s'en suit nécessairement qu'il doit toujours se faire une évaporation de parties aqueuses capable de tenir le Sel qui s'éleve avec dans une parfaite dissolution: je crois que la Chaux enlevée est aussi la cause de la grande force de ce Sel en ce qu'elle en dénature la partie grasse, au lieu que dans les autres elle leur donne des entrâves & en émousse l'odeur.

128. Si nous obſervons enfin les réſultats des dernières expériences §. 118. 119. 122. 123. nous voyons que la volatilité des intermèdes fixes n' eſt duë qu' à l' aſſociation des acides & de la matière inflammable. (*u*)

129. Que dans les Alkalis fixes cette volatilité doit être entièrement aſſignée à l' acide marin, qui étant par lui-même volatile n' a pas beſoin d' autre ſecours pour communiquer cette propriété à ces ſubſtances.

130. Que dans la Chaux au contraire ſe rencontrant l' acide vitriolique qui n' eſt pas par lui-même volatile, & qui ne peut acquérir cette propriété que par le moïen de l' eau & du phlogiſtique, ce n' eſt que dans ces circonſtances que cette propriété peut ſe développer; & comme cet acide attaque avec plus de force le phlogiſtique que l' acide marin, il eſt naturel que ce ſoit lui qui éxerce par préférence cette fonction.

Il ſuit de-là que l' acide ſulphureux ne doit pas ſeulement ſa volatilité à la matière inflammable à laquelle il s' eſt uni, mais encore à l' eau dans laquelle il eſt délayé.

131. En rappellant ici l' obſervation faite par M. MALOUIN que les Sels ſéléniteux quand ils ont été une fois privés de toute l' eau qui les tenoit en diſſolution, il en faut une beaucoup plus grande quantité pour les rediſſoudre; il paroît que la fixité de la partie qui eſt diſpoſée à devenir volatile dans la Chaux dépend du même principe, ſavoir que l' acide vitriolique étant alors dans un grand dégré de concentration eſt ſurchargé de parties terreuſes dont il ne retient plus qu' une moindre quantité lorſqu' il eſt affoibli par l' eau, & qu' il peut exercer librement ſon action ſur les ſubſtances inflammables; en effet nous avons obſervé §. 73. que la Chaux peut décom-

(*u*) C' eſt ce que j' ai avancé dans une note §. 17.

composer le Soufre en attaquant sa partie phlogistique, mais que ce n' est qu' à la faveur de l' eau, comme il arrive dans toutes les décompositions de cette substance, qui ne peuvent absolument avoir lieu sans son secours.

132. En considérant l' opération qui est nécessaire pour la formation du Soufre artificiel, il est naturel de voir que ce n' est que dans l' état de fluidité que l' acide vitriolique peut attaquer le phlogistique, mais qu' il se passe une grande différence dans la manière avec laquelle cette union se fait, car dans l' état de fonte cette union est la plus intime possible, & dans celui de dissolution elle est bien petite, (*mm*) au reste nous remarquerons que le tartre vitriolé paroît être la combinaison la plus parfaite de cet acide avec une substance d' une nature différente, parcequ' il est nécessaire d' employer toute la violence du feu pour la détruire, pendant qu' il ne faut que des opérations très-simples & très-aisées pour décomposer le Soufre & les sélénites que je regarde après le tartre vitriolé comme les composés de cet acide les plus difficiles à détruire, mais nous laisserons des discussions que je

(*mm*) Les expériences dont je vais rendre compte me paroissent assez propres pour confirmer cette proposition. Comme le mélange du charbon & du Sel ammoniac dont j'ai parlé §. 89. ne m' avoit rien donné ainsi que je l' avois prévû, j' y ajoûtai du vitriol vert bien calciné, & je retirai de ce mélange de l' esprit de Sel mêlé à de l' esprit sulphureux très-puissant & du Sel ammoniacal vitriolique, ce qui sert à nous faire voir encore qu' on peut tout aussi bien emploïer ces sortes de Sel pour dégager l' acide du Sel ammoniac que les acides libres, il est vrai qu' il seroit peut-être nécessaire de repasser l' esprit de Sel sur du nouveau Sel ammoniac pour l' avoir pur, mais toujours est-il moins vrai qu' on obtiendroit par ce moïen le Sel ammoniac secret de *Glauber*, avec plus de facilité, & moins de danger.

Une seconde expérience sert encore à appuïer les raisonnemens ci-devant.

Je pris $\frac{1}{\text{onc.}}$ d'esprit volatile $\frac{3}{8}$ de Soufre & je laissai ce mélange

me réſerve à traiter autre part dans toute l' étenduë qu'elles peuvent mériter.

133. Je reviendrai à ce que j' ai dit §. 130. que c' eſt l'acide vitriolique qui ſe volatiliſe avec des parties terreuſes dans la Chaux en attaquant par préférence de l'acide marin la partie inflammable du Sel ammoniac, & l'attaquant même avec plus de force ; je ne diſconviendrai pas cependant que peut-être la partie que cet acide abandonne à la faveur de l' eau ne puiſſe être attaquée par l' acide marin & ſe volatiliſer avec lui de maniére que la décompoſition fut d' autant plus intime par la Chaux, que les deux acides y concourrent, & il me paroît à propos d' obſerver qu' il en eſt de celle-ci comme de pluſieurs diſſolutions faites par l' acide marin dans leſquelles cet acide n' a de jeu, qu' autant que les ſubſtances ont déja été, pour ainſi dire, ouvertes & atténuées par des acides plus-forts.

J' en ai eû un exemple dans le plomb minéraliſé par le Soufre dont j' ai parlé dans la note du §. précédent, ce plomb qui eſt ſi réfractaire, s' eſt pourtant réduit en plomb corné pour la plus grande partie en le mêlant à des fleurs de Sel ammoniac dans un creuſet à un feu au

en digeſtion pendant la nuit ſur des cendres tiédes & dans un vaſe d' un très-petit orifice que j' eus ſoin de couvrir d' un cornet de papier ce qui me donna la teinture dorée dont parle le Célébre *M. Boherave*, mais dont le procédé n' eſt pas ſi ſimple, & comme il étoit reſté du Soufre qui n' avoit point ſouffert de changement, j' ajoûtai à ce mélange $\frac{3}{\text{onc.}}$ de minium ; j' en fis enſuite la diſtillation dont je retirai une liqueur mêlée d' eſprit de Sel & d' acide ſulphureux, un peu de Sel ammoniacal vitriolique, & le plomb calciné fut entiérement mineraliſé par le Soufre, ſa couleur étoit noire, ſa conſiſtance étoit friable, il s' attachoit aux doigts & donnoit une flamme bleüe étant expoſé à une chaleur modérée de même que fait le Soufre, & ne diſcontinuoit à brûler qu'en lui interceptant la communication avec l' air libre, en un mot c' étoit du véritable plomb brûlé.

auquel un mélange de ce même plomb avec de la poudre de charbon n' avoit rien changé.

134. J' ai dit §. 109. en parlant de la différence entre les résultats de la combinaison du Sel ammoniac avec le plomb, & de ce même Sel avec le plomb & la Chaux-vive, que j'avois lieu de conjecturer que l' acide marin devoit être affoibli par beaucoup d' eau pour attaquer le plomb, & §. 110. dans la note que non seulement par cette raison, mais encore parceque dans le Sel ammoniac cet acide se trouve associé à un Alkali volatil (Sels qui sont toujours chargés de beaucoup de matière phlogistique) il éxerce son action sur le métal (*nn*) j' ai dit ensuite que lorsque cet acide est très-foible, il paroît avoir plus d' affinité avec la Chaux, qu' avec les Alkalis volatils, & qu' il en avoit davantage dans cet état avec ces derniers qu' avec les Alkalis fixes, ces inductions quoiqu' appuyées ne doivent cependant pas passer en maxime, & je ne les donne que comme des doûtes ou des conjectures qui ont besoin d' être prouvées d' une manière directe, ce que ne pouvant pas faire pour le présent d'une manière assez étenduë, je me contenterai d' exposer quelques expériences que j' ai faites sur cela.

135. Je mis de la grenaille de plomb dans de l'acide marin, & aprés douze heures il ne me parut pas qu' il en fut attaqué d' une maniére un peu considérable (*oo*).

J' affoibli cet acide par beaucoup d' eau, mais je n' observai pas qu' il y eut eû d' altération plus sensible au plomb après 6. heures.

J' ajôûtai

(*nn*) Cette proposition que je n' ai donnée que comme une conjecture à excité ma curiosité, & j' ai fait sur cela quelques expériences qu'on trouvera à la fin de ce mémoire.

(*oo*) Je dois avertir que mon esprit de Sel n' étoit pas d' une grande force, & que c'est peut-être pour cette raison que les effets qu'il a produits sur le plomb sous sa forme métallique ont été bien petits, mais comme je me suis servi de ce même esprit de Sel pour les Chaux, il me paroît que les résultats n' en sont pas moins concluants.

J' ajoûtai à l' acide un peu d' eſprit volatile, ce qui excita beaucoup d' efferveſcence, & il me parut à 3. heures de-là que le plomb avoit changé conſidérablement.

136. Je mis du pareil plomb dans de l' eſprit volatile très-pénétrant, & j' en mis dans un autre affoibli par beaucoup d' eau; après 24. heures de tems le ſecond avoit ſouffert beaucoup plus d' altération que le premier; mais je remarquai que le plomb étoit au fond de la liqueur ſous la forme d' une Chaux précipitée, ce qui prouve que le plomb eſt attaqué par l' Alkali volatile, mais que ce n' eſt pas une véritable diſſolution.

J' ajoûtai un peu d' acide marin à ces eſprits urineux, & je remarquai de même une grande différence d' action de cet acide ſur ce métal par les deux liqueurs; car celle qui étoit plus foible agiſſoit avec beaucoup plus d' activité que l' autre, elle étoit très-limpide, les bulles d' air ſe dégageoient avec beaucoup de rapidité, & je remarquai qu'elle répandoit une grande quantité de vapeurs acides, pendant que l' autre n'en donnoit aucune; il eſt vrai que dans celle qui étoit plus concentrée le rapport entre l'acide & l' Alkali volatile étoit plus approchant du point de ſaturation; je mis une quantité d' eau dans cette diſſolution & elle s' éclaircit un peu, mais elle n' étoit pas auſſi limpide que l' autre, je crois cependant qu' il ſe trouvoit une plus grande quantité de plomb diſſoûte.

137. Ces expériences nous apprennent clairement que l' acide marin agit avec d' autant plus de force ſur le plomb par le ſecours des Alkalis volatiles, que ces Alkalis ſont plus éloignés de leur plus grande concentration, quoiqu' il ſoit naturel de penſer que cette plus grande activité ne s' étende que juſqu' à un certain terme, qui je penſe ſera celui de leur parfaite diſſolution.

138. Il paroît de même qu' elle nous prouve que l' acide marin a très-peu, ou peut-être n' a aucune action

de

de dissolution sur le plomb (*pp*), seroit-ce à cause de la grande quantité de phlogistique que contient ce métal? c' est effectivement ce que semblent me prouver les expériences suivantes.

139. Quant à ce que j' ai dit de l' affinité de cet acide avec la Chaux, les Alkalis volatils & les Alkalis fixes, il me paroît que la chose est assez prouvée par les expériences dont j' ai rendu compte, & je ne m' y arrêterai pas davantage.

140. Voici en peu de mots ce qui m' a paru prouver que l' acide marin ne dissout point le plomb à moins qu'on ne l' ait privé de son phlogistique, c' est que l' esprit de Sel dissout le minium avec beaucoup d' effervescence, il en fait de même à la céruse mais avec quelque petite différence, & quoique ce même acide dissolve le Sel de saturne, il le fait pourtant avec beaucoup moins d' activité & sans effervescence: or personne n' ignore que le minium & la céruse sont deux chaux de ce métal imparfait, la première faite par le feu, & la seconde par les vapeurs acides du vinaigre, de manière qu' elles sont entièrement privées de leur phlogistique, au lieu que le Sel de saturne par les digestions & les cohobations réitérées de l' esprit de vinaigre en reprend indispensablement, ce qui est assez prouvé par la révivification qu' on peut faire de ce Sel en plomb sans addition de phlogistique.

Ce phénomène de la dissolution du plomb par l' acide marin au moïen d' un peu d' Alkali volatil semble favoriser le sentiment de ceux qui prétendent que l' acide nitreux n' est que l' acide vitriolique altéré par du phlogistique

(*pp*) J' entends par dissolution, une désunion intime & uniforme de toutes les parties d' un corps, d' où il suit immédiatement la limpidité de la dissolution, ce qui n' ayant pas lieu dans celle de l' esprit de Sel sur le plomb non préparé, ne me paroît par mériter ce nom, mais plutôt celui d' abrasion.

giftique & de l'Alkali volatil, & que l'acide marin n'en différe qu'en ce qu'il ne contient pas l'Alkali volatil; si cela étoit cependant, le Sel ammoniac fluor combiné à l'Alkali fixe devroit donner du véritable nitre, ce qui ne m'a pas réussi, non plus que d'en tirer d'une distillation que j'ai faite du mélange de l'esprit de vin avec l'acide vitriolique saturé d'Alkali fixe après 12. heures de digestion, qui a été l'opération dont M. VALLERIUS dit en avoir retiré; pour moi je n'ai obtenu qu'un tartre vitriolé en cristaux très-distincts, qui differoit cependant de l'ordinaire, en ce qu'il n'avoit point du tout de saveur amère. J'ai remarqué à cette occasion que malgré que l'évaporation soit très-rapide les crystaux qui en resultent sont en grande quantité & très-bien figurés, qu'il ne se forme point de pellicules, & qu'ils se crystallisent au fond de leur dissolution, comme le Savant M. ROUELLE dit qu'il arrive dans l'évaporation insensible, aux dissolutions ordinaires de ces Sels à l'air libre.

Quoique je me fusse proposé de rendre compte dans ce Mémoire de l'action de la Chaux sur différentes substances, les questions incidentes ne m'ayant pas permis d'être plus court, j'ai été dans l'obligation de me borner au Soufre, au Sel de Glauber, & au Sel ammoniac, me réservant à en donner la continuation dans d'autres Mémoires.

EXPÉRIENCES

Pour chercher les causes des changemens qui arrivent au Sirop violat, par le mélange de différentes substances.

Par le Même.

L'Illustre M. Neumann a donné un Mémoire dans le quatrième volume des *Miscellanea Berolinensia* sur le peu de confiance qu'on doit avoir aux changemens de couleurs qui arrivent au Sirop violat par le mélange de quelque substance pour en déduire la nature.

On sait que la couleur verte sert à caractériser les substances alkalines, que le rouge dénote la présence d'un acide, & que les Sels qui résultent de la combinaison exacte de ces principes, & plus généralement que les Sels parfaitement neutres n'apportent aucune altération à la couleur bleüe des végétaux, ce sont là des maximes généralement reçuës; quoique cependant ces axiômes ayent été depuis fort long-tems adoptés, ce Savant a fait voir qu'ils étoient sujets à un grand nombre d'exceptions, & qu'on ne pouvoit être en droit de conclurre de ces changemens que la substance qu'on avoit employée fut acide ou alkaline, ou enfin neutre, lors qu'il ne survenoit aucune altération à la couleur naturelle au sirop.

Ce n'est point une ampliation de ces exceptions que je me propose, mais l'examen de ces changemens & celui des causes de ces exceptions mêmes.

Je distribuerai mes observations selon l'ordre qui me paroît le plus naturel, savoir celui que tiennent les acides,

& je chercherai ensuite à déduire les conséquences qui en découlent.

1. Le sirop violat mêlé avec l' huile de vitriol, prend une couleur rouge très-belle & plus ou moins foncée à mesure que la quantité d' eau dans laquelle on étend le sirop est plus ou moins grande.

2. Il n'en est pas de même si on met l'huile de vitriol sur le sirop sans le délayer dans une quantité d' eau considérable, quantité qui doit être fixée par l' espéce de dissolution qui se fait sans qu' il ne se précipite plus rien après qu' on l' a laissé reposer; car alors le sirop se convertit en charbon.

3. Toutes les fois que la quantitè d'eau excede le point de saturation, s' il est permis de me servir de cette expression, la couleur se change en verd dans la dissolution du sirop.

4. Je ne parlerai dorénavant que des dissolutions saturées, j' avertirai toutes les fois que cette circonstance aura été altérée, & je les nommerai liqueur.

5. Le tartre vitriolé semble au commencement ne diminuer qu' un peu l' intensité de la couleur bleüe, elle se change néanmoins après un certain tems en une couleur verte assez belle. Les fleurs de violette, ni le papier bleu ne souffrent aucun changement.

6. Le foye de Soufre, ou pour parler plus exactement, du Soufre & de l' Alkali fixe mêlés à cette liqueur au moïen de l' agitation lui font prendre une couleur jaune dorée très-belle (*a*)

7. Le Sel volatil sulphureux se dissout en très-petite quantité dans la liqueur, elle se change cependant en un verd assez clair après quelque-tems.

8.

(*a*) Toutes les fois que je ne parlerai point des fleurs de violette & du papier bleu, c' est parceque je n' y aurai remarqué aucune altération sensible.

8. Le Sel de Glauber ſe diſſout en très-grande quantité dans la liqueur, & lui fait prendre auſſitôt une très-belle couleur verte.

9. L'alun ſe diſſout de même en grande quantité, & produit une couleur violette qui diſparoît enſuite & ſe change en un verd ſale. Les fleurs de violette & le papier bleu changent auſſi en rouge ; il ſe fait au reſte un précipité conſidérable dans le commencement qui ſemble cependant diminuer par la ſuite.

10. L'alun de plume artificiel dont j'ai rendu compte dans le mémoire précédent ſe diſſout encore en plus grande quantité, & fait prendre une très-belle couleur de ceriſe à la liqueur, aux fleurs de violette & au papier bleu.

11. Le vitriol verd communiqua à la liqueur une couleur verd d'olive, parut changer foiblement en rouge les fleurs de violette, & le papier bleu prit une teinte d'un gris-rougeâtre ; il y eut auſſi dans ce mélange un précipité conſidérable (*b*)

12. Le vitriol de cuivre paroît produire dans le tems même de la diſſolution un peu de changement, & la liqueur prend à la ſuite une belle couleur verte, de même que les fleurs de violette qui ſe chargent d'une nuance tout-à-fait ſemblable à celle du verdet : le papier bleu au contraire ſemble relever un peu ſa couleur naturelle.

(*b*) Dans le doûte que le vitriol vert que j'avois emploïé n'eut ſouffert une eſpéce de décompoſition, j'y ajoûtai un peu d'acide vitriolique, ce qui produiſit en effet une eſpéce de gonflement qui ne reſſembloit pas mal à un mouvement de fermentation ; pour m'aſsûrer néanmoins qu'il ne ſe trouvoit pas une ſurabondance d'acide, je projettai par intervalle des petites quantités de limaille de fer juſqu'à ce qu'il ne parut plus de mouvement ; la liqueur en queſtion prit une couleur brûne très-foncée qui étoit à-peu-près la même que celle qu'on obtient en mettant de l'eau avec le charbon qui réſulte de la combinaiſon de l'acide vitriolique & du ſirop §. 2. de même que le papier bleu ; les fleurs de violette au contraire devinrent d'un très-beau rouge.

13. L'huile de tartre commence par communiquer une couleur jaune à la liqueur qui se change ensuite en verd à mesure que la quantité du sirop est plus grande; cette couleur cependant ne se soûtient pas & redevient jaune orangé; les fleurs de violette développent un bien plus beau verd qui se change de même en jaune à mesure que l'humidité s'évapore & qui paroît d'un blanc sale lorsque les fleurs sont séches.

14. Le Sel de tartre se dissout en très-grande quantité, communique d'abord une belle couleur verte à la liqueur & paroît la partager en deux parties dont la supérieure est un coagulum blanc, & l'inférieure est une espéce de précipité vert trés-foncé: après quelque tems cependant cette liqueur prend une couleur jaune orangé.

15. La Chaux-vive change cette liqueur en un verd très-clair après avoir passé par le jaune comme celle qui est mêlée à l'huile de tartre §. 13., & jaunit de même ensuite.

16. La Chaux lavée change la liqueur dans le moment du mélange en verd-clair qui passe ensuite au jaunâtre.

17. Les os calcinés changent la liqueur en verd-clair, & cette couleur s'y soûtient.

Je crois devoir faire remarquer que le Sel de tartre, la Chaux-vive, la Chaux lavée, les os calcinés & le Sel volatil de Sel ammoniac produisent un mouvement dans la liqueur qui ressemble beaucoup à un mouvement de fermentation.

18. Le Sel volatil fait prendre une couleur verte à la liqueur qui se change ensuite en jaune orangé.

19. L'esprit volatil de Sel ammoniac change aussitôt en verd un peu jaunâtre cette liqueur qui ne se soûtient pas & qui passe au jaune &c. Et en un très-beau verd les fleurs de violette; mais ce changement est encore plus prompt avec l'eau de luce, cette couleur néanmoins se change aussi en jaune.

20. L'huile de vitriol combinée avec l'huile & étenduë ensuite dans l'eau, procura une très-belle couleur à la liqueur, & changea les fleurs de violette en très-beau rouge.

21. Si l'eau-forte que l'on mêle avec la liqueur en question est en trop grande quantité, elle ne prend pas une belle couleur rouge, encore est-ce plutôt un jaune doré, qu'un véritable rouge qu'on peut lui faire prendre, quelque soit le rapport de ces substances entr'elles; il en est de même en emploïant le sirop tout pur; le papier bleu prend un rouge de brique de même que les fleurs de violette qui en différent cependant de quelques nuances; ce rouge quoiqu'il en soit n'est jamais beau & passe d'abord au jaune citron comme la liqueur reposée qui contient l'Alkali fixe.

22. Le Salpêtre se dissout en grande quantité dans la liqueur & lui fait prendre une couleur verte.

23. L'acide marin fait prendre une très-belle couleur rouge ponçeau à la liqueur qui est d'autant plus foncée, que la quantité de cet acide est moins grande: lorsqu'on en mêle au sirop sans être délayée, il se manifeste une très-belle couleur de rubis qui ressemble parfaitement à du vin.

24. Le Sel marin ne se dissout pas en aussi grande quantité dans cette liqueur que le salpêtre & lui fait prendre une couleur verte foncée.

25. Le Sel ammoniac fait changer en verd brun la liqueur en question.

26. La limaille de fer semble aussi faire prendre une couleur verte foncée à cette liqueur.

27. La pierre à cautere fait prendre dans l'instant du mélange une belle couleur verte à cette liqueur qui se change ensuite en jaune.

28. La ſubſtance ſaline dont j'ai parlé dans le mémoire précédent §. 69. paroît n'avoir produit aucun changement à la couleur du ſirop dans le moment du mélange, mais elle eſt dans la ſuite devenuë de la couleur des eaux croupiſſantes.

29. Le Sel de ſaturne a fait prendre une couleur verte à la liqueur en queſtion, & il s'eſt fait une ſéparation, en forme de précipité, des parties extractives qui n'avoient rien ſouffert dans l'intenſité de la couleur.

30. La crême de tartre n'a auſſi produit aucun changement dans le tems du mélange, mais elle lui a fait prendre une belle couleur de vin.

31. Le précipité blanc a converti la liqueur en bleu pâle & enſuite en verd-clair.

32. Le turbith minéral l'a changée en verd.

Je dois avertir, quoique la choſe ſoit fort naturelle, que ni l'une, ni l'autre de ces ſubſtances ne s'eſt pas diſſoûte dans la liqueur.

33. Un Sel ſéléniteux chargé de beaucoup de matière phlogiſtique & par conſéquent très-diſſoluble dans l'eau, comme je l'ai fait remarquer dans le mémoire précédent, a changé cette liqueur en verd qui ne s'eſt pas ſoûtenu, & qui a changé en jaune orangé avec un précipité très-abondant.

34. La pierre à plâtre qui n'eſt comme l'on ſait qu'une ſélénite calcaire naturelle, n'a point changé cette couleur au moment que je l'y ai miſe, elle parut cependant en avoir altéré la nuance dans la ſuite.

35. Le plâtre cependant m'a paru y avoir occaſionné quelque changement dans l'inſtant du mélange, qui devint d'autant plus ſenſible dans la ſuite; ſa couleur étoit d'un verd jaunâtre.

36. Le colcotar a fait prendre dans le moment du mélange une couleur rouge à la liqueur, & lorſqu'il ſe fut entiè-

entièrement précipité, elle devint d'un très-beau jaune doré.

37. La noix de galle lui a communiqué une couleur brûne olivâtre qui s'est soûtenuë & qui ne differoit pas de celle qui résulte d'un mélange de cette dissolution avec un peu d'huile grasse & beaucoup d'acide vitriolique; elle ressembloit très-bien aussi à celles dont j'ai rendu compte dans la note du §. 11.

38. La liqueur délayée dans autant d'eau qu'il lui en fallut pour passer de la couleur bleüe à la verte est repassée au bleu par un peu de savon que j'y ai fait dissoudre.

39. Du Sel de Glauber, du salpêtre & du Sel marin dissous successivement dans la liqueur en question & mêlés ensuite avec de l'esprit urineux qui la fit changer tout de suite en verd-clair, repassa au bleu par l'addition du savon dissout & qui s'est coagulé dans ce mélange, comme il étoit assez naturel de le présumer, si quelqu'un des Sels n'avoit pas été à baze d'Alkali fixe, ce qui me fait conjecturer que l'esprit volatil contenoit apparemment encore un peu d'acide marin.

40. Je mêlai une petite quantité de liqueur renduë rouge par l'acide vitriolique avec une grande quantité de celle qui étoit d'un jaune-clair par le mélange de l'huile de tartre, & je vis, qu'au moment du point de saturation, le mélange commença à verdir & se fonça continuellement sans jamais perdre de sa couleur, comme faisoit l'huile de tartre malgré que je l'en eusse chargée.

41. Sans entrer dans une récapitulation métodique des faits dont j'ai rendu compte, il me paroît de pouvoir conclurre que la couleur rouge prouve tout au moins une surabondance d'acide dans la substance mêlée à la dissolution du sirop; pour ce qui est de la couleur verte je me crois bien fondé à dire d'après le Célébre M. Neu-

MANN qu' elle eſt une preuve très-équivoque de la préſence d'un Alkali, & qu'elle eſt même fauſſe, c'eſt-à-dire qu'elle prouve la préſence d' une ſubſtance neutre très-diſſoluble lorſque cette couleur ſe ſoûtient; car ſi la ſubſtance qu'on a mêlée eſt un Alkali fixe ou (*c*) volatil, ou enfin ſi ce principe y domine la liqueur doit prendre une couleur jaune qui ſera plus ou moins foncée à meſure que ce principe s' y trouvera en plus ou moins grande quantité.

42. J' ai de même lieu de penſer que la couleur bleüe ne paſſe au verd par l' interpoſition des parties ſalines qui ſe ſont diſſoûtes dans la liqueur que parceque les parties blanches du mucilage ſe trouvent plus diviſées entr' elles (*d*) car du moment que ces parties ſe rapprochent, ou qu' on y en introduit de nouvelles, comme cela arrive par le mélange du ſavon, la couleur bleüe ſe manifeſte &

(*c*) En effet nous avons fait obſerver qu' une diſſolution renduë rouge par l' addition d' un acide, commençoit à ſe changer en verd avant d' avoir atteint le point de ſaturation lorſqu'on la méloit à une diſſolution du même ſirop rendu jaune par l' action d' un Alkali fixe, & que cette couleur continuoit à ſe foncer à meſure que la quantité de la liqueur jaune étoit plus grande : *il ſuit de-là qu' il n'eſt pas néceſſaire que le Sel ſoit parfaitement neutre, mais je dois faire remarquer que ſi l' excès de ſaturation dépend de l' Alkali fixe, la couleur ne ſe ſoûtient pas & paſſe au jaune.*

(*d*) Je crois que ce n' eſt pas dans d' autres raiſons que dans celle de l'interpoſition produite par la diſſolution des ſubſtances ſalines qu' on doit chercher le changement de la couleur bleüe en verte, puiſque les Sels ou les matières qui ne ſont pas ou qui ſont du moins très-peu diſſolubles dans l' eau & qui d' ailleurs par la fineſſe de leurs parties ne peuvent ſe ſoûtenir dans la liqueur, n' y produiſent aucun changement & qu'au contraire plus les Sels ſont diſſolubles, ou plus les matières ſont réduites en des parties aſſez déliées pour être ſoûtenües, plus le changement eſt prompt & conſidérable. C' eſt auſſi ce qui paroît exactement prouvé par le retour au bleu au moïen du ſavon; car cette ſubſtance comme l' on ſait ne préſente pas une diſſolution parfaite dans l' eau, & elle n' y eſt que miſcible, d' où il ſuit naturellement l' opacité des parties aqueuſes qui ne tenant point du ſirop en diſſolution étoient auparavant diaphanes & faiſoient paroître la couleur verte.

Nous pouvons donc déduire de-là que la denſité du milieu produit ſeule ce changement.

& se soûtient tant que le nouveau coagulum se soûtient lui-même par petits floccons dans la liqueur.

43. Si la substance saline outre à l'interposition de ses parties dans celles du sirop dissout, a encore de l'action sur ces parties mêmes, il en résulte la couleur jaune ou la couleur rouge, suivant que cette action est plus ou moins vive, de manière que (*e*) la couleur jaune ne seroit que la dilatation des parties qui du bleu ont passé au verd,

(*e*) L'action des acides & des Alkalis sur les parties extractives dont est composé le sirop est si différente, qu'on peut avec fondement avancer que l'une est tout-à-fait opposée à l'autre ; il me paroît cependant qu'elle ne différe que par l'activité avec laquelle elle se fait, mais ce seroit une question qui méneroit trop loin, & je me bornerai à faire observer que l'action de l'Alkali fixe consiste en ce qu'elle dispose les parties extractives à la fermentation putride : en effet en surchargeant une dissolution de sirop dans l'eau d'Alkali fixe il se développe après quelques heures une puissante odeur d'esprit urineux qui diminuë cependant ensuite par de nouvelles additions d'Alkali fixe & prend alors l'odeur & la couleur même de l'urine qui commence à se putréfier : or comme la putréfaction ne fait que désunir par une espéce d'extension les parties des substances qui en sont capables, je crois d'être bien fondé à penser que c'est de la raréfaction des parties qui constituent la couleur verte, qu'on doit répéter le changement de cette couleur en jaune. Les acides au contraire loin de disposer les matières à la fermentation putride sont faites pour en empêcher l'effet comme cela est connu de tout le monde, & j'ai lieu de croire que c'est en racornissant les molécules colorantes qu'ils produisent les changemens des couleurs ; de manière que ces parties présentent de plus grands interstices entr'elles pendant qu'elles sont réduites à un plus petit volume pour les nuances de la couleur rouge, & qu'elles le sont au plus petit possible pour le noir le plus foncé

Il me paroît qu'on ne peut mieux comparer cette action des acides & des Alkalis qu'à ce que l'on voit arriver aux substances animales ou végétales exposées à l'action immédiate du feu, ou bien à celle de cet agent modifiée par l'intermède de l'eau ; car dans le premier cas, ces substances souffrent une contraction plus ou moins grande à mésure que l'action est plus ou moins vive, & au contraire dans la seconde elles s'étendent & se raréfient.

Cette différence cependant ne me paroît produite que parceque dans les acides l'action étant trop vive attaque d'abord la surface des substances, & se porte par une succession rapide sur les parties intérieures, au lieu que dans les Alkalis cette action est plus uniforme & s'étend en même-tems sur toutes les parties de la substance.

& le rouge une plus grande atténuation de ces parties : le noir enfin ne fauroit être que la destruction, ou pour parler plus exactement la division mécanique la plus forte possible.

44. Cette division ne me paroît être produite que par l'atténuation qui arrive au phlogistique, car je suis parvenu à faire du bleu par une surabondance de cette matière avec une dissolution de vitriol vert que j' avois fait longtems boüillir pour en séparer la terre férugineuse, & cela au moïen d' une grande quantité d' une forte décoction de noix de galle dans la dissolution en question ; ce mélange après avoir passé par la couleur noire de différentes nuances & par le violet devint bleu de Roi lorsqu' il eut été parfaitement desséché ; je dois cependant avertir que M. Rouelle avoit déja fait une pareille préparation comme je l' ai vû rapportée depuis par M. l' Abbé Menon dans son second mémoire sur le bleu de Prusse inséré dans les mém. de Math. & de Phys. présentés à l' Ac. Roy. des Sci. par divers Savans Tom. premier pag. 580.

45. Nous déduirons enfin de ce mémoire que pour que la couleur bleüe se change en verd il n' est pas nécessaire que la fécule colorante soit atténuée, & qu' il suffit qu' il se fasse une interposition des parties d' une substance blanche ou jaune qui donnent de l' opacité aux interstices du milieu interposé entre le molécules colorantes.

46. Qu' il n'en est cependant pas de même de la couleur jaune ; car elle est sans contredit le résultat d' une dilatation qui se fait dans ces parties, de manière que leur densité se trouve diminuée.

Que le rouge dépend d' une plus grande division des parties de celles-ci, & que la noire n' est pour ainsi dire qu' une division si intime, qu' on peut la nommer du nom de destruction.

47. Tout ce mécanisme cependant ne fait son jeu qu' en vertu de l' action que les substances ont sur le phlogistique.

48. Lors qu' un corps est réduit en charbon, ce n'est pas qu' on en ait enlevé le phlogistique, je croirois plus volontiers qu' on n' a fait qu' en changer la distribution; les corps blancs me paroissent être ceux qui en sont les plus dépourvus, ou dumoins qui n' en retiennent que la quantité qui leur est nécessaire pour avoir les propriétés communes aux corps; d' où il résulte aussi une plus grande difficulté à les en priver. Ce qu' il y a de très-positif, c' est que la Chaux & le Sel de potasse, de même que le Sel de tartre deviennent bleus étant calcinés, au moins, à vase clos avec des matières qui contiennent beaucoup de phlogistique.

J' aurai occasion de développer plus amplement & plus démonstrativement dans un autre mémoire les vérités que je n' ai fait pour ainsi dire qu' indiquer dans celui-ci; il me suffit en attendant de faire remarquer la conformité de ces expériences & de ces inductions avec ce qu' en pensoit le célébre Chevalier NEWTON : voici ses propres termes „ nec minus eodem facit, quod ex diversorum li-„ quorum permixtione, certæ colorum species permiros „ interdum ac notatu dignissimos ortus atque mutationes „ habeant: quorum quidem caussa nulli rei verisimilius & „ rationi congruentius attribui potest, quam quod corpus-„ cula salina, quæ insint in uno liquore, agant varie in „ corpuscula colorata alterius, vel coalescant cum illis; „ adeo ut illa inde adaugeantur vel extenuentur, (quo non „ modo magnitudo, verum etiam densitas ipsorum immu-„ tari potest) vel dividantur in corpuscula adhuc minora, „ (quo liquor, qui fuerat coloratus, poterit pellucidus „ evadere) vel consocientur complura inter se, & in gru-„ mulos coalescant, (quo ex binis liquoribus pellucidis, „ confieri poterit liquor coloratus.) NEWT: Opt: L. II. P. 3.ª Prop. V.ª pag. 98.

Fautes qui se sont glissées dans le Mémoire sur la Chaux, & qu'on prie le Lecteur de corriger.

Page	Ligne	FAUTES.	LISEZ.
87	24	; - - - - - -	effacés
104	1	$\frac{6}{8}$ - - - - - -	$\frac{6}{gr.}$
105	27	. - - - - - -	,
106	11	graisses . . .	goutes de graisse
123 (dans le texte)	4	caustique sublimé	caustique. Sublimé
143	derniere	il me ne - -	il ne me
144	2	des matras - -	du matras
Ibid.	21	production - -	graduation
Ibid.	22	Raumur - - -	Reaumur
Ibid.	24	il se détruit avec	il ne se détruit pas avec
Ib. dans la note		je tirai - - -	je dirai
147 dans la note		est-il moins vrai	n'est-il pas moins vrai.

JOHANNIS-BAPTISTAE GABER

De humoribus animalibus

SPECIMEN TERTIUM.

QUUM experimenta de ſpontanea humorum mutatione perſequerer, paullatim eo deductus ſum, ut varias etiam partes explorarem, quibus humores ſecundum naturam efficiuntur, atque adeo productiones varias tum albuminoſae partis, quae ſerum conſtituit, tum lymphaticae, & aqueae ad examen revocarem. Hinc varia de ruyſchiana membrana, de flocculis, quos in calida miſſus ſanguis gignit, de fibroſa baſi cruoris inſulam efformante, de ſale ſanguinis eſſentiali tentamina nata ſunt, quae minus fortaſſe perfecta, & abſoluta, hic nullo alio ordine deſcripſi, quam quo ſe mihi primum obtulerunt.

1. Seri partem concreſcibilem ab aquoſa frigoris ope ſeparabam, partem nempe aqueam, quae primum, & minori frigore concreſcebat a parte reliqua, quae tardius congelabatur, ſejungebam, eaſque in diſtinctis vaſis liqueſcere ſinebam. Prior illa liquorem exhibebat limpidum, penitus in ignem difflabilem, ex acidis mineralibus non coagulabilem, a quo per digeſtionem nihil ſeparabatur; pars altera liquorem praebebat denſiorem, ſero coloratiorem, viſcidulum, igne, & acidis coagulabilem, & digeſtionis ope in clauſis vaſis in puriforme liquamen prorſus abeuntem perpauca omnino aqua ſupernatante.

2. Ex quo confirmatur albuminoſam partem ſeri eam eſſe, quae in pus ſecedat, atque hinc fieri, ut eadem omnino depoſita ſupernatans liquor concreſcibilem naturam amittat (*a*). Ex eo etiam experimento definiri commode

a) Specim. II. §. 20.

poteſt, qua proportione albuminoſae partes ſe habeant ad aquoſas in ſero contentas: atque inſuper deprehendimus partem ſeri aquoſam concreſcibili parti propemodum aequalem eſſe. Quae porro methodus horum elementorum proportionem definiendi minime fallax, coeteriſque anteponenda videtur (*b*).

3. Diximus corium, quod cruoroſam inſulam pleuriticorum obtegit, alkalicis volatilibus ſolvi, mox eorum evaporatione iterum concreſcere, ita tamen ut priſtinam duritiem, & colorem non recuperet, ſed in tremulae gelatinae ſpeciem tantummodo coëat (*c*). Libuit autem experiri quid eveniret, ſi ejuſmodi ſolutioni, aut aqua, aut acida admiſcerentur. Itaque admixta aqua, ſoluta membrana gelatinae ſpecie ad liquoris ſuperficiem colligebatur; quo fit, ut ipſa ſic ſoluta ſaponaceam indolem non adquirat, quum aqua ſolubilis non efficiatur. Quod ſi vero in eam ſolutionem ſpiritum nitri immitterem, ſoluta cruſta ad fundum praeceps ferebatur, & priſtinam albedinem, & duritiem referebat. Conſtat igitur ſpeciem, quam exhibet, gelatinae aemulam, dum aut alkalini evaporatione, aut aquae admixtione concreſcit, tribuendam eſſe aquae, *quam* in poris ſuis concreſcendo retinet, indeque fieri, ut acida mineralia, quae aquam non minus, quam alkali abripiunt, priſtinam formam, ac denſitatem eidem reſtituant.

4. Libuit etiam indolem ſabuloſae materiae, in quam temporis progreſſu ſeri ſedimentum puriforme faceſſit per experimenta inveſtigare (*d*). Hujuſmodi itaque materiem in varios liquores immiſi, aquam, vini ſpiritum, acetum diſtillatum, acidum nitri, alkali volatile. Tribus prioribus menſtruis ſoluta nullatenus eſt; duobus poſtremis prompte, & perfecte ſolvebatur. Ex quo adparet ea concrementa ſalina

(*b*) Confer *Ill. Haller* Elementor. Phyſiol. T. II. pag. 124.
(*c*) Specim. II. §. 30.
(*d*) Confer. Specim. II. §. 20.

ſalina non eſſe, quum aqua non ſolvantur, & albuminoſae ſeri parti in eo eſſe ſimilia, quod alkohole ſolvi non poſſint, ſolvantur vero alkalicis volatilibus; in eo autem differre, quod ſolvantur acidis mineralibus, quum ſeri pars gelatinoſa ab iiſdem cogatur.

5. Ex iis etiam conſtat concrementa ea terrea a tophacea podagrorum materia differre; nam haec aceto diſtillato, & ſpiritu ſalis intra viginti-quatuor horas ſolvebatur, contra in ſpiritu ſalis ammoniaci, c. c., urinae integra perſtabat (*e*), ut propterea iis ſolveretur, in quibus terrea materies integra perdurabat, iiſque reſiſteret, a quibus terreum hoc puris concrementum ſolvebatur. Eodem modo a calculis differre conſtabit tum felleis, tum urinariis, quorum aliquos in alkalicis iiſdem integros permanere obſervavimus.

6. Quum porro corium pleuriticum in vaſis clauſis ſponte colliquatum (*f*) diu aſſervaſſem, animadverti turbidum eum liquorem in tophos abire iis omnino ſimiles, quos purulentum ſeri ſedimentum produxerat, quique ſimiliter tentati eamdem naturam oſtendebant (4), ut inde probabile fiat colliquatum corium a purulento ſeri ſedimento minus diſcrepare, quam ſubito aſpectu (*g*) ex aliqua conſiſtentiae, & coloris diverſitate nobis differre viſa fuerint, & confirmatur eorum ſententia, qui cenſent unam eamdemque utriuſque materiem eſſe (*h*), albuminoſam nimirum ſeri partem, quod aliis etiam experimentis conſentaneum eſt, quae hic continenter adnotamus.

7. Inſulam cruoroſam in minima fragmenta comminutam repetita aquae affuſione eluebam, ut cruore per aquam abrepto

(*e*) *Pinelli*. Saggio delle tranſazioni. T. IV. pag. 157.
(*f*) Specim. II. §. 20.
(*g*) Specim. II. §. 26.
(*h*) *Celeb. Sauvages* de l' inflammation §. 87.
Cl. De-Haen Part. II. Cap. II. pag. 22.
Cl. Queſnay de la ſaignée pag. 419. 420.

abrepto ſola ipſius inſulae pars fibroſa, albidaque ſupereſſet (*i*); tum eam partem fibroſam variis iis experimentis exploravi, quae circa corium pleuriticum alias inſtitueram. Eamdem omnino naturam conſtanter demonſtravit: nempe clauſis vaſis digeſta in liquamen abibat, alkohole, & acidis mineralibus indurabatur, alkalicis volatilibus perfecte ſolvebatur, eorum tamen evaporatione concretura.

8. Ex quibus demonſtratur corium pleuriticum ex eadem materie conſtare, ex qua fibrata, albidaque inſulae cruoroſae matrix conſtituitur, albuminoſa nempe ſeri portione, uti MALPIGHIO (*l*) HALLERO (*m*), aliiſque ſummis Viris viſum fuerat. Hinc porro intelligitur cur corium pleuriticum ad ſuperiorem inſulae cruoroſae faciem conſtanter adhaereat; cur interdum globulis cruoroſis interceptis nonniſi dilutiore colore, majorique duritie id corium a cruoroſa inſula diſtinguatur (*n*); cur in ſcorbuto imminuta cohaeſione globulorum ſanguineorum ad fibroſam ſanguinis partem corium craſſius fiat (*o*); cur in inflammationibus prout cruoris quantitas imminuitur corii craſſities augeatur (*p*); cur denique corium a nobis obſervatum fuerit, quod flocculenta corona per ſerum diſperſa cingebatur (*q*); ac poſtremo cur & tota placenta, & corium pleuriticum aeque parum ferri contineat (*r*).

9. Omnino probabile eſt educto ſanguine, defectuque motus, vel caloris, vel utriuſque aqueam ſeri partem minorem.

(*i*) Confer *Malpighium* de polypo pag. 33.
Menghinum Comment. Bononienſ. T. II. Part. II. pag. 254.
Cl. *Kronaver* apud *Hallerum* in addendis Phyſiolog. T. VIII. Part. II. pag. 139. Cl. *Kronaver* enim opuſculo non ſine dolore careo.
(*l*) Loc. citat.
(*m*) Tom. II. Phyſiolog. pag. 126. 127. 128.
(*n*) *Queſnay* loc. citat. flag. 411. 412.
(*o*) *Lind*. Traité du Scorbut.
(*p*) *Queſnay* loc. citat. pag. 415. 416.
(*q*) Specim. II. §. 25. not. d.
(*r*) *Menghini* loc. cit. pag. 255.

norem jam albuminosae partis quantitatem solutam servare posse, hinc excedentem portionem secedere quemadmodum quorumdam salium portio aqua calida solutorum ab eadem frigescente separatur. Portionem hanc albuminis frigore, & quiete coëuntem globulos cruorosos abripere, & insulam constituere, corium vero pleuriticum fieri ab albuminosa parte, quae aut nullos, aut pauciores globulos sanguineos concrescendo abripuit, sive quod frigori magis exposita promptius coierit, sive quod in concretionem magis prona esset, sive quod minorem, quam secundum naturam ad globulos sanguineos adhaesionem haberet, & quidem promptiorem ex frigore congelationem ad corium pleuriticum constituendum conferre, inde erui videtur, quod corium ad superiorem insulae faciem perpetuo adhaereat frigori magis expositam, quamquam corium ipsum sero gravius sit, tum ex eo etiam, quod hyeme corium frequentius occurrat. Majorem albuminosae partis proclivitatem ad cohaesionem ad crustam efformandam conferre ostendunt inflammatorii morbi, in quibus adest frequentissime, ejusque durities seri vim concrescibilem auctam esse testatur. Demum eo etiam spectare imminutam cruoris ad albuminosam partem seri adhaesionem innuere videntur scorbutus, cachexia, hydrops ipse, in quibus morbis aliquando ea alba crusta sanguinem obtegit (*s*).

10. Quum insulae cruorosae non lotae frusta in acido minerali, & alkohole immitterem similiter durescebant, alkalicis vero volatilibus non perinde solvebantur ac si lota fuissent; sed spiritus volatilis cruore tantum inficiebatur, grumus autem nigrior evadebat, ac integer perstabat (*t*). Ex quo constat cruorosos globulos, quibus fibrosa sanguinis

(*s*) Utramque hanc causam conjungit *Ill. Haller* in addendis T. VIII. Physiolog. pag. 142. 143.

(*t*) Eumdem eventum habuit experimentum *Ill. Halleri* T. II. Physiolog. pag. 81.

nis pars obvoluta est, impedire quominus ipsa salibus alkalicis volatilibus dissolvi possit.

11. Quod si sanguis e vena exiliens aqua excipiatur, aqua ipsa globuli sanguinei eluuntur, pars vero albuminosa seri sola fere concrescit in notissimos flocculos, qui tam pauco cruore colorantur, ut fere albidi sint; & quidem eos flocculos eamdem iterum naturam habere, ac corium pleuriticum, aut lotam cruorosam insulam deprehendi, alkohole nimirum indurari, ac in eodem immutatos perstare, spiritu volatili perfecte solvi, digestione in purulentum liquamen abire: perinde nimirum est sive cruorosi globuli per aquam, in quam sanguis e vena exilit, ita diffundantur, ut a concrescente albuminosa seri parte abripi non possint, sive jam abrepti, & cum eadem in insulam coacti repetita aquae affusione deinceps eluantur (7).

12. Ex eadem albuminosa seri parte materies constitui videtur ejus membranae, quae ruyschiana dicta est, quaeque ex concusso sanguine paratur. Sanguinem ab animalis vena intra vitream lagenam excipiebam, exceptum agitata phiala vehementer, ac diu quatiebam, mox fracta phiala, eumdem sanguinem in aliud vas transfundens, observabam totum illum fluidum, spumosum, & admodum coccineum esse, sed in eodem multa coagula dura, albidaque reperiebam, quae corium pleuriticum, & colore, & consistentia referre videbantur. Coagula haec easdem etiam proprietates retinebant, quas modo dictum pleuriticum corium: nam iisdem menstruis solvebantur, iisdem fluidis dura, ac incorrupta persistebant, & intra vas clausum digesta in simile putridum liquamen immutabantur.

13. Igitur ea ruyschiana membrana nihil aliud est nisi albuminosa seri pars, quae sponte concrescens agitatione impeditur, quominus globulos sanguineos secum abripiat; seu potius albuminosa pars, quae interea dum concrescit, intra serum sic eluitur per agitationem, ut globulos sangui-

neos

neos per ipſum diffundat, quo fit, ut & album colorem praeſeferat, & reliqu as albuminoſarum concretionum proprietates poſſideat. Quum vero globuli ſanguinei non cogantur niſi quatenus a coëunte ea albuminoſa parte abripiuntur, inde intelligitur, cur ſanguis a quo ruyſchiana membrana ſeparata eſt, ſolutus maneat (*u*). Quum nonniſi quaedam albuminis portio ſponte a ſero ſecedat, inde intelligitur, cur ſerum, a quo ea determinata albuminis portio jam ſeceſſit, aut quiete in inſulam coëuns, aut agitatione in membranam ruyſchianam abiens, coagulabilem ex acidis mineralibus, alkohole, igne naturam praeſeferat (*v*), etſi nihil ulterius membranae ruyſchianae per agitationem ex illo elici poſſit (*x*). Nempe id ſerum tantam adhuc albuminis quantitatem retinet, quantam ſolutam ſervare poteſt, hinc concreſcibilem naturam ſervat; nec tamen membranam ullam amplius poteſt ſuppeditare, quum ſponte nihil amplius ejus albuminoſae partis dimittere poſſit.

14. Ex his etiam intelligitur cur agitatus ſanguis nullum corium pleuriticum exhibeat, ex eo nempe quod albuminoſa pars, quae in corium fuiſſet coitura, agitatione in Ruyſchii membranam tranſeat. Intelligitur etiam albuminis portionem, quae educto ſanguine ſponte coaleſcit, & inſulam efformat (*y*) non tam defectu motus, quam frigore coire, quum agitato ſanguine ſimiliter ſecedat, & in ruyſchianam membranam immutetur, quod & allatis ſuperius obſervationibus confirmari videtur, & pro demonſtrato haberi poteſt, ſi modo verum ſit ſanguinem in calore animalis aſſervatum diutiſſime fluidum permanere (*z*).

15. Ex his omnibus conſequens erit fibroſam inſulae cruoroſae partem, concrementa, quae ſanguis in aquam emiſ-

(*u*) *Cl. De Haen* pag. 90. 91. 92.
(*v*) Idem loc. citat.
(*x*) Idem pag. 88. 89. & 93. 94.
(*y*) *Sydenham* de Pleuritide.
(*z*) *Schwencke* Haematol. pag. 90. 103. 105.

emissus facit, ruyschianam membranam, corium pleuriticum, unam eamdemque naturam praeseferre, & ex eadem albuminosa seri materie constitui: propterea arbitramur Auctores, qui a nostris discrepantia experimenta proposuerunt, & aut lotam cruorosam insulam, aut flocculos ex sanguine in calidam misso procreatos vini spiritu solvi adfirmarunt, aut eodem aqueo nimis usos fuisse, aut experimenta in apertis vasis instituisse, ut spirituosa parte abeunte, haec deinceps orta putredine sponte solverentur, aut aliqua alia ratione in errorem inductos fuisse. In variis enim experimentis, in quibus vini spiritum communem, nec probe rectificatum adhibuimus, constanter tamen varia ea coagula non secus ac corium pleuriticum indurari observavimus, & sic indurata a longo jam tempore in eo liquore integra servamus.

16. Placuit praeterea alkalinorum fixorum actionem in varias memoratas albuminosas concretiones per experimenta investigare, quum omnes spiritu volatili salis ammoniaci calce parato indiscriminatim solvi constitisset; at contra comperimus perinde omnes oleo tartari per deliquium non secus, ac vini spiritu induratas fuisse, diuque in eodem, quamvis calori digestionis expositas, immutatas perstitisse, ut censeam similiter, ac in vini spiritu, in eo liquore ad plures etiam annos integras posse servari.

17. Ex his ipsis, quae hactenus attulimus experimentis lucem aliquam oriri existimo ad eam quaestionem dirimendam inter Viros Cl. acriter nostris temporibus agitatam, num alkalica salia putredinem arceant, vel promoveant. Quae quidem quaestio vix poterat ex odore definiri, quum alkalicum fixum ex animalibus humoribus etiam sanis odorem extricet alkalini volatilis, volatile vero sal ipsum odore suo dubium relinquat, utrum odor corporis, cui admixtum fuit ipsi adscribendum sit, an novo volatili sali ex putredine orto. At cum certum sit serum per putre-

putredinem liquari, & coagulabilem indolem deponere, inde confirmari potest utrumque alkali putredinem impedire. Etenim in allatis experimentis pars seri gelatinosa liquore tartari indurescebat, & sic indurata in eodem diutissime persistebat, & licet in spiritu salis ammoniaci calce parato soluta satis diu servaretur, concrescibilem tamen indolem constanter servabat, quam dissipato per evaporationem alkali sponte concrescens ostendebat, ut propterea utrumque alkali inter antiseptica, & quidem actuosiora referri debeat.

18. Demum etiam aquae calcis actionem in crustam phlogisticam, aliasque albuminosas concretiones experimentis investigans comperi haud minus prompte ab hac, quam spiritu alkalino salis ammoniaci calce parato in tremulae gelatinae speciem primum conversas, mox perfecte dissolutas fuisse, adjecta aqua forti in pristinam albi coaguli speciem ad liquoris fundum iterum dejectas fuisse.

19. Cupiebam etiam salem sanguinis essentialem in aquea seri portione invenire. Quare aqueam eam portionem, tum congelatione (1) ab albuminosa separavi, tum a coagulato per ignem sero sponte extillantem excepi. Sed aut parciorem obtinui aquam, aut crassiorem, & turbidam, ut nihil inde ad propositum mihi finem exoriretur. Itaque alio rem eamdem tentamine adgressus sum. Noveram ex Haenio (z') serum in fervidam immissum lacteam ipsam reddere, nec ullum coagulum exhibere, quantumvis aqua ebulliat; conjectabam igitur futurum, ut si albuminosas seri partes per aquam sic dispersas ab eadem secernerem, mox aquosam partem debito modo evaporare finerem, salinae partis in eadem contentae crystallos obtinerem. At quum magnam aquae quantitatem, immisso in ipsam sero, per ebullitionem reddidissem lacteam, philtratione statim per

(z') Loc. citat. pag. 86. 87.

chartam adeptus equidem ſum limpidam, ac aqueam ſeri partem a concreſcibili ita ſegregatam, ut in igne evaporando concentrari poſſet; ſed quamvis ſic evaporata ſalſum admodum ſaporem adquireret, tamen frigido loco ſervata cryſtallos nunquam dimiſit; ex quo conjicere eſt ſalem ſanguinis nativum hujuſmodi eſſe, ut nunquam, aut aegre in cryſtallos concreſcat. Sed de hac re alias fortaſſe.

20. Duo reliqua mihi ſunt experimenta, quae breviter indicabo, alterum in animalibus ex nimio calore ſuffocatis, alterum in iis, quae inedia conſiciuntur. Quum enim ex his duobus cauſis Cl. Scriptores humorum putredinem induci, indeque ea animalia enecari tradiderint, idcirco opportunum cenſui eamdem rem experimento etiam meo explorare.

21. Duo cuniculi in hypocauſto ad 35° thermom. reaumuriani calefacto ex dyſpnaea, & virium proſtratione interierunt. Primus quidem ſpatio horarum XIII., alter horarum XVIII. Pulmones inflammati inventi ſunt, odor nullus foetidus, nec ſanguis, nec bilis cum acidis efferbuit. Feles robuſta in hypocauſto inter 38. & 40. ejuſdem therm. calefacto horis ſex interiit. Cuniculus alter, quum in eodem calore duabus horis permanſiſſet, vivus adhuc ex eodem eductus eſt, & brevi poſtea interiit: utrumque animal pulmones inflammatos oſtendit, neutrum vel foetuit, vel quodpiam aliud putredinis indicium praebuit. Conjectamus igitur Viros Cl., qui alium ſimilium experimentorum eventum ſortiti ſunt, forte animalia ad aliquod tempus in calente loco reliquiſſe poſtquam extincta eſſent, ubi mortuae carnes in corruptionem vergere citiſſime debuerunt: nec dubitamus calorem ex interna cauſa, auctoque motu natum, longe diverſum in animalium humores effectum gignere poſſe.

22. Illud exquirere volui, utrum animalia, quae inedia pereunt, orta humorum putredine extinguerentur. Quod

etſi

etsi pro certo a multis proponatur, dubia tamen de ea re Cl. Virorum me ad experimentum iterandum excitarunt (z''). Cuniculum itaque, quem fames intra dies 21. confecerat ex convulsionibus diligenter explorabam. In eo pinguedineam telam adipe destitutam, & exsuccam observavi; ventriculum, & intestina vacua, nisi quod in intestinis identidem flavae bilis ramenta occurrerent, viscera coetera sana erant. Odor nihil putredinosi emittebat, neque humores aut foetebant, aut cum acidis effervescebant; quare credibile est, aut in carnivoris animalibus alium futurum experimenti eventum, aut alias praeter inediam putredinis causas adjunctas fuisse, ut corrupta, & prava alimenta, quibus observata a Cl. Viris, quorum fides minime suspecta est, putredinis signa tribui possint.

(z'') *Morgagni* de caus. & sed. epist. 24. §. 6.

CAROLI ALLIONII

Stirpium aliquot descriptiones cum duorum novorum generum constitutione.

DESCRIPTIO PRIMA.

Ortegia *dichotoma, axillis ramorum unifloris* Tab. IV. f. 1.

EX radice perenni, longa, tereti, fibrosa cespes nascitur caulium procumbentium, qui ad cubitalem usque longitudinem sese extendunt. Caules continuo dichotomi, quandoque in primis ramis trichotomi, quadrangulares, striati, subasperi, virides, articulati, supra nodosi nodo aliquantum albescente.

Folia primum elliptica, deinde linearia, crassula, acuminata, sessilia, opposita, ad geniculos tantum nascuntur, subaspera, supra canaliculata, subtus longitudinali prominente nervulo donata.

Flos in alis dichotomiae ubique sedet, raro pedunculatus, cujus calyx noctu connivet, diu sole praesertim percussus aperitur, calycinis foliis erectis. Postremi rami duobus floribus finiuntur, uno sessili in ala una foliorum, altero pedunculato, sive ramum finiente, qui paullo infra calycem duas bracteas habet, foliolis ramorum divisionibus oppositis similes.

Calyx ex quinque foliolis concavis, elliptico-lanceolatis, viridibus, margine membranaceo albicantibus componitur. Calycis foliolorum tria interiora florem proprie continent, & longiora sunt; folia duo exteriora aliquantum breviora.

Germen trigonum est instructum stylo viridi, simplici embryonis longitudinem habente, cum stigmate rotundo.

Antherae

Antherae luteae, trigonae, trisulcatae in gremio interiorum foliorum brevibus filamentis insident, calyce breviores, stylo parum altiores.

Capsula calyce persistente comprehensa, & ex ovato conica, apice trigona, tribus valvis aperitur, unilocularis, semina minuta continens oblonga coloris spadicei.

In saxosis prope *Javenium* nascitur nova haec *Ortegiae* species, cujus nullam mentionem apud rei herbariae Scriptores reperire licuit. Differt porro ab *Ortegia* LINNAEI spec. *plant. pag.* 49. sive *Juncaria Salmantica* CLUS. *hist. pag. CLXXIV.* radice perenni, habitu dichotomo, floribus in foliorum alis sessilibus, & caulibus quadrangularibus, qui in *Juncaria Salmaticensi* Juncorum ad instar teretes esse videntur, quemadmodum ex Clusiana Icone conjicere licet.

DESCRIPTIO II.

BASSIA *Tab. IV. f.* 2.

NOvum hoc plantae genus, cui *Bassiae* nomen instituo, radicem teretem, ramosam, fibrosam, perennem habet, caulem autem rotundum, parum firmum, continuo, & sine ordine ramosum, ramis iterum similiter ramosis. Primi caulis rami fere decumbunt. Tota planta villo hirsuta est. Ejus altitudo spithamam unam aut alteram ad summum aequat.

Folia lanceolato-linearia sunt, crassula, compressa, sessilia, alterne, seu potius inordinatim dense posita. Duo autem simul nasci solent, quorum unum duplo longius est, in cujus ala duo flores sessiles adsunt; alterum brevius cum flore uno sessili, & foliorum fasciculo novum ramum facturo.

Flores omnes sessiles sunt in foliorum alis. Flos apetalus; calyx monophyllus, quinquefidus segmentis acutis.

Sta-

Stamina quinque antheras luteas, didymas ſupra calycem exerunt.

Styli duo filiformes ex albo purpurei ex embryone naſcuntur.

Floreſcentia autem abſoluta calycis ſegmenta complanata & coaleſcentia florem claudunt, atque calyx capſula evadit, quae matura ſemen orbiculatum continet obſcuri coloris, non cochleatum, ſed in ſuperiori facie circularem ſulcum inſculptum habens. Ea proportione, qua embryo majorem magnitudinem acquirit, receptaculum in majorem amplitudinem extenditur, & ad baſim calycis quinque apparent flaveſcentes ſpinulae aequali diſtantia inter ſe poſitae. Calycis & receptaculi ſubſtantia firma & coriacea reddita fructum rotundum efficit complanatum, quinque firmulas ſpinas ex ambitu ſtellae in modum radiatas habentem.

Stirpis hujuſce genus inter *chenopodium* & *ſalſolam* ambigit. Ab utroque autem differt ſingulari praeſertim calycis in capſulam mutatione. Quamobrem cum ſui proprii generis conſtitutionem mereri videretur, *Baſſiam* appellandam cenſui in perpetuum amicitiae, gratitudinis, & exiſtimationis monumentum erga doctiſſimum Ferdinandum Bassium Bononienſem, Virum de univerſali naturali Hiſtoria maxime meritum, qui hujuſce plantae ſemina a praeclariſſimo Viro Vitaliano Donati in Aegypto collecta, & in Italiam miſſa benevole communicavit.

DESCRIPTIO III.

Lindernia *Tab. V. fig. 1.*

Plantae quam *Linderniae* nomine voco, radix annua eſt, & ex capillitio teretium albarum fibrarum, modo ſimplicium, modo ramoſarum conſtituitur, ex quo nunc unus, nunc plures caules naſcuntur, qui ſpithamae altitudinem raro

ro attingunt. Ad caulis initium duo oppositi rami saepe proveniunt; reliquo deinde caule & ramis saepius simplicibus: Caules tetragoni sunt, tenuiter striati, angulis acutis, intus cavi, sexdecim circiter membranas habentes, quae ex axe caulis radiatim nascuntur. Planta tota, tenera, succosa, glabra, & viridis est.

Folia opposita, integerrima, erecto-patentia, oblongo ovata, semi-amplexicaulia, sessilia, tribus aut quinque nervis in inferiori facie extantibus exarata, quae non male *Centaurii minoris* foliis comparari possunt; sed longe tenerioris substantiae sunt. Ex singulis alis foliorum pedunculus erigitur quadrangularis, foliorum circiter longitudine, florem sustinens.

Calyx ex quinque erectis linearibus foliolis fit, ex viridi purpurascentibus, acutis, & a tubo floris vix secedentibus.

Flos dilute purpureus, bilabiatus, tubo floris pene cylindrico: hiatus floris parvus. Labium superius admodum breve, parum concavum, bifidum segmentis subrotundis. Ab eo modice discedit labium inferius, quod recte fere protenditur, magnum, profunde trifidum segmentis rotundis, medio aliquantum majori.

Stamina quatuor ex tubo floris prope orificium orta: duo superiora simplicia, atque sub labio superiori inflexa, duo inferiora, sive infra superiora prope orificium floris nata ex nervo evidentiori, qui ex imo tubo floris nascitur, qui originem dat filamento uno antherifero, qui nempe inflectitur sub labio superiori, dum nervi producti extremitas recta procedens, & a tubo libera facta cornu simplex exhibet sterile, anthera omni destitutum, coloris dilute lutescentis.

Antherae sunt didymae, transversim positae, ex cinereo purpureae.

Stylus filiformis antheris immediate tectus, simplex, apice obscure bifido.

Embryo

Embryo in capsulam evadit viridem, ovalem, oblongam, calyce comprehensam, unilocularem commissurae loco sulco & linea aliquantum rubente signato, semina minima numerosa sordida albida continentem, cylindricae placentae affixa.

Pluribus locis collecta est rarissima haec planta in *Pedemontio*; incolit vero loca spongiosa & palustria, & quae aquis inundata fuerunt. Secus *Sesiam* non longe ab urbe *Vercellarum* nascitur. Legi etiam circa *Frosascum* in palustribus, uti etiam circa *la Marsaja*. Stirpem hanc collegerunt optimi mei discipuli & strenui Botanicas cultores, nunc Medicorum Collegio adscripti, Petrus DANA, & Ludovicus BELARDI, quorum prior circa *Envie*, & in finibus *Bargiarum*, alter autem circa lacum di *Majon*, & inter *Gijani* & *Candeil* plantam hanc copiose nasci observarunt. Solet autem saepe oriri iisdem locis, quibus *Isnardia* provenit. In America quoque hanc stirpem crescere in literis postremo ad me datis significavit Celeb. LINNAEUS, ad quem olim hujusce plantae specimen misi, & suspicatur hujusce plantae semina cum oryza in Europa venisse.

Nova haec planta non est, sed a LINDERNIO breviter etiam cum icone descripta. In *Tournefortii alsatici* editione pro novo genere oblata primum est *pyxidariae* nomine, deinde in Horto alsatico dicta est *Alsinoides paludosa foliis anagallidi similibus flosculis monopetalis rubescentibus capsula oblonga*. Una cum Cl. LINDERN circa Argentoratum anno 1727. legit elegantem hanc stirpem indefessus stirpium indagator D. GAGNEBIN, cujus specimen etiam benevole ad me misit aliquot ab hinc annis una cum schedula continente ea, quae habet LINDERNIUS, & brevem illam descriptionem, quam in *flora Irenensi pag.* 237. adjecit Doctissimus HALLERUS. Ipse quidem GAGNEBIN *antirrhinum* etiam *palustre minus centaurii minoris foliis* appellavit, sed animadvertit sui generis plantam esse, eamque *Linderniam*

posse

posse vocari. In honorem itaque Cl. LINDERN *Linderniam* appello, sublato *pyxidariae* nomine, quo filicinum plantae genus recentiores Botanici designarunt.

Erit itaque *Lindernia* plantae genus flore bilabiato labio superiore brevi, concavo; inferiori magno trifido, staminibus quatuor instructum, quorum inferiora bifurcata sunt, unum stylum habens, & fructum ferens unilocularem, polyspermum.

Quod attinet ad vires medicas nihil certi statuere licet. Loci natalis conditio, & totius plantae habitus, ejusdemque sapor cum *gratiola* conveniens similes purgantes vires suadet, quod instituenda experimenta decernent.

DESCRIPTIO IV.

VIOLA *acaulis fol. palmato multifidis, & lacinniatis.*
Tab. V. fig. 2.

RAra haec Violae species, atque a paucis Botanicis visa, quae apud nos reperta est in jugo *assiette*, ex radice tereti, longa, ramosa, alba, perenni, folia atque flores protrudit instar violae martiae. Foliorum petioli unciales fere sunt, semiteretes, intus sulcati, atque extus extante nervo praediti, qui deinde per omnes foliorum lacinias porrigitur.

Folia subrotunda sunt laevia, ultra medium quinquefida, substantiae firmulae, superius obscure & nitide, subtus pallide virentia. Foliorum lobi posteriores profunde & inaequaliter trifidi, medii simplices & tantum in exteriore facie dentati, medius & extremus lobus omnium maximus, in tria subaequalia segmenta profunda trifidus, lateralibus laciniis saepe exterius dentatis. Laciniae omnes lineares fere sunt obtuso fine reflexae, patentes, & divergentes. Haec est frequentior forma foliorum, sed eadem vario ludunt mo-

do; nempe lobi posteriores bifidi interdum sunt, modo medii & majoris lobi segmenta iterum magis aut minus profunde resecta sunt. Deficit quandoque etiam unus ex mediis lobis. Alias loborum posteriorum segmenta profunde ita secta sunt, ut ex novem lobis folia composita videantur.

Scapi florales inter folia eriguntur, petiolis breviores, & a foliis ipsis saepius tecti duas oppositas squamas, sive bracteas supra sui medium habentes; purpuro virent, teretes, leviter striati, prope florem aliquantum complanati.

Flos nutat. Calyx viridis, conicus, ex quinque foliolis onniventibus compositus, gibbis, ovatis, acutiusculis.

Petala quinque in perfectis exemplaribus, sed saepius tria aut bina, inter calycis & germinis basim nascuntur, unguibus linearibus, pellucidis, germini appressis, quae, ubi in bracteas expanduntur, quinque antheras albidas, bifidas habent, quae supra germen coronae instar tubam circundant. Bractea ovato acutiuscula est concava, & cochleari formis apice reflexo & emarginato ex flavo purpurascente colore tincta, margine albo. Petala supra germen elata, conniventia, ipsum obtegunt.

Stylus simplex brevis cylindricus, cum stigmate barbato, crasso, arcuato, albido, albo staminum pulvere saepe conspersus.

Embryo in magnam capsulam excrescit propendentem, & versus terram incurvato scapulo reflexam de more reliquarum violarum, quae trigona est, obtusa, trivalvis, cordata, semina laevia ovata obscure purpurea quindecim & ultra continens.

Haec violae species fortasse eadem erit cum *Viola montana folio multifido* Clus. *hist. pag.* 301. & Bauh. *hist. III. pag.* 545. sive *Viola acauli foliis pinnatifidis* Linn. *spec. pl.* 1323., quam nuperrime cum brevi descriptione recensuit inter helveticas stirpes Celeb. Hallerus *emend. VI. n.* 61. Nonnulla quidem sunt huic Violae ab Auctoribus

tributa,

tributa, quae cum noſtra Viola non conſentiunt; numquam enim folia habet in decem anguſta ſegmenta ad pediculum diſciſſa, ut refert J. BAUHINUS, & icone exhibet. Praecl. HALLERUS ſuae Violae folia, ex tribus paribus pinnarum componi affirmat, & flores ad Violam martiam accedere. Non auſim tamen ſeparare, cum ſciam hujuſmodi folia lobata, & multifida pro ratione locorum diſſimilem faciem exhibere, atque minima noſtrae Violae petala poſſe aliis in locis majorem fortaſſe amplitudinem obtinere. Cum itaque unice extet Bauhiniana icon, quae rudis & imperfecta eſt, opportunum viſum eſt raram hanc ſtirpem & accurate deſcribere, & ejuſdem iconem exhibere.

Explicatio Tabularum ad has deſcriptiones pertinentium.

Tab. IV. fig. 1. ORTEGIA

a Flos per microſcopium auctus, ut ſtamina magis pateant.
b Filamentum cum anthera.
c Flos naturalis magnitudinis.
d Embryo cum ſtylo in magnitudine auctus.
e Capſula naturalis magnitudinis.

Tab. IV. fig. 2. BASSIA

a Flos per microſcopium auctus, ut ſtamina videantur.
b Stamen ſeparatum.
c Calyx in naturali ſua magnitudine.
d Semen in ſua magnitudine per microſcopium auctum.
e Semen a folliculo ſuo ſeparatum.

Tab. V.

Tab. V. fig. 1. LINDERNIA

a Floris labium inferius cum portione tubi, ut appareant ſtamina inferiora biſurcata.

b Fructus ſive capſula.

c Fructus apertus cum ſeminibus placentae affixis.

Tab. V. fig. 2. VIOLA acaulis, foliis palmato-multifidis, & laciniatis.

a Embryo jam grandior factus cum petalis: omnia in ſua magnitudine per microſcopium aucta.

b Petalum cum anthera microſcopio auctum.

c Folium ſeparatim exhibitum, ſicuti ſolet frequentius eſſe.

Plantae omnes praeter floris partes in naturali ſua magnitudine pictae ſunt.

MANIPULUS
INSECTORUM TAURINENSIUM
A CAROLO ALLIONIO
EDITUS.

MANIPULUS hic insectorum pertinet ad Cl. Virum Ottonem Fridericum MÜLLER, Danum, Acad. Imp. Nat. Cur., Societ. Scient. Boicae, & Helveticae Sodalem. Cl. hic Vir per Italiam litterarium iter facturus cum in hanc Urbem venisset, rerum hujusce regionis ad historiam naturalem pertinentium feracitate excitatus, insectorum, atque etiam novorum non exiguam copiam in nostra patria adesse ratus, me quammaxime hortatus est, ut vellem hanc etiam naturalis historiae partem excolere, atque insecta colligere, quod per optimorum discipulorum naturalis historiae studio deditorum operam fieri curabo. Ipse autem per loca quaedam a me ipsi indicata, uti per colliculum Cappucinorum, & secus fl. Duriam aliquot ambulationes proxime elapsi Julii postremis diebus suscepit, excursionum comite Petro DANA meo discipulo, & diligenti naturalis historiae cultore, cum optimum virum, quod gratissimum certo fuisset, sequi non possem clinicis curis impeditus. Paucae vero ambulationes cum summa Cl. Viri oblectatione obtulere non pauca insecta, & ipse gavisus plurimum est se reperiisse in nostra regione Fridrichsdalina, Lapponica, Aegyptia, imo etiam Americana; tum etiam quaedam, quae minus nota, ac nova sunt. Manipulum itaque sollicite conscripsit, quem Commentariis nostris adjicio, ut rem gratam, utilemque naturalis historiae amatoribus faciam. In hoc autem manipulo ita recensentur collecta insecta, ut quae jam definita sunt, nominibus tantum tri-

vialibus erutis ex Perillustris LINNAEI *Sist. natur. ed.* 10. Ejusdem *Fauna Suecica*, & *Fauna sua Fridrichsdalina* indicentur; quae autem nova, aut minus nota sunt, ad sua genera cum brevi descriptione referantur.

COLEOPTERA.

SCARABAEUS *auratus*

variabilis.

cervus.

virens, muticus capite thoraceque glabris, aeneis: elytris rugoso-testaceis: pedibus nigris.

Totus glaber, sed pectus villosum. Color capitis, thoracisque punctis minimis excavati ex aeneo viridis, uti quoque scutellum, & sutura elytrorum. Abdomen lateribus maculis pallidis, subtus glaberrimum.

DERMESTES *mollis.*

stercoreus.

SILPHA *atrata.*

CASSIDA *viridis.*

COCCINELLA 2. *punctata.*

5. *punctata.*

7. *punctata.*

9. *punctata.*

13. *punctata.*

22. *punctata.*

2. *pustulata.*

CHRYSOMELA *graminis*

alni.

nympheae.

staphyleae.

CHRY-

CHRYSOMELA *populi.*

merdigera.

4. *punctata.*

Taurinensis, cylindrica, atra: elytris luteis, punctis sex nigris.

Elytra marginata flava, versus basim cujusvis punctum unicum nigrum, in medio duo.

luteola, oblonga, lutea: thorace bipunctato: elytris fascia longitudinali nigra.

Caput, thorax, elytra, pedes lutei; in fronte duo puncta, in thorace utrinque unum, in quovis elytro fascia lata, nigra. Oculi & antennae fusca. Abdomen nigrum, puncta duo obsoleta basim elytrorum versus.

CURCULIO *scrophulariae.*

crassus, brevirostris, niger: elytris convexis striatis.

Totus niger. Thorax globosus punctis elevatis; in cujusvis elytrorum striae cavitate series una punctorum distinctorum.

centaureae, brevirostris, oblongus, griseus: elytrorum fasciis duabus obliquis fuscis.

Inter majores est. Totus griseus, punctis elevatis, nigris, inaequalibus sparsus. Puncta haec faciunt, ubi pilis minimis obsita, colorem griseum, ubi glabra, subfuscum; hinc fasciae duae obliquae fuscae in quovis elytro formam duplicis V. mentientes.

ATTELABUS *coryli.*

apiarius.

CERAMBYX *cerdo*

textor.

moschatus.

linearis.

sartor, niger, thorace mutico subgloboso: elytris fuscis, lineolis, punctoque albis.

Minor: nigra sunt caput, thorax, oculi, antennae, pedes; elytra fusca; apice, lineaque media obliqua curva, ac basi puncto, lineolisque duabus albis, minimis.

LEPTURA *attenuata.*

melanura.

necydalea.

Thorax subglobosus punctis quatuor nitidis; margo elytrorum non purpureus; femora antica elevata nigra, reliqua ferruginea.

marginata, nigra thorace subgloboso: elytris subulatis utrinque marginatis lutescentibus.

Animalculum totum nigrum, elytris exceptis, quae flava, abdomineque breviora.

varia, thorace globoso, elytrisque flavo-virentibus: fasciis nigris.

Caput, thorax, abdomen, elytra flavo-virentia, in quibusdam individuis cinerea; in thorace fascia transversa nigra; ad basim elytri figura C, *medioque duae fasciae nigrae. Pedes nigricantes. Antennae nigrae.*

CANTHARIS *melanura.*

sanguinea.

viridissima.

In quibusdam femora postica valde crassa.

CANTHARIS *tomentosa*, nigra, thorace, teretiusculo: elytris tomentosis fuscis.

Tota nigra. Elytra sola luteofusca subpilosa, ad lentem striata.

ELATER *aterrimus.*

ferrugineus.

badius.

CICINDELA *campestris.*

BUPRESTIS *nitidula.*

octo-maculata nigra: elytris maculis octo aureis.

Thorax glaberrimus, nitidus, niger; antennae, pedesque primi lutei. Elytra striato-punctata, basi macula curvata, medio subquadratae duae, quarum infima basim versus extenditur; apice macula reniformis fulva.

MORDELLA *aculeata.*

paradoxa, antennis pectinatis: capite, thorace, elytrisque luteis.

Thorax haud postice trilobus, nec elytra apice nigra. Abdomen truncatum segmentis omnibus margine, & dorso nigris. Pedes nigri, femora posteriorum uti & articuli plantarum basi lutea; varietatem tamen ejus, quae in Fauna Svec. desscribitur, credo.

STAPHYLINUS *niger.*

FORFICULA *auricularia.*

BLATTA *Lapponica.*

GRILLUS *viridissimus.*

verrucivorus.

rufus.

viridulus.

GRILLUS *bifasciatus* thorace subcarinato, rugosus: elytris griseis: fasciis duabus fuscis.

Color ex ruso-griseus. Caput & thorax rugosa. Pectus & abdomen subtus punctis sparsis fuscis. Antennae fuscae thorace paullo longiores. Elytra albidiora fascia altera in medio, altera media inter hanc & thoracem fuscis. Alae caerulescentes fascia nigra, apice albae.

caeruleus, thorace subquadrato: maculis, & punctis ubique caerulescentibus.

Color griseus, capite, thorace, basi elytrorum, pedibus, & dorso abdominis, ut Lucius elixus, caerulaeus. Alae hyalinae basi caeruleae. Antennae griseo, & caeruleo annulatae, thorace paullo longiores.

HEMIPTERA.

CIMEX *annulatus.*
marginatus.
haemorrhoidalis.
pabulinus.
laevigatus.
hyoscyami.
equestris.
griseus.
baccarum.

Italicus, sanguineus, scutello longitudine abdominis: subtus maculis, supra fasciis longitudinalibus nigris.

Ruber, in thorace sex fasciae longitudinales, in scutello quatuor nigrae, abdomi-

dominisque margo & inferior pagina nigro, & rubro variegata. Alae superiores apice nigrae, inferiores nigricantes.

4. *punctatus*, oblongus, lamina thoracis elystrisque luteo-testaceis: maculis quatuor nigris.

Caput, thorax, abdomen, scutellum subcaerulea; puncta duo nigra in thorace, huic adjacet lamina utrinque macula nigra. Elytra lutescentia, margine lineola, apice macula alba, cui nigra contigua est. Apice elytri membranaceo punctum quoque album. Pedes flavescentes; femorum apex niger.

Segusinus, antennis apice capillaribus: corpore oblongo nigro: elytrorum apicibus coccineis.

Totus niger, glaber; apice elytri macula coccinea, extremo apicis nigro. Pedes flavescentes, basis femorum nigra.

APHIS *jaceae.*

LEPIDOPTERA.

PAPILIO *Jo.*
Ajax.
Machaon.
Atalanta.
Antiopa.
Maera.
Galathea.
Cardui.
Rhamni.
Brassicae.

PAPI-

PAPILIO *Jurtina.*
Janira.
C album.
Hyale.
Aegeria.
Prorſa.
Urticae.
Lucina.
Cinxia.
Lathonia.
Arion.
Argiolus.
Idas.
Comma.
Malvae.
Tages.

Linea, alis integerrimis divaricatis fulvis immaculatis: primoribus ſupra lineola nigra.

Similis Pap. Comma, *at prorſus immaculatus.*

SPHINX *Populi.*
Stellatarum.
Porcellus.
Filipendulae.

Virginea, alis ſuperioribus cyaneis: maculis quinque, punctiſque totidem rubris albo marginatis.

Similis Filipendulae. *Alae inferiores coccineae, margine exteriori caeruleo, inferiori teſtaceo; differt tamen thorace virenti, margine collarique duplici albo, maculis punctiſque rubris peripheria alba cinctis. Puncta haec numero quinque occupant*

cupant locum sextae maculae Filipendulae *versus apicem alae.*

SPHINX *ligata*, alis omnibus nigris albo maculatis: abdominis fascia duplici aurea.

Antennae apice albido. Abdomen ceruleum basim, & medium versus fascia aurea. Macula aurea in claviculis 4. posticorum pedum.

variegata abdomine barbato: alis hyalinis, margine ferrugineis.

Segmentum abdominis primum; & secundum viridia, quartum, & quintum ferruginea, quintum, & sextum lutea, barba laterali horum alba, terminali nigra. Abdomen subtus ferrugineum. Thorax, & caput viridia. Pectus album. Antennae nigrae. Alae albae, pellucidae, margine ferrugineo.

PHALAENA *Caja.*
salicis.
plantaginis.
ypsilon.
pacta.
grossulariata.
glaucinalis.
verticalis.
purpuralis.
atomaria.
viridana.
trigonella.
Swamerdamella.
pentadactyla.

NEU-

ICHNEUMON *comitator.*

punctator, niger, abdomine ſubtus albido bifariam punctato; pedibus ſubflavis.

Niger immaculatus. Abdomen ſubtus albidum punctis utrinque quatuor nigris. Pedes luteſcentes.

SPHEX *ſabuloſa.*

Aegyptia.

VESPA *coarctata.*

quinquefaſciata, nigra, thorace lineis punctiſque, abdomine faſciis quinque, punctiſque quatuor luteis.

Apex antennarum, & pedes fulvi; femora baſi nigra; in baſi thoracis, alaſque verſus lineolae. Dorſo puncta quatuor, lateribus utrinque unum; verſus juncturam abdominis loco ſcutelli tres lineae, quarum ſuperior tranſverſa in quibuſdam interrupta, flava; in ipſa junctura abdominis maculae duae flavae. Abdominis faſciae quinque inciſae, quarum prima remota dorſum tantum occupat; quatuorque puncta lutea, duo majora inter primam, & ſecundam faſciam; minora in baſi abdominis. Apex quoque luteus. Datur varietas duplo minor.

horticola, nigra thorace lineola, punctiſque duobus: abdomine faſciis quinque interruptis, pedibuſque luteis.

Antennae fulvae; lineola interrupta baſi thoracis; integra inter alas.

6. *maculata*, nigra, thorace immaculato: abdomine maculis 6. albis; alis baſi fulvis.

Tota

Tota atra, punctis excavatis hirta, parum hirsuta. Ocelli nulli. Addominis segmenti 2.i & 3.i dorso maculae 4. magnae aequales, 4.i duae minores albidae. Alae umbraticae a basi ad medium aureae.

APIS *manicata.*

succincta.

truncorum.

hortorum.

pratorum.

terrestris.

lapidaria.

acervorum.

muscorum.

insubrica, nigra nitida: alis caeruleis nitentibus.

Maxima. Tota nigra glabra. Margo thoracis, pectus, abdomen subtus, ac pedes parum hirsuta; tarsi posticorum hirsutissimi. Alae pulcherrimae Iridis colore caeruleo; nitentes, lumini obversae saturate fuscae.

fulva, hirsuta nigra: thorace abdomineque fulvis.

paludosa, hirsuta nigra: thorace antice, ac postice, abdomine antice flavis: ano albido.

Tota hirsuta atra; Thorax margine antico, & postico, abdomen antico luteo. Segmentum penultimum, ac antepenultimum abdominis lutescentia; apex niger.

FORMICA *Herculeana.*

fusca.

DIPTERA.

TIPULA *crocata.*
MUSCA *arbustorum.*
menthastri.
noctiluca.
carnaria.
domestica.
cadaverina.
scolopacea.
mellina.
valentina, antennis plumatis glabra: thorace ferrugineo: abdomine flavo cingulis duobus nigris.

Magna. Frons cornea flava. Oculi fusci. Thorax, & scutellum ferruginea, nitida setis nigris cincta. Pedes obscurius ferruginei. Abdomen flavum marginibus primi, & secundi segmenti nigris; subtus fasciae nigrae. Alae fulvescentes.

cincta, antennis setariis pilosa, thorace caerulescente: abdomine ferrugineo: linea dorsali nigra.

Os argenteum. Thorax niger, glaber lineis tribus lacteis. Abdomen ovatum setosum, ferrugineum, dorso linea longitudinali interrupta nigra, medio cinctum lineola alba certo situ visibili. Pedes nigri femora flavescentia.

CULEX *pipiens.*
ASILUS *forcipatus.*
tipuloides.

APTERA.

TERMES *fatidicum.*
ACARUS *gymnopterorum.*

JOH.

JOH. PETRI MARIAE DANA

De Hirudinis nova specie, noxa, remediisque adhibendis.

HIRUDO *alpina, nigricans, ventre, ad medium bilineato, explanato, corpore ab ore, & cauda nulla depressione distincto* Tab. VI. fig. 1. ad 6.

ANimalculum est vulgarem Hirudinem habitu quadantenus referens, sed multo eadem constantissime minus, duarum linearum longitudinem in summo incremento non excedens, latitudinem linearem raro superans, crassitie lineam non attingens; quod non exiguam mutationem in motu progressivo subit. Primo enim brevius factum veluti in hemisphaerium parumper oblongum intumescit; postea porrectum, & extensum valde oblongam formam acquirit.

Faciem ejusdem superiorem convexam *dorsum* appellabimus: inferiorem complanatam *ventrem* dicemus: attenuatum extremum, quod in motu progressivo anterius reperiri solet *oris*; quod vero posterius *caudae* nomine, licet improprio, designabimus. Motum illum quo decurtatur, *contractionis*, quo autem extenditur, & porrigitur, *distensionis* seu *extensionis* nomine vocabimus. *In Tab. VI. fig. I.* animalis non contracti dorsum, *fig.* 2. ejusdem venter, *fig.* 3. ejusdem contracti dorsum, sed omnia naturali magnitudine exhibentur. Similia ostendunt *fig.* 4., 5., & 6., sed magnitudine per microscopium adaucta.

Animaculi non contracti (*Vid. fig.* 1., *&* 4.) dorsum universum primo aspectu lucido-nigrescens apparet. At, si attente observetur in media, elatiorique parte intensius nigrescit, quam versus margines, ubi sensim sensimque niger color in griseum obscuriorem transit. Quod si oculorum acies lentis vitreae adjumento intendatur, e fundo, ut ajunt, gri-

dam, vel os figere posset. Tunc facile in pronum, naturalemque situm restituebatur, unde facile motus suos progressivos libere absolvebat.

Multiplici ratione hujus hirudinis corpus dissecui, omnibus partibus diligenter examinatis microscropii octies multiplicantis auxilio. Nihil aliud autem in ipso detegere potui praeter tubum tenuissimum, pellucidum, & intestinulorum more per interiora, innumeris circumvolutionibus factis, serpentem, qui resectus pellucidum humorem plorabat. Post quatuor aut quinque horae minuta hujusmodi tubulus motus aliquos contractiles adhuc servabat. Viginti minutorum spatio Hirudo omnis arefacta nihil organici praeseferebat. Imo Hirudulae aliae integrae super calentem a Sole lapidem per semihoram expositae, ita exsiccatae sunt, ut ad nihilum fere redactae viderentur, in sui vestigium exsuccam tenuem pelliculam supra lapidem relinquentes. Manibus quoque paullo diutius contrectatae, aut asservatae cito exsiccabantur. Caeterum fere gelatinosa valdeque tenera animalculi interior substantia membrana tenui, & debili obtegitur, quae separata pellucescit, sed, dum contentis referta est, opaca apparet, & obscurior.

Inter Hirudines recenseo licet cum notis a Celeb. LINNAEO generi Hirudinis assignatis non plane consentiat. Neutiquam enim habet os, aut caudam in orbiculum expandendam, sed habitus omnis, formaque Hirudinis speciem esse declarat.

Augusto mense habitantem vidi in fundo alpinorum fontium, quotquot fere editiores, & Soli minus expositos secus viam invenimus, qua a R. P. Cistercienfium Monasterio per alpes, & sylvas ad Garexium itur. Neque infrequens etiam invenitur in vicinis, editisque alpibus ad Garexii Commune proprie pertinentibus versus *le Caranque*, & *Basifol*. Supra adversas quoque alpes *Bric d' Mindin* dictas non raro occurrere notatum est. In reliquis vero ejusdem loci

mon-

montibus, & alpibus, in conterminis Ulmetanis, in Apenninis Ligurum proximis, nec non in caeteris Ulmetae, Tendae, Brigaeque ad Carlinum, & Viosennam fertilissimis, quas deinde, plantarum exquirendarum caussa, conscendimus, alpibus, nullibi harum Hirudinum aliquam reperire potuimus; quamquam acquisitae notitiae non immemores fontes singulos, quos offendimus, ideo diligenter inspexerimus.

Vernacula lingua apud eos alpicolas hae Hirudines dicuntur *le Sioure*, aut *Soûre*. Notissimae autem cuique ibi sunt, atque ab iis quam maxime cavent, cum vetusta, & malis eventibus nimium confirmata apud ipsos, observatione constet, tum pecoribus, tum hominibus adeo infensa haec animalcula esse, ut certam necem afferant, si incaute cum aqua deglutiantur, nisi prompte auxilium afferatur. Quamobrem solent non sine cautela horum fontium aquam bibere; aut enim prius accuratissime ab his animalculis mundant; aut, ut omne periculum tutius effugiant, cum eadem in sabuloso fundo vivant, profundius fontem excavant, & aquarum commotionem avertentes ex summo fonte hauriunt. Eadem adhibita cautela pecora ad fontes adducuntur.

Singulari harum Hirudinum specie, earumque noxa perculsus, diligentissime ab alpicolis sum sciscitatus ea omnia, quae longa observatio eosdem docuerat, atque animadverti fuisse singulos hac in re consentientes. Symptomata itaque, quae ex eorum communicatis notionibus collegi, haec sunt: AEgri hujusmodi primum conqueruntur post ingestionem animalculi de quodam sensu rosionis, terebrationis in ventriculo. Ventris totius tormina adeo acerba cum vomendi conatibus accedunt, ut, manibus ventri continuo appressis, & inflexo trunco, ipsum adsidue comprimere cogantur ad doloris atrocitatem aliquomodo diminuendam. Aliqui vehementer adeo memoratis doloribus torquentur, ut neque stare, neque se erigere, multoque minus domum redire

queant

queant, sed in terram saepe concidant: aestus dolorifici sensum in ventre percipiunt; dentibus saepe strident; exagitantur; concutiuntur; frigescunt; cum furore per intervalla delirant; singultiunt; vomunt; vultu livent. Alii protinus toto corpore post refrigerationem convelluntur vehementissime, & incalescunt. Omnes sudore, ac frigore demum superveniente, moriuntur, saepiusque ne integro quidem elapso die miserrime pereunt. Aliqui, licet rarius, diem alteram attingunt.

Atque haec ita quidem contingere visa sunt, si absque remediis aegri perierunt. At ubi paullo serius remedia opportuna exhibita sunt, pleraque morbi symptomata mitiora quidem fieri, alia vero plane tolli observatum est; difficile tamen, & tarde sanitas perfecta, & pristina reddita est.

Caeterum e mortis faucibus fere omnes ereptos generatim asserunt, quibus sal, vel oleum, & agarium prompte dari potuerint, quae ideo tamquam antidota ab ipsis reputantur, ut maximum vitae periculum in mora positum declinetur. Paucissimos enim absque remediis, vel ob loci distantiam, vel ob sociorum defectum id fuerit, servatos fuisse norunt; eosque nonnisi post convulsiones, & mentis alienationes, iisdem postridie remittentibus, domum redire potuisse, & difficile convaluisse retulerunt.

Agarium quod pertinet apud ipsos remedium est prae vicinorum laricum copia vulgatissimum. Ideo exsiccatum domi servare, & in pulmento cum pipere mixtum in omnibus fere morbis indiscriminatim adhibere solent. Non infrequenter ut perpurgentur, & vomant, cum oleo, rarius vero cum lacte miscent. Nihil exinde mirum, si contra Hirudinis descriptae noxas similiter adhibuerint; si ejusdem vim, tamquam omnium efficacissimi antidoti, experimentis dudum probatam, unanimes extollant.

Salis communis in similibus casibus utilitates eximias aliqui retulerunt, & Chirurgus ipse confirmavit; rarius tamen

nec

nec nisi agarici, & aliorum defectu in hominibus usu venisse intellexi.

Sola aqua tepida, lactis sero, vel lacte copiose, & prompte ingestis propter reliquorum defectum tanta illa symptomata plerumque mitescere observarunt; non tamen cuncta, quemadmodum ab agarico, tolli deprehenderunt; imo saepius exinde nonnisi post menses aegros sanitati restitui ajunt, quo tempore cum ciborum inappetentia, & languore, ventris tumore, & levi dolore, inertes, & excolores vitam degunt.

Haec praecipua sunt, quae ex veridicorum hominum consentientibus responsionibus collegi, atque publici juris facienda esse putavi, tum ut iter per eas regiones facientes ab iisdem caveant, opemque, si opus fuerit, necessariam noscant; tum quod existimaverim hujusce Hirudinis Historiam omnibus rerum naturalium studii cultoribus acceptam esse futuram.

Huic commentariolo aliud adjungam, quod agit de aliquot animalibus, quæ vulgo *Urticae marinae* dicuntur. Has porro omnes observationes institui in postremo botanico itinere, quod, favente Excellentissimo, & Amplissimo Marchione CAISSOTTI Supremo rei literariae universae Moderatore, per extremas apenninas alpes suscepi, & in Comitatum Niceensem descendens ad usque maritimas oras produxi. Cum vero comitem itineris habuerim Franciscum PEYROLERIUM botanicum Regium Pictorem, idcirco horum animalium icones eo meliores subnectere possum, quod saepius viventia animalia vivis coloribus statim ab eodem accurate pingi curaverim.

EJUSDEM

De quibusdam Urticæ marinae vulgo dictae differentiis.

I.

ARMENISTARI.

GENUS. *Animal corpore sub-cartilagineo, tenui, complanato; basi ab erecto velo divisa, arcubus lineata, margine tentaculato.*

SPECIES. *Armenistari tentaculis in membranam perfecte coalitis.* Tab. VI. fig. 7. & 8.

EMinus visum hoc animal totum laete caeruleum apparet; sed propius, & diligenter inspectum una cum caeruleo argenteum colorem præsefert. Duabus planis, tenuibus cartilagineo-membranaceis partibus, componitur, quarum una *p q r s* (*fig.* 7. & 8.) amplior, & oblonga est; &, eo quod inferius in animali aquae imposito reperiri soleat, *basis* dicetur: altera vero *q z r* (*fig.* 8.) inaequaliter triangula, majorique suo latere D C A perpendiculariter priori affixa est; &, quoniam velum erectum repraesentat, *veli* nomine distinguetur, eoque libentius, quod ab hac voce generis hujus altera vera species *Velellae* nomen jamdudum habuerit.

Basis animalis *p q r s* ovali-oblonga est, valdeque obtusa. Summa illius longitudo *p* C *r* ad duas fere uncias extenditur; latitudo vero unciam vix aequat. Superior illius superficies leviter convexa, est, & in duas aequales partes a velo distinguitur, quod ita super ipsam oblique cadit, ut inde facta sectio A C D angulum acutum faciat cum linea *p* C *r* majorem longitudinem ipsius baseos repraesentante.

Inferior

Inferior ejusdem basis facies (quæ tota apparet in *fig.* 7.) leviter concava est, potissimum versus centrum C: longe ellipticam ruffescentis coloris maculam habet ab eodem centro ad tres lineas utrinque productam juxta ipsius longitudinem, quae in sui medio ultra lineam lata est. Hujus maculae centralis portio communicare videtur superius cum sinuosa cavitate superposita C X, quæ ad velum pertinet.

Utraque baseos superficies tota tegitur a membrana, sive pellicula tenui, firmula, talcoso, & argenteo fere nitore splendente. Utraque tenuissimam cartilagineae indolis substantiam intercipit, necnon plures caeruleos arcus, sive potius canales caeruleum humorem continentes. Ex horum canalium, & cartilagineae substantiae arcta cum membranis unione, firmitudo, & elasticitas vere cartilaginea baseos pendere videtur, quamvis humores ipsi ad id etiam conferant. Exsiccati enim Armenistari basis fragilis fit, atque tunc tenuissima cartilaginea substantia membranis, & canalibus interposita difficillime ab iisdem separatur, & potius sub specie squammarum, quam integrae cartilaginis oculis subjici potest.

Componi videtur velum *q ζ r* (*fig.* 8.) non modo ex productione membranarum baseos, sed etiam ex tenuissima cartilaginea lamina iisdem inclusa. Quamvis enim per sectionem oculis illa non subjiciatur; digitus tamen cartilagineas proprietates, & praecipue rigiditatem distinguit, quae a simplici membranarum unione vix produci posset. Nulli autem rei aptius comparari potest recens velum, quam tenui laminae talci supra basin erectae, sive pelluciditas, sive tenuitas cum rigida flexilitate conjuncta attendantur. Margo rigidus veli superior inaequaliter crenatus, aut irregulariter undulatus est, neque ultra eumdem cartilaginea substantia extenditur. Ipsius vero membranae sub tenuissimae pelliculae specie conjunctim ultra illum ad lineam extenduntur, & prae summa pelluciditate, & tenuitate in animali ab aqua educto

oculos

oculos pene fugiunt, & supra rigidam veli partem concidunt; sed facillime rursus velo aquae immerso conspiciendae sunt sub specie fluctuantis, & mobilissimae pelliculae. In recenti velo *q z r* lineae quaedam versus basim adnotantur, quae sensim, sensimque adscendendo versus superiora dispatent, & evanescunt. Nullas vero, ut in Velella, lineas juxta veli longitudinem arcuatas, & ipsius limbo subparallelas videre potuimus.

Exsiccatum velum omnino pellucidum, basi multo tenuius, valdeque fragile fit; nullumque amplius in ipso linearum vestigium conspici potest.

Ubi inferius veli latus incipit a convexa baseos facie sinus caerulescens D A ex fusco notatur, qui versus medium, major est; sensim vero versus utramque extremitatem juxta D, & A evanescit. Producitur iste sinus a superiori baseos membrana, quae, dum ex utraque parte continuatur, ut in velum *q z r* facescat, hoc cavum spatium intercipit eo majus, quo centro C propius. Verticaliter quoque earumdem membranarum recessus per medium velum a centro superius continuatur. Et inde producta verticalis cavitas C X (*Tab. VI. fig.* 8.) versus summitatem *z* dirigitur, & in apicem sensim extenuata paullo infra mediam veli ejusdem altitudinem inconspicua fit.

In recenti animali caeruleo-rufescens humor in memoratis cavis continetur, qui, quo basi proprior, eo coloratior est. In majori etiam copia versus centrum C reperitur. Ibi correspondet superiori portioni memoratae maculae, cum qua communicare quidem videtur, licet rufescens, & gelatinosa materia maculam efformans per sinum ex arte apertum superius ad X, debitamque deinde compressionem digito factam vix educi patiatur.

Sexdecim, & ultra conici canales sub specie totidem arcuum caeruleorum utrumque baseos segmentum pinguunt; horum subduplum numerum tantummodo exhibuimus in

fig.

fig. 7. & 8., ut diſtinctius earumdem decurſus conſpici poſſit. Major canalium inter ſe diſtantia, & amplitudo eſt in majore utriuſque ſegmenti portione, minor in minore reperitur. Ultra baſeos diametrum *p* C *r* a veli origine DCA majores prodeunt, deinde in arcus margini ſubparallelos flectuntur, poſtea ſenſim minuuntur, & ſibi viciniores facti, rectioreſque in oppoſitam, ſeu acutiorem ſegmenti ejuſdem partem inviſibili fine terminantur. Canalium propterea unius ſegmenti diſtincta, & major extremitas proxima quidem eſt juxta ACD tenuiſſimis extremis canaliculorum ſegmenti alterius; at per interpoſitum velum ita ſeparatur, ut nulla immediata cum alterius medietatis canalibus ejuſdem communicatio conſpiciatur. Neque etiam ſatis diſtincte utrum ibi extrema canalium baſeos deſinant, aut continuentur in veli canales cernere potui; etiamſi armato oculo tum recens, tum ſiccatum animal examinaretur. Certum tamen eſt in eamdem velo & baſi communem portionem, venire arcus baſeos attenuatos, a qua tenuiſſimae ceruleſcentes lineae per velum diſtributae diſcedunt. Baſeos canales in majori extremo digitis ipſis diſtinguuntur; quemadmodum etiam major ejuſdem partis inde facta craſſities ipſis percipitur. Spatium canalibus memoratis interpoſitum eſt plus, minuſve amplum, prout major eſt, vel minor eorumdem inter ſe diſtantia. Maximum propterea in majori cujuſque ſegmenti baſeos extremo, minimum in extremo minori, ubi canaliculorum diſtinctio ne armatis quidem oculis diſcerni poteſt. In exſiccato animali non difficile canales iidem ab ejuſdem membranis poſſunt ſeparari, & albidi apparent, minores, ſibique magis proximi, licet ſatis adhuc diſtincti.

A baſis macula ante deſcripta ſub inferiori membrana molles, & caeruleae quaedam lineae, quaſi radii verſus periphaeriam, undique dimittuntur arcus modo deſcriptos frequenter interſecantes.

Eaedem

Eaedem baſeos membranae ultra ipſum cartilagineum baſeos marginem circumquaque ad duas fere lineas conjunctim extenduntur, & in membranam laete caeruleo humore madentem, & mobilem continuantur. Haec membrana ex utriuſque, ſuperioris nempe, & inferioris membranae baſeos unione facta, mobilis eſt, libere in aqua fluctuans, vere tentacularis, integro margine, leviter tantum repando, & quaſi a plicis undulato praedita. Per ipſam intenſe caeruleae quaedam rectae lineae notantur, quae directionem ſequuntur radiatarum baſeos linearum, & plicas memoratas fere diſtinguunt. Valde tenera, & lubrica eſt iſta membrana, & plurimo caeruleo ſmegmate infecta; neque exſiccari facile patitur, ſed chartis tota adhaereſcit, eaſque caeruleo colore pingit; quod ſi recens contrectetur in caeruleum mucum, quo maxime abundat, fere tota faceſcit. Dum ſubter baſim reflexa eſt eandem caeruleam uniformiter reddit.

Totum animal valde lubrico mucoſo humore madet. Nullam autem omnino oris, aut alterius partis apertionem, etiamſi microſcopium adhibuerimus, in externis ejus partibus obſervare potuimus.

Appulit hæc Armeniſtari ſpecies ad extimam meridionalem Collis S. Albani Niceaenſis ripam maritimam poſt procellam flantibus Auſtris adducta. Illius novitate perculſus obtuli Piſcatoribus, ut intelligerem num alias illud adnotaſſent. Ignotam ſibi illius nomen eſſe, remque raro viſam reſponderunt; ſed cognoſcere ſimilem aliam edulem, quam vernali tempore copioſe poſt procellas expiſcantur, venientem, ut ipſi ajunt, ex Africae litoribus, atque ex eorum indicationibus comprehendi eos probabiliter intelligere Velellam Auctorum.

Non inquiram modo in oeconomiam, qua elegantiſſimum animal vitam, & ſpeciem conſervat. Commentitia enim plurima forent afferenda, cum vera ignorentur. Num per aptae ſubſtantiae abſoptionem ab inconſpicuis poris factam,

aut

aut per totam membranarum extensionem, aut per tentacularem solam membranam distributis nutricatum sumat; num ita absorptus humor per canales, & sinus memoratos peculiari dispositione sitos ad animalis centrum adducatur, tamquam ad praecipuam ejus partem oblonga illa macula inferius apparente notatam, ardua est investigatio; quoniam nullum os conspicere, nulla etiam viscera detegere licuit; multoque minus penetrare, quonam artificio hujusce animalis multiplicatio fiat.

Ad nullum cognitorum generum novam hanc speciem reduci posse, & ideo peculiarem generis constitutionem sibi promereri intelliget quicumque cum allata descriptione ea comparabit, quae Zoologi, & speciatim Celeberrimus LINNAEUS ad hanc rem proximius spectantia tradiderunt. Animal, cum quo nostrum magis convenit, est *Velella* auctorum, quod a Celeberrimo *Viro* ad Medusae genus refertur, sed utrumque reapse a Medusis videtur separandum, & ideo fortasse idem perspicacissimus LINNAEUS Medusae speciebus ultimo adjecit, quod minus, quam reliquas species cum Medusae genere convenire intelligeret. Si enim tributum a Veteribus Urticae nomen ab urticationis sensu, quem cuti imprimit, & commestibilitas excipiantur, quae reliquis Urticis marinis ad Medusam pertinentibus communia sunt, vix alia sufficiens ratio datur, qua ad easdem jure amandari queat. Neque enim reliquis Medusis similis partium structura competit, neque natura cartilaginea, aut saltem ad cartilagineam proxime accedens consistentia per totum corpus diffusa in illis conspicitur: tandem nullum os inferius centrale, aut in Velella descripserunt Auctores, aut in nostris observare potuimus. Quod tamen necessario conspici deberet, & demonstrari, ut, immutato Linnaeani generis carectere, ad Medusas illae reduci possent.

Et sane novi generis construendi necessitatem minime praetervisit, aut siluit sed aperte proposuit Cl. C. Marcus CAR-

BURIUS

RIUS (*a*) peculiarem Velellae fabricam admiratus. Nihilo tamen minus post ipsum multiplici scientia Clarus Johan. Baptista BOHADSCHIUS (*b*) solum urticationis sensum notis a structura petitis antepoſuiſſe, & tanquam argumentum sufficiens assumsisse videtur, propter quod aliis Urticis adjungi queat; quamquam Medusis reliquis similem structuram, siquidem de eadem revera loquitur, Velellae tribuat. Verum neque Linnaeanis caracteribus, ut ostendimus, illa aptatur, neque communissima illa figura cylindrica, vel orbiculata, quam in omnibus Medusae speciebus inesse dicit (*c*), neque demum interna fabrica ibidem adducta a Cl. VIRO in nostra specie, aut in Velella observantur: hinc dubitandi fortasse locus aliquis superest utrum VIR doctissimus idem animalis genus prae oculis habuerit, quod laudatus CARBURIUS descripsit, an potius aliud. Eo vel magis, quod dicat a se visi animalis corpus adeo tenerum fuisse, ut in auram avolaverit, & in spiritu vini diffluxerit. Nostrum vero, & Carburianum Armenistari praecipue vero ejusdem basis facile exsiccari, atque exsiccata conservari potest. Praeterea ab ipso praesertim velo nota certa characteristica novi generis desumi posse nobis videtur, quae duas allatas species fabrica in multis non valde dissimiles, licet specifica differentia satis distinctas complectetur. Prima igitur erit Velella a FERN. IMPERATO (*d*), FAB. COLUMNA (*e*), novissimque a citato CARBURIO eleganter descripta, & delineata. Altera vero tentaculorum integritate praecipue distinguenda species ista erit, quam hic posuimus.

Tandem quod pertinet ad nominis rationem non plane incongruum duxi *Armenistari* nomen retinere: quia primum

(*a*) Lettera sopra un Insetto marino &c. Nuova raccolta d'Opuscoli scientifici, e filosofici Tom. 3. *Venezia MDCCLVII.*

(*b*) De quibusdam animalibus marinis, eorumque proprietatibus &c. liber. *Dresdae* 1751. *pag.* 136.

(*c*) Pag. 135.

(*d*) Hist. natur. pag. 679. descr., & pag. 688. *delineatur tentaculis ex parte integris.*

(*e*) Aquatil. & terrestr. observ. pag. XX. descr. & pag. XXII. delin. ed. Rom. MDCXVI.

mum cognita hujusce generis vera species *Velella* dicta, *Armenistari* graeco nomine a laudato Cephaleno Auctore probe descripta fuerit. Poterit idcirco *Velellae* vocabulum pro primae speciei triviali nomine inservire; dum triviale aliud huic nostrae adponendum relinquimus.

II.

MEDUSAE

SPECIES PRIMA.

MEDUSA *per contractionem hemisphaerica, levis, tentaculis plurimis, membranae interius 24-punctatae revolutione detegendis* Tab. VII. fig. 1, 2, 3, 4, & 5.

IN loco natali adhuc situm hoc animal si inspiciatur hemisphaerium coccineum magis, vel minus perfectum exhibet; quod per planam sui inferiorem partem saxo arcte appressum, per convexam vero libere mobile est. Quacumque de causa illud contrahatur, perfecte hemisphaericam formam induit (*Vid. Tab. VII. fig.* 1, 2, & 3.). Quod si dilatatum, seu expansum conspiciatur, compressum fit, simulque inclusas quasdam sui partes videndas exponit. Priorem statum *contractionis*, vel *coarctationis*, alterum *dilatationis*, seu *expansionis* (*Vid. fig.* 4.) nomine vocabimus. Sub diversis propterea istis, aliisque etiam apparitionibus, quas ipsius motus, & anatome ostendunt, sigillatim hoc animal describemus, atque multiplici icone, quantum fieri poterit, ejusdem structuram explicare conabimur.

Ut inferior hujus Medusae superficies integra in conspectum veniat, a scopuli portione, cui firmiter adhaerens repetitur, (quemadmodum videre est in *fig.* 1.) accurate est separanda. Vivente animali id facere non potui absque

laceratione. Sed, cum illud integrum, ſaxoque adhaerens in aqua dulci moriendum reliquerim, & ſubinde diſrupti ſaxi fragmenta paullatim ſeparaverim, tunc inferior ſuperficies nitide conſpici potuit, quae levis eſt, & laete rubens diametri circiter uncialis, prout ſiſtit *fig.* 3. *Tab. VII.* Plana quidem illa eſt, & uniformis; ſed per quaſdam ſaturatius rubentes, radiatas lineas diviſa, ſeu diſtincta apparet in plura fere triangularia ſegmenta apice ſuo ad centrum conniventia in punctum, ceu in apertionem communem ipſis interpoſitam.

In convexa contracti (*fig.* 1. & 2.) animalis facie per memoratam mediam ipſius apertionem introſpici poſſunt innumeri rubri dentes, ſeu tentaculorum, de quibus deinde dicemus, apices circumquaque in orbem poſiti, indeque latera efformantes interius in foramen productae apertionis ejuſdem. Prout adaugetur interdum, vel imminuitur apertio, magis vel minus diſtincta, & extantia tentaculorum extrema conſpici poſſunt. Reliquum hemiſphaericae convexitatis leve eſt, & vivide-rubro colore nitet; videturque fere cruoris coccinei coagulum hemiſphaericum levi membrana tectum repraeſentare, quam liceat *cuticulae nomine* impoſterum deſignare.

Communis eſt utrique ſuperficiei haec cuticula, ſed ubi ad memoratum foramen pervenit, interius reflectitur, ut ſupra interiores omnes partes producatur, & quamdam tegminis mobilis, ac retractilis ſpeciem per interpoſitam tenuem gelatinoſam ſubſtantiam efformat, quod trahitur, & retrahitur ſupra partes contentas, ſicuti praeputium ſupra glandem humanam; hinc eadem praeputii voce non male poſſet appellari. In contracto animali (*fig.* 1. & 2.) hemiſphaericae convexitatis apparentem, & maximam partem conſtituit hoc praeputium, & continuatur inferius cum reſidua parte convexitatis ipſius: revolvitur in expanſo animali,

mali, sicque ipsius concava, & interna facies convexa fit, & internam sui originem ostendit (*fig.* 4.), quae est paullo infra mediam totius hemisphaerii altitudinem.

Interna haec praeputii superficies (*fig.* 4.) lucide rubens, & levis est, si vigintiquatuor grisea puncta excipias, quae parum, sed aequaliter inter se, & semilineam ab ejusdem circulari margine distant. Eadem cuticula laxe teguntur haec puncta, & si immissa acu eleventur tubulum caecum, brevem, griseum fere exhibent.

Aliae quoque partes, revoluto praeputio, conspicuae fiunt, quas ideo (*fig.* 4.) simul repraesentari curavimus. Detegitur inde hemisphaerium aliud parvum (*fig.* 4. *lit. ii*) priori concentricum, aeque leve, & rubellum, nuclei adinstar priori inclusum, cujus convexitas superius posita simili, & juxtam eamdem directionem correspondente foramine (*f*) previa est. Foramen istud constringi quidem ab animali, & dilatari potest, non autem, revolutis partibus ipsum constituentibus, evanescere; quemadmodum de foramine illo externo praeputii hemisphaerii majoris superius contingere innuimus.

Circumponitur ad hujus parvi hemisphaerii basim, coronae, seu zonae cujusdam species (*zzzz fig.* 4.), saturatius rubro colore distincta, ultra duodecimam pollicis partem, inter allati hemisphaerii basim, & internam praeputii originem extensa. Fit autem ex duplicis densa serie binatarum concolorum mammillarium prominentiarum, sive ex parviis fimbriis compresso-conicis, inter se se distinctis, liberis, ultra lineam cum semisse longis, vix semilineam in sua basim seu exortu latis, sensim exinde in acutiusculum, mobilissimum, & libere fluctuantem apicem extenuatis. Tentaculorum apices in contractione animalis versus interiora respiciunt; at in illius expansione ad exteriora divergentes zonam radiatam exhibent.

Praeter

Praeter haec, quae ex viventis animalis variis motibus conspicua fiunt, ut parvi hemisphaerii (*ii*) partes internae lustrentur, sectio juxta ejusdem convexitatem caute duci debet donec sectae partes, similem cum praeputio hemisphaerii majoris substantiam habentes, attolli queant. His revolutis (*Vid. fig.* 5., in qua parvum hemisphaerium sectione apertum est, ut partes internae conspiciantur), idem ruber color per totam ipsarum internam superficiem extensus observabitur; si albescentem, & fere tendineosam lineam (*o t Tab. VII. fig.* 5.) excipias, quae a basi interna sectarum partium oritur, versus rotundam illarum apertionem (*o*) dirigitur, atque desinit ad ejusdem apertionis viciniam.

Detegitur insuper convexitas quaedam inaequalis, (*Vid. fig. ejusdem mediam partem*) in sui medio pervia, quae hujusce parvi hemisphaerii peculiarem nucleum constituebat.

E variis plicis haec convexitas componitur, quarum quinque suo limbo obtuso, marginato, & circulari ad se se mutuo in centro illius approximatae stellatum quoddam spatium relinquunt, quod allatam foraminis speciem efformat. Haec apertio stellata binis supra descriptis foraminibus in eadem directione substernitur, & major, minorve fieri potest, prout eaedem plicae sibi plus, minusve arcte appressae sunt, desinitque in amplum cavum ab ipsis plicis, quasi a valvulis, aut labiis obtectum, ad tres fere lineas extensum, facta plicarum diductione, vel elevatione facile conspiciendum. In hoc cavo cinerea quaedam, ac fere mucosa substantia aquae mixta reperiebatur, quae animalculorum loco proximo vagantium contritam substantiam fere repraesentabat.

Quamvis hanc Medusae speciem scopulis perpetuo affixam, numquam solutam invenerim, neque facile ab illis manu separari potuerit; attenta tamen ejusdem structura, non plane negaverim a loco ad locum transire posse, & fortasse etiam aliquando solutam vagari. In peculiari tamen contractionis motu, quem firmata basi, praesertim si irritetur,

violente

violente perficit, ad dimenſionem fere tertia parte minorem coarctatur, & tunc praeputii apertio vix conſpicua, aut valde exigua fit, & per ipſam lenta mucoſa ſubſtantia, quam diximus in profundo ipſius cavo reperiri, veluti ſpuma quaedam ſaepius exit.

Feli porrectum animal avide deglutiebatur, neque ullum eidem damnum attulit. Ipſum vero, aliaſque varias Urticas marinas piſcatores vulgari nomine *reſtegets* appellant.

Habitantem reperiebam Auguſto menſe in perruptorum ſcopulorum excavationibus, foraminum, quae copioſe aderant, amplis lateribus a Sole tutis adhaerentem. Supra aquae marinae libellam extantia quidem erant illa foramina, attamen per intervalla a refluis majoribus undis allui, aut ſaltem inſpergi ſolebant.

Quae huic Meduſae plane conveniant ſynonima, & icones non invenio, niſi forte quis velit huc pertinere Urticas rubras, quas habent RONDELETIUS (*f*), & Petrus BELLONIUS (*g*), quae colore quidem conveniunt, magnitudine vero, ſitu tentaculorum, & partium ſtructura ſatis diverſae ſunt, ut conferenti patebit. Nullius vero cognitarum Meduſae ſpecierum icon proximius accedit ad noſtram in ſtatu ſuo contractionis repraeſentandam, quam exhibita a Cl. Theodoro GRONOVIO in Tom. IV. Act. Helveticorum; quamvis attenta ejuſdem deſcriptione plurimum hae ſpecies inter ſe, & ab aliis jam notis differant. Etenim in illa adnotat Vir Doctiſſimus admodum pellucidam, & tenerrimam totius corporis ſubſtantiam; quatuor tranſverſales coſtas, tentacula marginalia plurima minima, *magnitudine*, ut ait Auctor, *aequalia*, earumque *ope celerrime oblique per aquas ſaltabat animal*, *manente corporis parte ſemper antrorſum directa*. In noſtra ſpecie coccineus color eſt, ſubſtantia autem corporis non adeo tenera, ſed firmior, & forti cuticula obducta,

(*f*) De piſcibus *lib.* 7. *cap.* 17. *pag.* 530.
(*g*) Aquatil. *lib.* 20. *pag.* 340. 341.
(*h*) *Pag.* 38. *Tab.* *IV.* *fig.* 7.

cta. Tandem nostrum animal locali motu fere destitutum, neque per aquas saltare posse videtur. Primo quidem quod aquis innatans numquam videri potuerit, sed semper saxo post mortem tenaciter adhaerens; deinde quod quatuor costis a Cl. GRONOVIO memoratis plane careat.

Denique monere juvat nullam specierum, quas Cl. JANUS PLANCUS in egregio suo libro de *minus notis &c.* habet, ad hanc nostram pertinere. Cum enim dubitarem utrum pro hujus synonimo sumi posset globosior Urticae species, quam Vir doctissimus ibidem (*i*) memorat; dubii solutionem ab Auctore petii per epistolam a Cl. sui Amico, meique Praeceptore amantissimo D. ALLIONIO ipsi datam. Vir autem praestantissimus, cui cum descriptione pictura transmissa fuit, respondit novam sibi speciem videri, aut saltem minus notam, & descriptam, atque ab iis, quas ipse in laudato libro descripsit, revera distinguendam.

SPECIES ALTERA.

Si in ulla Urticae marinae specie certe in ea, quae cinerea dicitur ab Auctoribus, multiplices varietates occurrunt. Aliae enim ex cinereo ad album, aliae ad griseum, aliae ad caeruleum, purpureumque vergunt; nonnullae etiam ex griseo, purpureo, vel etiam viridi colore diversimode variegatae reperiuntur. Quae tamen singulae, cum sola colorum inconstantia ludant, distinctam speciem non videntur constituere, nisi peculiaris alia nota ex partium diversa structura petita accedat, qua distingui mereantur. Reliquis propterea missis hujus generis speciebus, quae in Niceensi mari copiose reperiuntur; nonnulla de rariori una specie memorem, quam exhibet *fig.* 6. & 7. *Tab. VII.* eritque.

Medu-

(*i*) *Pag.* 43.

Medusa orbiculata, utrinque compressa; tentaculis marginalibus plurimis, perpetuo nudis.

Hujus Medusae corpus complanatum orbem repraesentat, cujus ad centrum media crassities, seu altitudo est duarum linearum, ad periphaeriam vero lineam parumper superat. Diameter autem, sive latitudo ad unciam circiter extenditur.

In una ejusdem facie quinque sunt arcuatae plicae (*zzzz fig.* 6.) convexitatibus suis versus centrum mutuo se se contingentes, & quinque-labiatum ideo Medusae os repraesentantes. Circumvolvitur exinde arcuatae plicae utraque extremitas, & post varios anfractuosos recessus versus periphaeriam simili extremitati proximae plicae occurrit, & cum ipsa continuatur. Fit inde ut omnes plicae simul sumptae totam superficiem efforment, & veluti intestinulum unicum proprio mesenterio alligatum, & in se demum redeuntem exhibeant.

Cavum quoddam spatium quinque illis plicis os constituentibus subjacet, quod ad duas circiter lineas amplum conspicitur.

Altera animalis superficies (*ooo fig.* 7.) magis complanata, & fere plana est; albida etiam membrana minutissimis lineis a centro divergentibus radiata obtegitur, ex cujus disruptione fusco-flavescens gelatinosa, & ad lentem quasi stupea materies erumpere observatur.

Ad margines superficiebus descriptis comprehensos paullo magis versus primam illam duplex oritur series griseo-caerulescentium tentaculorum (*ssss Tab. VII. fig.* 6. & 7.), quae pollicarem longitudinem habent; sensim sensimque versus extremum extenuantur, & ibi minus colorata fiunt. Hujusmodi autem tentacula nulla agitatione commota radiatim divergunt instar nectariorum Passiflorae incarnatae, aut si velis radiatum florem belle repraesentant, cujus discus albidus, & radius cinereus sit.

Hanc Medusae speciem cum praecedente in aqua salsa quinque mensium spatio maceratam microscopio pluries subjeci. In utraque autem per microscopium observari cuticulam, quae totum corpus obtegit, satis firmam se se conservasse, & rugas tantummodo contraxisse, quae a periphaeria ad centrum dirigebantur, satisque conspicuae erant in magis plana utriusque superficie; in facie vero, ubi Medusae os in utraque locatur, in praeputio prioris speciei, in plicis, & in tentaculis utriusque transversim circulariter eaedem rugae dirigebantur, & minutissimae erant.

De hujus Medusae motibus nihil addam, nisi quod per undas solutam vagari scripserit praeclarissimus Amicus VERANI, Medicus, & Historiae maritimorum amantissimus cultor, qui circa Villafrancam Niceaensem reperit, & hanc cum maritimis aliis in aqua maris probe servatam humanissime communicavit.

Synonima, & icones non habeo; nisi huc forte pertineat urtica cinerea RONDELETII, (*k*) quae tamen, si ex manca descriptione, & icone, quam dedit, neglecto colore, liceat judicare, est vivendi modo, tentaculorum longitudine, ac dispositione, aliisque valde diversa.

(*k*) De piscibus *lib. XVII. pag.* 529.

Imprimatur. PISELLI Vic. Gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la Stampa

GALLI per la Gran Cancelleria.

ÉCLAIRCISSEMENS SUR LE MOUVEMENT DES CORDES VIBRANTES

PAR M. EULER.

I. TOus ceux qui ont entrepris de déterminer le mouvement des cordes vibrantes ont borné leurs recherches à ces trois conditions:

1° Ils ont considéré la corde comme fixée en ses deux extrémités *A* & *B* (*fig.* 1.), & tendue par une force quelconque, en sorte que dans son état naturel, sa figure soit représentée par la ligne droite *AB*: ce n'est que dans cet état que la corde peut demeurer en repos ou en équilibre.

2° Ils n'ont considéré que les mouvemens extrémement petits d'une telle corde, en sorte que si la ligne *AYB* représente la figure que la corde prend pendant son mouvement à un instant quelconque, on puisse toujours regarder les appliquées *XY* de cette ligne comme infiniment petites.

3° Ils ont supposé que le mouvement de chaque élément de la corde *Y* se fasse toujours suivant la direction de l'appliquée *YX* ou qu'il ne s'en écarte qu'infiniment peu. On pourroit bien traiter plus généralement cette question, mais alors la Théorie conduit à un calcul si embarrassé qu'on n'en sauroit rien conclure.

II. La dernière condition se réduit à celle-ci, que l'inclinaison de chaque élément de la corde *Yy* à l'axe *AB* soit infiniment petite, ou bien que la tangente tirée à chaque point *Y* fasse avec l'axe *AB* un angle infiniment petit. Ce n'est que dans ce cas qu'on peut regarder chaque élément de la courbe *Yy* comme égal à l'élément répondant de l'axe *Xx*: or cette condition est absolument nécessai-

re, pour que le mouvement de chaque point *Y* se fasse dans la direction de l'appliquée *YX*. Delà on comprend aussi réciproquement que toutes les fois, que cette condition convient à la figure *AYB*, le mouvement de chaque point *Y* ne sauroit s'écarter de la direction de l'appliquée *YX*.

III. Donc quand on demande le mouvement de la corde après qu'elle aura reçu une impulsion quelconque, il faut absolument que la figure qui lui a été imprimée d'abord soit telle, que non seulement toutes les appliquées X*Y* soient quasi infiniment petites, mais que l'inclinaison de tous les élémens de la courbe *AYB* soit aussi infiniment petite. On pourroit encore ajouter cette condition, qu'on ait imprimé en même tems à chaque élément de la corde un certain mouvement selon la direction de l'appliquée, & ce mouvement initial doit aussi être tel, qu'il n'en résulte aucun saut dans la suite; ou bien que la figure de la corde demeure toujours conforme aux loix prescrites. Cela remarqué, examinons plus soigneusement tant la question en elle même, que la solution que la Théorie fournit.

QUESTION.

IV. *Aiant réduit la corde tendue à une figure quelconque, si au moment qu'on la relache, on imprime encore à chaque élément de la corde un mouvement quelconque: on demande, pour chaque moment du tems suivant, tant la figure, que le mouvement que la corde aura alors, supposant que tant la figure initiale que le mouvement qui lui aura été imprimé soient d'accord avec les loix prescrites.*

V. Soit AB (*fig.* 2.) la corde fixée dans ſes deux extrémités A & B, & tendue par une force quelconque, à laquelle on ait imprimé au commencement la figure ASB, & d'abord cette courbe doit être telle, que 1° toutes ſes appliquées ſoient quaſi infinimens petites, & 2° que toutes ſe tangentes ne s'écartent qu'infiniment peu de l'axe AB. Ces deux conditions ſont ſi naturellement liées avec la tenſion, qu'il ſeroit preſque impoſſible de réduire la corde à une telle figure, où ces deux conditions n'euſſent pas lieu. De là il eſt clair, que la figure initiale peut être variée à l'infini, & qu'elle dépend entiérement de notre volonté. Il eſt donc poſſible de donner à la corde une telle figure, qui ne ſauroit être exprimée par aucune équation analitique, comme ſi on la tiroit par un mouvement libre de la main, ſans qu'aucune loi de continuité y ait lieu.

VI. Il n'y a certainement aucun doute, qu'on ne puiſſe imprimer à la corde une telle figure, & où pourtant les deux conditions preſcrites aient lieu. Pour s'en aſſurer mieux, on n'a qu'à tirer de A à B une ligne courbe quelconque AMB en obſervant cette ſeule condition qu'il n'y ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe : alors en diminuant toutes les appliquées XM jusqu'à l'infini selon un même rapport, de ſorte que $XS = \alpha XM$, prenant α pour une fraction extrémement petite, non ſeulement toutes les appliquées XS deviendront infiniment petites, mais auſſi les tangentes dans tous les points S ſeront infiniment peu inclinées à l'axe AB, tout comme les deux conditions preſcrites l'exigent.

VII. On ne ſauroit douter non plus qu'après avoir imprimé à la corde une telle figure diſcontinue ou irreductible à aucune équation analitique, la corde étant ſubitement relachée, ſoit qu'on lui imprime encore quelque mouvement

ou non, n' en reçoive un certain mouvement de vibration. Mais on trouve ici bien des raisons de douter si dans ces cas la Théorie est suffisante de nous conduire à une solution; puisqu'il semble que l'analise, comme elle a été traitée jusqu'ici, ne sauroit être appliquée qu'à des courbes, dont la nature peut être renfermée dans une équation analitique. Mais il n'est pas encore tems de décider cette question: si l'analise est incapable de nous fournir une solution pour ces cas, nous ne nous en appercevrons que trop tôt: & partant il n'est pas nécessaire de restraindre d'abord la question aux seules courbes continues, dont la nature est exprimée par quelque équation.

VIII. Mais si la Théorie nous conduit à une solution si générale, qu'elle s'étend aussi bien à toutes les figures discontinues que continues il faudra avouer, que cette recherche nous ouvre une nouvelle carrière dans l' analise, en nous mettant en état d'appliquer le calcul à des courbes qui ne sont assujetties à aucune loi de continuité, & si cela a paru impossible jusqu'ici, la découverte sera d'autant plus importante. Or en effet j' ai remarqué à cette occasion, que la partie de l'analise des infinis, à laquelle cette question appartient, renferme essentiellement ce caràctère, qu'elle reçoit des fonctions absolumens arbitraires, pendant que de telles fonctions sont entiérement bannies de l'analise ordinaire qu'on a cultivée jusqu'ici, & qui roule principalement sur des fonctions d' une seule variable. Mais l' analise dont nous avons besoin ici, s'occupe des fonctions de deux ou plusieurs variables: où cela arrive de bien remarquable, que chaque intégration introduit dans le calcul une fonction absolument arbitraire au lieu d'une simple quantité constante.

IX. Après avoir réduit la corde à une figure quelconque *ASB*, on suppose communement qu'on la relache subitement, sans lui imprimer aucun mouvement; de sorte

que dans ce premier instant tous les élémens de la corde sont en repos, ou leur vitesse nulle. Mais il est possible que dans le moment même, où l'on relache la corde, on imprime à chacun de ses élémens un certain mouvement, dont la direction doit toujours être perpendiculaire à l'axe. Pour tenir compte de cette circonstance on peut décrire sur l'axe *AB* l'échelle des vitesses initiales *AVB* dont chaque appliquée *XV* marque la vitesse, qui aura été imprimée au point de la corde *S* selon la direction *SX*. Puisque les extrémités de la corde *A* & *B* demeurent toujours immobiles, il est évident que cette courbe *AVB* doit passer par les deux termes *A* & *B*, de même que la figure initiale *ASB*.

SOLUTION DINAMIQUE DE LA QUESTION.

X. Posons maintenant la longueur de la corde $AB = a$. (*fig.* 2.) son poids $= P$, & la force dont elle est tendue $= T$; or prenant une partie quelconque $AX = x$, soit le poids de cette partie $= p$, qui marque une fonction quelconque de x, afin que la solution s'étende à des cordes dont l'épaisseur est variable. Ensuite pour l'état forcé auquel la corde a été réduite au commencement, soit l'appliquée $XS = s$, & la vitesse qui aura été imprimée au point *S* dans la direction *SV* soit $XV = u$, ensorte que u marque l'espace parcouru par cette vitesse dans une seconde. Cela posé on demande quelle figure, & quel mouvement la corde aura, après un tems quelconque écoulé depuis cet état initial.

XI. Soit donc écoulé depuis ce commencement un tems $= t$ *secondes*, & supposons que la corde ait à présent la figure *AYB* (*fig.* 3.), pour laquelle posons l'appliquée

$XY = y$, qui répond à la même abſciſſe $AX = x$, où au commencement l'appliquée étoit $XS = s$; & il eſt clair que y ſera une certaine fonction tant de l'abſciſſe x que du tems t; dont la nature doit être déterminée par l'état initial, auquel nous ſuppoſons que la corde a été réduite. Tout revient donc à trouver cette fonction y, dont la valeur elle même nous découvre la figure AYB, & la formule différentielle $(\frac{dy}{dt})$ la viteſſe du point Y dans le ſens XY, de ſorte que ſi le point Y ſe meut vers X, ſa viteſſe ſera $= -(\frac{dy}{dt})$.

XII. Delà il eſt évident, que la fonction y que nous cherchons doit avoir les propriétés ſuivantes:

1° Poſant le tems $t = 0$, il faut qu'il devienne $y = s$, puiſqu'au commencement la corde eſt ſuppoſée avoir eu la figure donnée ASB (*fig.* 2.) dont l'appliquée répondante à la même abſciſſe $AX = x$ vient d'être nommée $XS = s$.

2° Poſant encore $t = 0$, il faut que la formule différentielle $-(\frac{dy}{dt})$ devienne $= u$, puiſque u marque la viteſſe initiale, dont le point S aura été pouſſé ſelon la direction SX. Donc ſi la corde n'avoit reçu aucun mouvement au commencement, mais qu'elle eut été ſimplement relachée, il faudroit qu'il fut $-(\frac{dy}{dt}) = 0$, en ſuppoſant le tems $t = 0$.

3° Enſuite puiſque les deux extrémités A & B de la corde demeurent immobiles, l'appliquée y doit auſſi être une telle fonction des deux variables x & t, que poſant ou $x = 0$, ou $x = a$ elle s'évanouiſſe toujours dans l'un & l'autre cas; par la même raiſon il faudra que dans ces deux cas la formule de la viteſſe $(\frac{dy}{dt})$ s'évanouiſſe auſſi.

XIII. Maintenant pour découvrir les forces, dont l'élément de la corde en Y est poussé à présent, tirons en Y la tangente YT, & posons l'angle qu'elle fait avec l'axe $XYT = \omega$, que nous supposons être infiniment petit, & puisque en vertu de la tension T l'élément Y est tiré suivant la direction YT par cette même force T, il en résulte suivant la direction YX la force T sin. $\omega = T\omega$, & suivant la direction de l'axe XA la force T cos. $\omega = T$, qui est détruite par la tension de l'autre coté, d'où l'on voit que la tension est par tout la même. Mais de l'autre côté, dans l'élément suivant, l'angle ω devient $\omega + d\omega$, & partant l'élément Y sera poussé par la force $T\ (\omega + d\omega)$ suivant la direction contraire XY. Donc puisque l'élément Y est sollicité par ces deux forces ensemble, il sera poussé suivant la direction XY par la force $= Td\omega$.

XIV. Tant que nous envisageons la courbe AYB, le tems t demeure le même: donc puisque l'angle $XTY = \omega$ est infiniment petit, nous aurons $\omega = (\frac{dy}{dx})$, & partant $d\omega = dx\ (\frac{ddy}{dx^2})$, de sorte que l'élément en Y est sollicité dans le sens XY par la force motrice $Tdx\ (\frac{ddy}{dx^2})$. Or le poids de la partie de la corde AX ou AY a été supposé $= p$, d'où le poids de l'élement en question sera $= dp$, qui exprime en même tems sa masse; donc la force accélératrice dans le sens XY sera $= \frac{Tdx}{dp}\ (\frac{ddy}{dx^2})$, où puisque p est une fonction de x connue par l'épaisseur variable de la corde, la formule $\frac{Tdx}{dp}$ aura aussi une valeur connue. Si la corde avoit partout la même épaisseur, le poids de toute la longueur $AB = a$

aiant été posé $= P$, nous aurions $a : P = x : p$, & partant $\frac{dx}{dp} = \frac{a}{p}$, ou bien la force accélératrice seroit $= \frac{Ta}{P}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$.

XV. Aiant trouvé la force accélératrice de l'élément Y dans le sens $YY = \frac{Tdx}{dp}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Nous n'avons qu'à considérer le mouvement de ce même élément. Or aiant déja remarqué (XI.) que la vitesse de cet élément dans le sens XY est $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$ son accélération dans le même sens sera $= \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, qui doit donc être proportionelle à la force accélératrice. Mais pour obtenir une équation déterminée puisque nous exprimons le tems t en secondes, & la vitesse par l'espace parcouru dans une seconde, nous n'avons qu'à introduire la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une seconde. Soit donc cette hauteur $= g$, & la comparaison de la force accélératrice avec l'accélération nous fournit cette équation :

$$\frac{2Tgdx}{dp}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

XVI. Voilà donc une équation differentielle du second dégré de la résolution de laquelle dépend la détermination du mouvement de la corde, & tout revient maintenant à chercher, quelle fonction des deux variables x & t doit être l'appliquée y, afin qu'elle satisfasse non seulement à cette équation, mais qu'elle renferme aussi les conditions marquées ci-dessus (XII.). Or j'observe ici que $\frac{2Tgdx}{dp}$ est une certaine fonction de la seule variable x, sans que le tems t y soit compris, & que cette fonction dépend de l'épaisseur de la corde. Mais il encore impossible

de résoudre cette équation en général, quelle que soit la variabilité de l'épaisseur de la corde, puisqu'ici je n'ai pu découvrir que certains cas, dont le nombre est bien infini, où la résolution réussit, mais à présent je me bornerai uniquement aux cordes, dont l'épaisseur est par tout la même, parceque c'est le cas, auquel presque tous ceux qui ont traité cette question se sont attachés.

Résolution analitique de la question pour le cas, où la corde a partout la même épaisseur.

XVII. Puisque la corde a partout la même épaisseur, à cause de $dx : dp = a : P$, notre équation sera

$$\frac{2Tga}{P}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

où a marque la longueur de la corde, P son poids, & T la force dont elle est tendue, la valeur de g étant $15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin; la quantité $\frac{2Tga}{P}$ est donc constante, & exprime une certaine surface, & partant pour abreger je poserai $\frac{2Tga}{P} = cc$, pour avoir à résoudre cette équation

$$cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

Il est aisé de trouver une infinité des fonctions des deux variables x & t, qui étant substituées au lieu de y satisfont à cette équation, & qui remplissent en même tems la condition qu'il devienne $y = 0$, soit qu'on pose $= 0$, ou $x = a$.

XVIII. Pour en donner un exemple supposons $y = a \sin. mx \cos. nt$, & puisque

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \alpha m \text{ cos. } mx \text{ cos. } nt, \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -\alpha mm \text{ sin. } mx \text{ cos. } nt$

$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\alpha n \text{ sin. } mx \text{ sin. } nt, \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\alpha nn \text{ sin. } mx \text{ cos. } nt$

l'équation trouvée exige qu'il soit $mmcc = nn$, ou $n = mc$; de sorte que $y = \alpha$ sin. mx cos. mct, laquelle valeur évanouit déja au cas où $x = 0$, mais pour qu'elle évanouisse aussi au cas où $x = a$, il faut prendre $ma = i\pi$, où π marque la périphérie d'un cercle, dont le diamètre $= 1$, & i un nombre entier quelconque. Voilà donc une solution particulière de notre question renfermée dans cette équation :

$$y = \alpha \text{ sin } \frac{i\pi x}{a} \cdot \text{ cos. } \frac{i\pi ct}{a}.$$

XIX. Puisqu'on peut prendre pour i un nombre entier quelconque, cette formule fournit une infinité de formules dont non seulement chacune donne une valeur convenable à y, mais aussi deux ou plusieurs jointes ensemble. D'où l'on tire une solution beaucoup plus générale renfermée dans cette expression qu'on peut continuer à l'infini:

$$y = \alpha \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} \text{ cos. } \frac{\pi ct}{a} + \beta \text{ sin. } \frac{2\pi x}{a} \text{ cos. } \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

& puisqu'en écrivant sin. $\frac{i\pi ct}{a}$ au lieu de cos. $\frac{i\pi ct}{a}$ on satisfait également aux conditions préscrites, on peut donner cette solution encore plus générale:

$$y = \alpha \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} \text{ cos. } \frac{\pi ct}{a} + \beta \text{ sin. } \frac{2\pi x}{a} \text{ cos. } \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

$$+ \alpha' \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} \text{ sin. } \frac{\pi ct}{a} + \beta' \text{ sin. } \frac{2\pi x}{a} \text{ cos. } \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

XX. Voyons maintenant, quel devroit être l'état initial de la corde, pour que cette formule exprimât le mouvement dont la corde sera agitée dans la suite. Pour cet effet nous n'avons qu'à poser $t = 0$, & puisque alors

y devient égale à l'appliquée s dans la figure initiale ASB (*fig.* 2.) nous aurons pour cette courbe l'équation qui suit :

$$s = \alpha \text{ fin.} \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ fin.} \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ fin.} \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Or pour les vitesses u qui doivent être imprimées à tous les élémens de la corde, puisque $u = -\left(\frac{dy}{dt}\right)$, en posant $t = 0$; nous aurons

$$= -\frac{\pi c}{a}\alpha' \text{ fin.} \frac{\pi x}{a} - \frac{2\pi c}{a}\beta' \text{ fin.} \frac{2\pi x}{a} - \frac{3\pi c}{a}\gamma' \text{ fin.} \frac{3\pi x}{a} - \&c.$$

Donc réciproquement toutes les fois qu'on aura imprimé à la corde une telle figure & un tel mouvement, la valeur de y donnée ci-dessus nous découvrira pour tout tems suivant tant la figure, que le mouvement de la corde.

XXI. Comme les valeurs de s & de u contiennent une infinité de termes, il semble qu'elles renferment tous les cas possibles, de sorte que quelque figure & quelque mouvement, qu'on ait imprimé à la corde au commencement, ces deux valeurs y puissent être ajustées. Car en effet on peut toujours déterminer ensorte les coëficiens α, β, γ &c. & α', β', γ' &c. que l'une & l'autre des courbes ASB & AVB passe par une infinité de points donnés. Cependant quelque convainquant que paroisse cet argument, je ne saurois envisager cette solution, que comme très-particulière ; & cela par la même raison, qu'on regarderoit fort mal à propos toutes les courbes possibles comme renfermées dans cette équation parabolique $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ quoi qu'on puisse faire passer cette courbe par une infinité de points donnés.

XXII. Je soutiens donc que cette solution quelque générale qu'elle paroisse, n'est que très-particulière, & qu'elle n'épuise point l'étendue de l'équation différentielle du

second dégré $cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ qui renferme la solution compléte de notre question. Pour nous assurer entièrement de cette insuffisance, on n'a qu'à considérer le cas où l'on n'auroit ébranlé au commencement qu'une partie de la corde comme AX, le reste BX aiant demeuré dans un repos parfait. Car posant cette partie ébranlée $=b$, il faudroit déterminer en sorte les expressions trouvées pour s & u, que prenant $x>b$ elles devinsent $=0$, & cela pour toutes les valeurs possibles entre b & a, ce qui est manifestement impossible. Ainsi le mouvement, que la corde recevra dans ce cas, ne sauroit jamais être représentée par l'expression donnée ci-dessus pour l'appliqué y.

Intégration complète de l'équation.

$$cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

XXIII. Mais pourquoi vodroit-on s'arrêter à une solution particulière & exiger la détermination d'une infinité de coéficiens, tandis qu'on est en état d'assigner l'intégrale compléte de cette équation, qui doit nécessairement renfermer tous les cas possibles, & qu'on peut même aisément appliquer à toutes les figures & à tous les mouvemens qu'on aura imprimés au commencement à la corde. Je me tiendrai donc uniquement à l'intégrale compléte de cette équation différentio-différentielle qu'on trouve exprimée de cette manière

$$y=\Gamma:(x+ct)+\Delta:(x-ct),$$

où $\Gamma:(x-ct)$ marque une fonction quelconque de la quantité $x+ct$, & $\Delta:(x-ct)$ une fonction aussi quelconque de la quantité $x-ct$. Donc puisque cette ex-

pression renferme deux fonctions absolument arbitraires, c'est une marque certaine qu'elle est l'intégrale complète de notre équation différentio-différentielle.

XXIV. Pour faire voir comment cette expression satisfait à la question, on n'a qu'à en faire la substitution; pour cet effet je marquerai le différentiel d'une telle fonction générale $\Gamma : u$ par $du\ \Gamma' : u$; donc si nous posons $z = \Gamma : (x + ct)$ nous aurons $dz = (dx + cdt)\ \Gamma' : (x + ct)$, & partant $(\frac{dz}{dx}) = \Gamma' : (x + ct)$, & $(\frac{dz}{dt}) = c\Gamma' : (x + ct)$. De là notre expression fournira par la différentiation:

$$(\frac{dy}{dx}) = \Gamma' : (x + ct) + \Delta' : (x - ct), (\frac{dy}{dt}) = c\Gamma' : (x + ct) - c\Delta' : (x - ct)$$

$$(\frac{ddy}{dx^2}) = \Gamma'' : (x + ct) + \Delta'' : (x - ct), (\frac{ddy}{dt^2}) = cc\Gamma'' : (x + ct) + cc\Delta'' : (x - ct)$$

d'où il est évident, que $cc\ (\frac{ddy}{dx^2})$ devient égal à $(\frac{ddy}{dt^2})$, tout comme la nature de notre question exige.

XXV. Puisque cette intégrale contient deux fonctions absolument arbitraires, il n'y a aucun doute qu'on ne les puisse prendre ensorte, qu'elles conviennent à l'état initial auquel la corde aura été réduite au commencement. On n'a qu'à remarquer que la fonction $\Gamma : (x + ct)$ représente l'appliquée d'une courbe quelconque, prenant l'abscisse $= x + ct$, & que l'autre fonction $\Delta : (x - ct)$, représente l'appliquée d'une autre courbe quelconque, qui répond à l'abscisse $x - ct$. Donc au lieu de ces deux fonctions arbitraires on peut substituer deux courbes quelconques soit régulières, ou comprises dans quelques équations, soit irrégulières ou tracées à volonté sans qu'elles soient attachées à quelque loi de continuité.

XXVI. Comme la question elle même renferme déja deux courbes absolument arbitraires, l'une *ASB* (*fig.* 2.) qui est la figure qu'on a donnée au commencement à la corde, & l'autre *AVB*, qui est l'échelle des vitesses imprimées à la corde au premier instant du relâchement; aucune solution ne sauroit être compléte, à moins qu'elle ne fût applicable à ces deux courbes absolument arbitraires. Donc puisque ces deux courbes ne sont sujettes à aucune loi de continuité, il faut bien que la solution ne soit sujette à aucune limitation à cet égard. Ainsi la nature de la question elle même nous donne déja à connoitre que la solution, pour qu'elle soit compléte, doit nécessairement renfermer deux fonctions absolument arbitraires pour qu'on en puisse faire l'application à toutes les circonstances de la question.

XXVII. Cette reflexion est d'autant plus importante, que de telles solutions ont été tout-à-fait inconnues jusqu'ici dans l'Analise, & qu'on a cru même, que le calcul n'étoit applicable qu'à des quantités soumises à la loi de continuité, ou comprises dans quelque expression analitique. Ce préjugé, s'il est permis de le nommer ainsi, a été sans doute la cause que ma solution générale des cordes vibrantes a paru fort suspecte même à des Géomètres du premier ordre; mais à présent j'espère que quand ils voudront bien peser la nature de la question, ils conviendront avec moi, que la solution ne sauroit être moins générale, que celle que j'ai donnée, & tous les prétendus inconvéniens, dont on a chargé ma solution, ne tombent que sur les premières limitations, auxquelles on est obligé de restraindre la question.

XXVIII. Mais rien ne sauroit mieux lever tous les doutes, que l'application de ma solution générale au mouvement déterminé d'une corde, après qu'on l'aura réduite au commencement dans un état déterminé quelconque. Car il faut

bien considérer, qu'il ne s'agit pas ici de déterminer d'une manière vague les mouvemens dont une corde tendue est susceptible, mais je suppose expressément, qu'on ait forcé au commencement la corde à une certaine figure donnée, & qu'on lui ait imprimé en même tems un certain mouvement pareillement donné. Cet état initial de la corde étant donc entièrement déterminé, il faut bien que le mouvement suivant le soit aussi, & qu'il dépende nécessairement de toutes les conditions de l'état initial. Je m'en vais donc examiner de quelle manière les deux fonctions arbitraires de ma solution doivent être déterminées, pour qu'elles répondent à l'état initial, auquelle la corde a été réduite au commencement.

Application de la solution générale à l'état initial de la corde.

XXIX. Aiant trouvé pour l'état de la corde après un tems quelconque de *t secondes* écoulé depuis le commencement, cette équation intégrale complète.

$$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x + ct)$$

qui exprime la figure que la corde aura alors, on en déduit aisément la vitesse, que le point Y aura dans la direction YX (*fig.* 3.); car puisqu'elle est $= -\left(\frac{dy}{dt}\right)$ nous aurons

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -c\Gamma' : (x + ct) + c\Delta' : (x - ct).$$

Maintenant nous n'avons qu'à poser $t = 0$ pour avoir l'état initial de la corde auquel nous avons vû, qu'il doit devenir $y = s$, & $-\left(\frac{dy}{dt}\right) = u$, où s & u sont des fonctions données de x; nous aurons donc

$$s = \Gamma : x + \Delta : x \text{ \& } u = -c\Gamma' : x + c\Delta' : x,$$

& de ces deux équations il faut déterminer la nature des deux fonctions indiquées par les signes Γ & Δ, ou bien des deux courbes dont les appliquées représentent ces fonctions.

XXX. Pour cet effet multiplions la dernière équation par dx, & en prenant l'intégrale nous aurons

$$\frac{\int u\,dx}{c} = -\Gamma : x + \Delta : x,$$

cette équation jointe à la première nous fournit

$$\Gamma : x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2c}\int u\,dx \;\&\; \Delta : x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2c}\int u\,dx,$$

où il faut remarquer que s marque l'appliquée XS de la courbe donnée ASB, qui répond à l'abscisse x, & que $\int u\,dx$ exprime l'aire AXV de l'autre courbe aussi donnée AVB, qui convient à la même abscisse x. D'où l'on comprend, que pour avoir les fonctions $\Gamma : (x + ct)$ & $\Delta : (x - ct)$ on n'a qu'à prendre au lieu de l'abscisse x, dans les deux courbes données, ou $x + ct$ pour la première, ou $x - ct$ pour l'autre fonction.

XXXI. De là on tire d'abord la construction suivante de notre question. Soit ASB (*fig.* 4.) la figure à laquelle a été réduite la corde au commencement, AVB l'échelle des vitesses, dont les appliquées XV représentent les vitesses que tous les points de la corde S ont reçues au commencement dans le sens SX. Cela posé après le tems écoulé $= t$, le point de la corde S sera parvenu en Y, de sorte que l'intervalle XY soit $= \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$; or nous venons de voir que $\Gamma : x = \frac{1}{2}XS - \frac{1}{2c}AXV$ & $\Delta : x = \frac{1}{2}XS + \frac{1}{2c}AXV$. Donc prenant de part & d'autre du point X les intervalles $XT = Xt = ct$ pour avoir les abscisses $AT = x + ct$ & $At = x - ct$, nous aurons pour le lieu cherché

Y l'ap-

Y l'appliquée $XY = \frac{1}{2} TN - \frac{1}{2c}. ATU + \frac{1}{2} tn + \frac{1}{2c}. Atu$ ou bien $XY = \frac{1}{2c} (TN + tn) - \frac{1}{2c}. tTUu.$

XXXII. Voici donc une construction bien simple pour déterminer le lieu de chaque point de la corde après un tems quelconque de *t secondes* écoulé depuis le commencement, & cette construction est uniquement fondée sur les deux courbes données *ASB* & *AVB*, par lesquelles l'état initial de la corde est déterminé. On voit aussi que cette construction réussit également bien, soit que ces deux courbes données soient renfermées dans quelque équation analitique, ou qu'elles soient tirées d'une manière quelconque sans qu'aucune loi de continuité y ait lieu. Il n'y a ici absolument rien, qui demande une expression analitique pour la nature de ces deux courbes, & dès qu'elles sont tracées leur route suffit toute seule pour déterminer le mouvement tout entier de la corde, puisque sachant pour tout tems les lieux de tous les points de la corde, on ne sauroit plus rien désirer pour une parfaite connoissance du mouvement. Je ne reconnois ici d'autres limitations, que celles que j'ai raportées au commencement, sans lesquelles notre solution ne sauroit avoir lieu.

XXXIII. Cette construction n'est assujettie à aucun inconvénient, tant que les points *T* & *t* tombent entre les termes de la corde *A* & *B*, mais quand ils tombent au delà, où ni l'une, ni l'autre courbe donnée ne fournit plus des appliquées, on voit bien qu'il faut continuer l'une & l'autre de ces courbes pour que cette construction puisse être mise en pratique. D'où résulte cette question bien importante, selon quelle loi il faut continuer les deux courbes données *ASB* & *AVB* au delà des termes de la corde *A* & *B*, afin que notre construction nous découvre le vrai mouvement de la corde; comme cette loi doit être

commune à toutes les courbes données par l' état initial, soit qu'elles soient continues ou discontinues, je remarque d'abord que cette loi ne sauroit être attachée à l'équation analitique qui exprimeroit peut-être la nature d' une telle courbe. Ainsi par exemple, si l' une de ces courbes étoit un arc de cercle, il seroit fort-mal à propos, si l'on vouloit continuer cet arc jusques à remplir un cercle tout entier.

XXXIV. Dans cette incertitude il faut s' en tenir uniquement à la Théorie, qui nous a conduit si bien jusqu'ici sans que nous aions besoin de nous livrer à des conjectures. En effet n'aiant pas encore tenu compte de toutes les circonstances qui concourent à déterminer le mouvement de la corde, il ne faut pas être surpris que la continuation de ces courbes ne soit pas encore décidée. Or nous n' avons pas encore introduit dans le calcul cette circonstance fort-essentielle à la question, que la corde est fixée par ces deux bouts A & B, de sorte que l'un & l' autre de ces points demeure toujours en repos. Sans cette condition la continuation de nos courbes seroit effectivement indéterminée, & partant c'est de là qu'il faut tirer la véritable loi que nous devons suivre dans cette opération. Je m'en vais donc rechercher cette loi dans les Articles suivans.

Continuation des deux courbes données pour achever notre construction.

XXXV. Puisque notre question renferme essentiellement cette condition, que les deux points A & B demeurent toujours immobiles, la continuation des deux courbes ASB & AVT doit être telle, que si nous en déterminons pour un tems quelconque les éloignemens de ces deux points à l' axe, ils se trouvent constamment $= 0$; donc si nous concevons le point X transporté ou en A, ou en B, il faut que dans l' un & l' autre cas on ait toujours

$$\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2c}\, tTVu = 0$$

quelque grands ou petits qu'on prenne de part & d'autre les intervalles égaux $XT = Xt$, qui sont proportionels au tems. C'est donc cette circonstance si essentielle à notre question, qui nous montrera de quelle manière il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà de l'étendue de la corde AB.

XXXVI. Comme cette expression qu'on doit égaler à zero dépend des deux courbes données à la fois, j'observe d'abord, que chaque partie doit évanoüir séparément. Car si au commencement la corde aiant été réduite à la figure ASB avoit été relachée sans lui imprimer du mouvement, la courbe AVB évanoüiroit ou seroit confondue avec l'axe même AB, & alors il s'agiroit de continuer la seule courbe ASB, d'où l'on tireroit $TN + tn = 0$. De la même manière, si au commencement la corde avoit été laissée dans son état naturel, & qu'on eut imprimé à chacun de ses points un certain mouvement représenté par la courbe AVB, de sorte que l'autre courbe ASB fût confonduë avec l'axe AB: on n'auroit qu'à continuer la seule courbe AVB, dont la continuation devroit être telle, qu'il fut $tLUu = 0$, en prenant le point X ou en A, ou en B.

XXXVII. Cependant il n'est pas absolument nécéssaire, qu'on pose séparément $TN + tn = 0$, & l'aire $tTVu = 0$, car on verra facilement que tout revient au même, pourvû qu'on fasse ensorte que $TN + tn - \frac{1}{c}\, tTVu$ évanoüisse, sans que chaque partie séparément se réduise à rien. Ainsi quoique la continuation de nos deux courbes soit indéterminée en elle même, l'usage que nous en ferons est néanmoins déterminé, & partant rien n'empêche que nous ne continuions chacune à part, sans avoir égard à l'autre,

& de là nous tirerons la méthode la plus ſimple pour la pratique. Donc puiſque nous avons à remplir ces deux conditions,

$$1^\circ\ TN + tn = 0 \ \&\ 2^\circ\ tTUu = 0$$

la première détermine la continuation de la courbe *ASB* au delà du terme *A*, & nous fait voir, que l'appliquée *tn* doit être égale à *TN*, mais poſée dans une ſituation contraire par rapport à l'axe *AB* continué. Or la même continuation doit auſſi avoir lieu dans l'autre courbe *AUB* afin que l'aire *tTUu* ſoit réduite à rien.

XXXVIII. Soit donc *AB* (*fig.* 5.) la corde dans ſon état naturel, que nous ſuppoſons de la même épaiſſeur par tout, & nommant comme ci-deſſus ſa longueur $AB = a$, ſon poids $= P$, & ſa tenſion $= T$, poſons pour abreger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$, où *g* marque la hauteur d'où un corps tombe dans une ſeconde. Cela poſé ſoit *ASB* la figure, à laquelle la corde a été réduite au commencement, & *AVB* l'échelle des viteſſes qui lui ont été imprimées au moment du rélachement, & pour déterminer le mouvement que la corde aura dans la ſuite, il faut continuer les deux courbes au delà de *A* enſorte, que prenant les intervalles *AX* & *Ax* égaux entr'eux, il ſoit $xs = XS$ & $xu = XV$. D'où l'on voit que les courbes continuées *AsB'* & *AuB'* ſeront égales & ſemblables aux données *ASB* & *AVB*. Par la même raiſon au delà du terme *B* il faut décrire les courbes *Bs'A'* & *Bu'A'* égales & ſemblables aux courbes *BSA* & *BVA*, mais dans une ſituation contraire à l'égard de l'axe continué *AB*.

XXXIX. Par cette opération on pouſſera la continuation de nos courbes par les eſpaces *AB'* & *BA'* égaux à la longueur de la corde *AB*. Aiant maintenant à droite du point *A* les courbes *ASBs'A'* & *AVBu'A'*, il faut qu'on ait à gauche des courbes ſemblables & égales *AsB'S'A'*

& $AuB'V''A''$ décrites de l'autre côté de l'axe : & il en est encor de même au delà du terme B. D'où il est évident comment la continuation doit se faire de part & d'autre à l'infini; on n'a qu'à prendre sur la continuation de l'axe les intervalles AB', $B'A''$, $A''B'''$ &c. & BA', $A'B''$, $B''A'''$ &c. égaux à la longueur de la corde AB, & décrire sur chacun de ces intervalles les deux courbes données ASB & AVB alternativement au dessus & au dessous de l'axe, comme l'ordre des lettres A & B le marque plus clairement qu'on ne le sauroit expliquer par une longue description. Voilà donc nos deux courbes continuées à l'infini, & cela conformément à la Théorie du mouvement.

Détermination de l'état de la corde pour chaque tems proposé.

XL. Pour déterminer l'état de la corde à un tems quelconque de *t secondes* (*fig.* 5.) depuis le commencement, tout revient à déterminer le lieu où se trouvera alors chaque point de la corde, c'est-à-dire sa distance de l'axe ou de l'état naturel de la corde AB. Considérons donc un point quelconque de la corde X, qui au commencement a été en S, & soit y la distance à laquelle il se trouvera à présent au dessus de l'axe selon la figure. Pour cet effet qu'on prenne sur l'axe de part & d'autre du point X les intervalles $XT = Xt = ct$, & puisque l'appliquée dans ces deux points ont une situation contraire à celle que nous avons supposées ci-dessus, nous aurons en vertu du §. XXXI.

$$y = -\frac{1}{2}(TN + t\eta) - \frac{1}{2c}\cdot \text{aire } tTUu$$

en tant que cette aire tombe au dessous de l'axe.

XLI. Or pour avoir cette aire de l'échelle des vitesses AVB continuée, qui est comprise entre les appliquées

tu & TU, on voit qu'elle eſt compoſée de l'aire AVB au deſſous de l'axe, & des deux aires Atu & BTU au deſſus de l'axe : d'où nous aurons

$$y = -\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2}(AVB - Atu - BTU)$$

pour l'éloignement du point X au deſſus de l'axe, d'où l'on comprend que ſi la valeur de cette expreſſion eſt négative, le point X ſe trouve alors au deſſous ou de l'autre côté de l'axe. Comme ces deux courbes ſe trouvent alternativement an deſſus & au deſſous de l'axe, il eſt clair qu'avec le tems le point X paſſera tantôt au deſſus & tantôt au deſſous de l'axe, d'où réſultera un mouvement d'oſcillation ſemblable à celui d'un pendule que je m'en vais examiner plus ſoigneuſement, puiſque c'eſt à cet article auquel preſque tous ceux qui ont traité cette matière, ſe ſont attaché principalement.

Conſidérations ſur le mouvement de vibration des cordes également épaiſſes.

XLII. Cherchons d'abord l'état de la corde après le tems t, qui donne $XT = Xt = AB = a$, de ſorte que ce tems ſoit $t = \frac{a}{c} = a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ exprimé en *ſecondes*. Donc puiſque $XT = AB$ & $Xt = AB$, nous aurons $BT = AX$ & $At = BX$. Prenons ſur la corde AB le point ξ enſorte que $B\xi = AX$, pour avoir $BT = B\xi$ & $At = A\xi$, & par la loi de continuation nous aurons les appliquées $TN = \xi\sigma$, $TU = \xi\upsilon$, & $tn = \xi\sigma$, $tu = \xi\upsilon$, & de là les aires $BTU = B\xi\upsilon$ & $Atu = A\xi\upsilon$; de ſorte que $AVB - Atu - BTU = \sigma$. Par conſéquent le point X de la corde ſe trouvera alors à la diſtance de l'axe $y = -\frac{1}{2}(TN + tn) = -\xi\sigma$

ou bien au dessous de l'axe en y de sorte que $Xy = \xi\tau$, d'où l'on voit qu'après le tems $t = a\sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \sqrt{\frac{Pa}{2Tg}}$, toute la corde aura la figure $Ay\zeta B$ semblable à la figure initiale, mais doublement renversée, savoir de haut en bas, & de droite à gauche. Il y aura donc aussi $\xi\zeta = XS$.

XLIII. De là on comprend déja qu'après le tems double $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde doit reprendre la première figure ASB, qui lui a été imprimé au commencement. Car supposant $t = \frac{2a}{c}$ les points T, t parviendront en X' & X'', de sorte que $XX' = XX'' = 2AB$, & les appliquées en X' & X'' les mêmes qu'en X, aussi l'aire de l'échelle des vitesses comprise entre les appliquées $X'V'$ & $X''V''$ devient $= 0$. Alors donc l'éloignement du point X à l'axe AB en haut sera $y = \frac{1}{2}(X'S' + X''S'') = XS$, ou bien la corde se trouvera parfaitement rétablie dans sa première situation ASB, & aura aussi par conséquent le même mouvement, qui lui a été imprimé au commencement. Il n'est pas besoin d'avertir ici, que je fais abstraction de tous les empêchemens & autres causes, qui affoiblissent peu à peu le mouvement de la corde, & l'éteignent enfin tout-à-fait. Cette circonstance ne touche pas plus la solution générale que je donne ici, que toutes les solutions particulières qui ont été publiées par d'autres.

XLIV. Puisque nous venons de voir qu'après le tems $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde parvient dans son premier état; & qu'au milieu de ce tems elle s'est trouvée dans une situation renversée, en comparant ce mouvement avec celui d'un pendule, on a raison de dire, que pendant le tems

$t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde a achevé deux oscillations ou deux vibrations, de sorte que le tems de chaque vibration est censé d'être $= a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ *secondes*, & partant le nombre des vibrations, que la corde achevera pendant une *seconde* sera $= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2Tga}{P}} = \sqrt{\frac{2Tg}{Pa}}$. C'est ce nombre qu'on regarde comme la mesure du son que la corde rend par son mouvement de vibration. Pour mieux comprendre cette mesure absoluë, supposons la tension T équivalente au poids qu'auroit une corde de la même grosseur dont la longueur seroit $= k$, de sorte qu'on ait $T : P = k : a$, & alors nous aurons pour la mesure du son ce nombre $\frac{\sqrt{2gk}}{a}$, d'où l'on voit que le son est réciproquement proportionel à la longueur de la corde, la tension k demeurant la même.

XLV. Quoiqu'il soit certain que la corde revient toujours après le tems $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \frac{2a}{\sqrt{2gk}}$ dans le même état; il ne s'ensuit pas nécessairement que la corde n'acheve dans ce tems que deux vibrations, & il seroit bien possible qu'elle en fit cependant ou quatre, ou 6, ou 8, ou plusieurs selon un nombre pair quelconque, & alors le nombre des vibrations rendues dans une *seconde* deviendroit deux, ou 3, ou 4, ou plusieurs fois plus grand que je l'ai supposé. Cela dépend d'une certaine disposition de l'état initial, comme je l'ai remarqué autres fois, & d'où M. Bernoulli sur tout a dérivé l'explication de tous les sons qu'une corde peut rendre tant séparément qu'à la fois. Je remarque ici seulement que toutes les belles propriétés que ce profond Géomêtre a déduites de la nature des lignes courbes comprises dans les équations des *sinus* raportées ci-dessus §. XIX. conviennent

nent également à toutes les autres courbes qui ont à peu près la même figure, quand même leur nature ne pourroit pas être exprimée par aucune équation analitique; ou bien les mêmes phénomènes résulteroient, si les plusieurs ventres, que M. Bernoulli considère dans les cordes, étoient des arcs circulaires, ou des portions de toute autre courbe, égales entr'elles.

XLVI. Ainsi si les deux courbes *ASB* & *AVB* qui déterminent l'état initial de la corde, étoient semblables à nos deux courbes représentées dans notre figure sur l'espace ou double *AA'* ou triple *AB''* &c. de la longueur de la corde *AB*, de sorte que ces courbes fussent réduites dans l'espace *AB*, alors la corde rendroit ou deux ou trois fois plus de vibrations, que je viens de marquer, tout comme si ces courbes étoient des lignes de *sinus*. Je remarque encore, que si les deux courbes *ASB* & *AVB* avoient deux moitiés semblables entr'elles, ou que la ligne droite tirée perpendiculairement par le milieu de la corde *AB*, fût un diamètre de ces deux courbes, alors toute la corde parviendroit au même instant dans l'état naturel *AB*, de sorte que ce n'est pas non plus une propriété, qui ne convienne qu'aux seules lignes des *sinus*.

Du mouvement d'une corde qui n'est ébranlée que dans une partie.

XLVII. De là il est clair, que tant s'en faut que ma solution soit contraire à celles que M.rs Bernoulli & D'Alembert ont données de cette question, qu'elle les comprend plutôt parfaitement avec cette seule circonstance, qu'elle me paroit beaucoup plus générale. Si l'on me vouloit objecter, que l'équation générale pour les lignes des *sinus* donnée ci-dessus §. XIX. renferme en soi toutes les cour-

bes possibles, je crois que le cas que je m'en vais développer détruira ce sentiment. Qu'on n'ébranle d'abord que la partie *AD* de la corde *AB*, en la réduisant à la figure *AnD*, & qu'on la relâche subitement sans lui imprimer du mouvement, de sorte que l'échelle des vitesses se confonde par tout avec l'axe pendant que l'autre ligne est composée de la courbe *AnD*; & de la droite *DB*, dont la continuation formera au delà de *A* la courbe *Ad*, & de part & d'autre du point *A'* les courbes *A'D'*, & *A'd'* égales à *AnD*, & ainsi de suite.

XLVIII. Dans ce cas il ne s'agit point proprement d'un mouvement de vibration, mais on demande comment cette agitation initiale, est successivement répandue par toute la corde. Soit comme auparavant la longueur $AB = a$, le poids $= P$, la tension $= T$, & pour abreger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$: considérons un point quelconque de la corde *X*, qui depuis l'ébranlement restera en repos pendant le tems $= \frac{XD}{c}$ & alors il commencera à être agité pendant un tems $= \frac{2\,AD}{c}$ après quoi il sera encore en repos jusqu'à ce que le tems *t* multiplié par *c* atteigne la courbe *d'A'D'*, & ainsi de suite; de sorte que chaque partie de la corde sera mise alternativement en mouvement & en repos. Dès le commencement on verra avancer l'agitation *AnD* jusqu'à *B*, d'où elle retournera jusqu'en *A*, & ainsi de suite, en faisant chaque tour en même tems, que la corde acheveroit une oscillation. Maintenant on m'accordera aisément que ce mouvement ne sauroit en aucune manière être représenté par les lignes des *sinus*.

RECHERCHES

Sur le mouvement des cordes inégalement grosses.

PAR M. EULER.

I. AIANT examiné dans le Mémoire précédent le mouvement des cordes également grosses, j'y ai donné l'équation générale pour le mouvement des cordes, dont la grosseur est variable selon une loi quelconque, où il faut toujours sous-entendre que les agitations de la corde sont quasi infiniment petites. Soit donc IK (*fig.* 1.) une telle corde quelconque tendue par la force $= T$, & prenant d'un point fixe I une portion indéfinie $IX = x$, posons l'épaisseur en $X = qq$, ensorte que $qq\,dx$ exprime la masse & le poids de l'élément $Xx = dx$, & partant $\int qq\,dx$ la masse & le poids de la portion $IX = x$, que j'avois nommé $= p$. Cela posé si à un tems quelconque de t *secondes* depuis une époque fixe le point de la corde X se trouve en Y, nommant l'intervalle $XY = y$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$\frac{2Tg}{qq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

où g marque la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une *seconde*.

II. Puisque la tension T est mesurée par un poids, en le prenant de la même matière dont est faite la corde, nous pouvons substituer sa masse, ou son volume à sa place, de sorte que T sera une grandeur de trois dimensions, & partant $\frac{2Tg}{qq}$ une de deux, que je nommerai $\frac{2Tg}{qq} = rr$, d'où l'on voit que r sera une certaine fonction de x don-

née par la grosseur & la tension de la corde. Tout revient donc à résoudre cette équation $rr\,(\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2})$, ou à trouver quelle fonction sera l' appliquée y des deux variables x & t. Il faut donc chercher l' intégrale, & même l' intégrale complète de cette équation, qui exigeant une double intégration, l' intégrale ne sauroit être compléte à moins qu'elle ne renferme deux fonctions arbitraires.

III. Or sur ce sujet je dois d'abord cette facheuse remarque, que tous mes efforts ont été jusqu'ici inutiles pour trouver en général l' intégrale compléte de notre équation, quelque fonction que soit la quantité rr de x, cependant j' ai trouvé une infinité de cas, où l' intégration réussit, & partant où l' on peut déterminer le mouvement de la corde. Il faut donc absolument borner nos recherches à de certaines espèces de cordes, dont la grosseur $qq = \frac{2Tg}{rr}$ est exprimée par de certaines fonctions de x. Car il arrive à notre équation $rr\,(\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2})$ à peu près la même chose qu'à l'équation $dy + yy\,dx = X\,dx$ proposée autrefois par le Comte Riccati, qu'elle n' est intégrable qu'en de certains cas, & ces cas suivent dans l'une & l' autre presque la méme loi. Il est donc bien important de chercher ces cas ou les loix de la grosseur variable, où l'on est en état de déterminer le mouvement de la corde.

IV. Comme dans le cas des cordes également grosses, où rr étoit une quantité constante $= cc$ l' intégrale compléte a été trouvée $y = \Gamma: (x + ct) + \Delta: (x - ct)$; On comprend qu'en général toutes les fois que l'intégration réussit, la forme de l' intégrale doit être semblable, & après quelques essais j'ai trouvé que dans ces cas l'intégrale peut être représentée sous cette forme: $y =$

$P\Gamma : (\int u dx + t) + Q\Gamma' : (\int u dx + t) + R\Gamma'' (\int u dx + t) +$ &c. où P, Q, R &c. de même que u sont de certaines fonctions de la seule variable x. Ensuite puisque la quantité t se peut prendre aussi bien négativement que positivement, pour compléter l'intégrale on y doit ensuite ajouter encore ces termes:

$P\Delta : (\int u dx - t) + Q\Delta' : (\int u dx - t) + R\Delta'' (\int u dx - t) +$ &c.

qui n'exigent donc point une recherche particuliére. De là il est clair que pour trouver des cas intégrables, on n'a qu'à pousser successivement plus loin les termes de cette expression générale, ce qui me fournit le sujet des problemes suivans.

PROBLEME I.

V. Trouver les conditions de la fonction rr, pour que l'intégrale de notre équation $rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme $y = P\Gamma : (\int u dx + t)$.

SOLUTION.

Puisque P & u sont des fonctions de la seule variable x, prenons de cette forme les différentiels du premier dégré $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dP}{dx}\Gamma : (\int u dx + t) + Pu\Gamma' : (\int u dx + t)$ & $\left(\frac{dy}{dt}\right) = P\Gamma' : (\int u dx + t)$, & de là passons aux différentiels du second dégré: $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{ddP}{dx^2}\Gamma : (\int u dx + t)$ $+ \frac{2u dP + P du}{dx}\Gamma' : (\int u dx + t) + Puu\Gamma'' : (\int u dx + t)$ & $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = P\Gamma'' : (\int u dx + t)$. Maintenant faisons

$(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{1}{rr}(\frac{ddy}{dt^2})$, enſorte que chaque eſpace de fonctions ſoit ſéparément réduite à zero, & nous aurons ces trois égalités

$$\frac{ddP}{dx^2} = 0,\ \frac{2udP + Pdu}{dx} = 0, \&\ Puu = \frac{P}{rr},$$

dont la première donne $P = \alpha x + \beta$, la ſeconde $PPu = A$ ou $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2}$, & la troiſiéme $uu = \frac{1}{rr}$ ou $rr = \frac{(\alpha x + \beta)}{AA}$. Ainſi notre équation eſt intégrable dans le cas $rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA}$ où la groſſeur de la corde devient $qq = \frac{2Tg \cdot AA}{(\alpha x + \beta)^4}$, & alors on aura $P = \alpha x + \beta$ & $u = \frac{1}{r} = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^4}$.

COROLL. 1.

VI. Poſant $\alpha = 0$ & $\beta = 1$ nous aurons le cas des cordes également groſſes ou $qq = 2Tg \cdot AA$, donc poſant la groſſeur $= ff$, à cauſe de $AA = \frac{ff}{2Tg}$, il en réſulte $rr = \frac{2Tg}{ff}$, $P = 1$, & $u = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}$; deſorteque l'intégrale complète de cette équation $\frac{2Tg}{ff}(\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2})$ ſera $y = \Gamma:(\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} + t) + \Delta:(\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} - t)$.

COROLL. 2.

VII. Si α n'eſt pas zero il eſt permis de poſer $\beta = 0$ & $\alpha = 1$, puiſqu'on peut prendre le point I où l'on

veut indépendamment des points A & B, où l'on veut ensuite fixer la corde. Soit donc la grosseur de la corde en $X = \frac{c^6}{x^4} = qq$, & nous aurons $2Tg \cdot AA = c^6$, donc $A = \frac{c^3}{\sqrt{2Tg}}$, $P = x$, & $u = \frac{c^3}{xx\sqrt{2Tg}}$, par conséquent $\int u\,dx = \frac{-c^3}{x\sqrt{2Tg}}$.

COROLL. 3.

VIII. Donc si l'épaisseur de la corde en X est $qq = \frac{c^6}{x^4}$, la tension étant $= T$, le mouvement de la corde sera contenu dans cette équation:

$$y = x\Gamma : \left(\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} - t\right) + x\Delta : \left(\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} + t\right),$$

& on peut maintenant fixer la corde en tels deux points A & B que l'on veut.

SCHOLIE.

IX. Voilà donc déja une certaine espèce de cordes, dont on peut déterminer le mouvement; une telle corde est formée par la révolution d'une hyperbole Fab (*fig.* 2.) autour de son asymtote IB, la nature de cette hyperbole étant exprimée par cette équation $XQ = \frac{b^3}{gX^2} = \frac{b^3}{xx}$ car alors la section de la corde au point X devient $= \frac{\pi b^6}{x^4}$ qui étant égale à $qq = \frac{c^6}{x^4}$, on aura $c^6 = \pi h^6$ & $c^3 = h^3\sqrt{\pi}$. Donc si nous exprimons la tension T par le poids d'un cylindre fait de la même matière, dont le demi diamètre de la base est $= h$ & la hauteur $= k$,

on aura $T = 2hhk$, & partant $\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} = \frac{bb}{x\sqrt{2gk}}$. Puisque l'épaiſſeur de cette corde au point I devient infiniment grande, on comprend aiſément, que la partie de la corde qu'on veut ébranler, AB, doit être aſsès éloignée du point I, afin que la corde ne ſoit pas trop groſſe.

PROBLÈME 2.

X. Trouver les conditions de la fonction rr, ou bien de la groſſeur qq, pour que l'intégrale de notre équation $(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{qq}{2Tg}(\frac{ddy}{dt^2})$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma : (\int u\,dx + t) + Q\Gamma' : (\int u\,dx + t).$$

SOLUTION.

Puiſque P, Q & u ſont des fonctions de la ſeule variable x, en prenant les différentiels du ſecond dégré comme dans le Problème précédent, & en omettant pour abréger la quantité $\int u\,dx + t$ après les ſignes de *fonctions* Γ, Γ', Γ'', &c. nous aurons:

$$(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{ddP}{dx^2}\Gamma : + \frac{2u\,dP + Pdu}{dx}\Gamma' : + Puu\Gamma'' :$$
$$+ \frac{ddQ}{dx^2}\Gamma' : + \frac{2udQ + Qdu}{dx}\Gamma'' : + Quu\Gamma''' :$$

qu'il faut égaler à

$$\frac{qq}{2Tg}(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{qqP}{2Tg}\Gamma'' : + \frac{qqQ}{2Tg}\Gamma''' :$$

d'où nous tirons d'abord $\frac{qq}{2Tg} = uu$, & enſuite

$$\frac{2udQ + Qdu}{dx} = o;\ \frac{2u\,dP + Pdu}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = o, \ \& \ \frac{ddP}{dx^2} = o$$

dont l'intégration fournit:

$QQu = A$; $PPu + \int \frac{PddQ}{dt} = B$ & $P = \alpha x + \beta$. Or $\int \frac{PddQ}{dx} = \frac{PdQ}{dx} - \int \frac{dP}{dx} dQ$, & puiſque $\frac{dP}{dx} = \alpha$, nous aurons $\int \frac{PddQ}{dx} = \frac{(\alpha x + \beta) dQ}{dx} - \alpha Q$, de ſorte que notre ſeconde équation ſera: $(\alpha x + \beta)^2 u + \frac{(\alpha x + \beta) dQ}{dx} - \alpha Q = B$, ou bien à cauſe de $u = \frac{A}{QQ}$ par la première:

$$\frac{A(\alpha x + \beta)^2 dx}{QQ} + (\alpha x + \beta) dQ - \alpha Q dx = B dx.$$

Poſons maintenant $Q = (\alpha x + \beta) z$, pour avoir

$$\frac{A dx}{zz} + (\alpha x + \beta)^2 dz = B dx,$$

d'où nous tirons

$$\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{zzdz}{Bzz - A}, \text{ \& } C - \frac{1}{\alpha(\alpha x + \beta)} = \int \frac{zzdz}{Bzz - A}$$

& de là nous aurons z déterminé par x; enſuite aiant $Q = (\alpha x + \beta) z$, $u = \frac{A}{QQ}$, $P = \alpha x + \beta$, & $qq = 2 Tguu$, on verra ſous quelle loi de la groſſeur notre équation admet l'intégration.

COROLL. 1.

XI. Afin que z puiſſe aiſément ſe déterminer par x, limitons les cas enſorte que $B = 0$, & $\int \frac{zzdz}{Bzz - A} = \frac{-z^3}{3A}$. Or alors il convient de diſtinguer deux cas ſelon que $\alpha = 0$ ou non. Soit premièrement $\alpha = 0$ & $\beta = 1$, pour avoir $x = e - \frac{z^3}{3A}$, donc $z = \sqrt[3]{3A(e - x)}$

$= Q$, $u = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{9(c-x)^2}}$, $P = 1$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AA}}{\sqrt[3]{81(c-x)^4}}$.

C O R O L L. 2.

XII. Posons pour ce cas $e = 0$, & soit la grosseur $qq = cc\sqrt[3]{\frac{c^4}{x^4}}$; nous aurons donc $\sqrt[3]{AA} = \frac{cc\sqrt[3]{81c^4}}{2Tg}$, & $\sqrt[3]{A} = \frac{c\sqrt[3]{9cc}}{\sqrt{2Tg}}$; donc $u = \frac{c}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{cc}{xx}}$, & $\int u\,dx = \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $Q = -\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, de sorte que pour ce cas l' équation intégrale sera

$$y = \Gamma:\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t\right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}\Gamma':\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t\right)$$
$$+ \Delta:\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t\right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}\Delta':\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t\right).$$

C O R O L L. 3.

XIII. Pour l'autre cas posons $\beta = 0$ & $\alpha = 1$ pour avoir $\frac{1}{x} + \frac{1}{c} = \frac{z^3}{3A} = \frac{c+x}{cx}$, donc $z = \sqrt[3]{\frac{3A(c+x)}{cx}}$, & ensuite $Q = \sqrt[3]{\frac{3A}{c}xx(c+x)}$, $u = \frac{\sqrt[3]{Acc}}{\sqrt[3]{9x^4(c+x)^2}}$, $P = x$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AAc^4}}{\sqrt[3]{81x^8(c+x)^4}}$. Soit donc la grosseur $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^4c^4}{x^8(c+x)^4}}$ pour avoir $\sqrt[3]{A} = \frac{f\sqrt[3]{9f^2}}{\sqrt{2Tg}}$, donc $Q = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{fxx(c+x)}{c}}$, & $u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{ccf}{x^4(c+x)^2}}$.

COROLL. 4.

XIV. Dans ce même cas posons $c = \infty$, de sorte que la grosseur de la corde soit $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^8}{x^8}}$, & puisque $P = x$, $Q = \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x^4}}$, donc $\int u\,dx = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}}$, & l' équation intégrale sera

$$= x\Gamma : \left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t\right) + \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}\Gamma' : \left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t\right)$$
$$+ x\Delta : \left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t\right) + \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}\Delta' : \left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t\right).$$

SCHOLIE.

XV. Prenant pour la grosseur de la corde cette forme $qq = \frac{f^{2+n}}{x^n}$ nous avons déja decouvert quatre cas, qui admettent la résolution, qui sont $n = 0$, $n = 4$, $n = \frac{4}{3}$, $n = \frac{8}{3}$, & c' est aussi dans ces mêmes cas que l' équation Riccatienne $dy + yy\,dx = \frac{A\,dx}{x^n}$ est intégrable: d' où l' on peut conclure, que les cas suivans $n = \frac{8}{5}$, $n = \frac{12}{5}$, $n = \frac{12}{7}$, $n = \frac{16}{7}$ &c. auront aussi la même propriété, que le mouvement de la corde pourra alors être déterminé. Mais le cas du Coroll. 3. n'est pas moins remarquable, où la grosseur de la corde est $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^8c^4}{x^8(c+x)^4}}$; pour la résolution duquel j'observe que $\int u\,dx = \frac{-3ff\sqrt[3]{f}}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{c+x}{cx}} = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f(c+x)}{cx}}$ d' où

l'on formera aisément l'équation intégrale compléte. Mais notre résolution s'étend beaucoup plus loin; d'abord aiant trouvé le raport entre x & z par cette équation $\frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2} = \frac{zzdz}{Bzz-A}$, on aura $P = \alpha x + \beta$, $Q = (\alpha x + \beta) z$ & $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2 zz}$, d'où nous tirons

$$\int u\,dx = \int \frac{A\,dx}{(\alpha x + \beta)^2 zz} = \int \frac{A\,dz}{Bzz - A},$$

de sorte que toutes nos quantités peuvent être déterminées assés simplement par la nouvelle variable z, aiant $\frac{1}{\alpha x + \beta} = -\alpha \int \frac{zzdz}{Bzz-A}$. Ainsi ce Probleme nous fournit une infinité d'espèces de cordes dont le mouvement peut être déterminé.

PROBLEME 3.

XVI. Trouver les conditions de la grosseur de la corde qq, pour que l'intégrale de notre équation $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{qq}{2Tg}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma : \left(\int u dx + t\right) + Q\Gamma' : \left(\int u dx + t\right) + R\Gamma'' : \left(\int u dx + t\right).$$

SOLUTION.

Faisant le calcul comme dans le Probleme précédent, on trouve d'abord $qq = 2Tguu$, & ensuite il faut satisfaire à ces équations:

$\frac{ddP}{dx^2} = 0$, $2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0$,

$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0$, & $2udR + Rdu = 0$,

dont la première & dernière donnent

$$P = \alpha x + \beta, \ \& \ RRu = A, \text{ ou } u = \frac{A}{RR},$$

la seconde donne

$PPu + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B$, ou bien $\frac{APP}{RR} + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B$,

& la troisiéme

$$QQu + \frac{QdR}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} dR = C.$$

Je m' arrêterai ici uniquement aux cas, où l' épaisseur qq, & partant aussi u devient égale à une certaine puissance de x, & où les lettres Q & R peuvent aussi être exprimées par des puissances de x. Ici il faut considérer deux cas, l' un ou $P = 1$, & l' autre ou $P = x$.

1° Soit donc $P = 1$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+1}$, & $R = \gamma x^{2n+2}$, pour obtenir le même nombre de dimensions dans nos égalités, & puisque la premiére est remplie d' elle même, les autres donneront

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$n\alpha + (n+1)n\beta = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+1)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+2)(2n+1)\gamma = 0,$$

$$2udR + Rdu = 0,$$

$$2(n+1)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

donc $5n + 4 = 0$, & $n = -\frac{4}{5}$: or de la premiè-

re nous tirons $\beta = -\frac{\alpha}{n+1} = -5\alpha$, & de la seconde $(3n+2)\alpha\beta + 2(n+1)(2n+1)\gamma = 0$ il résulte $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$. Donc si $u = \alpha x^{-\frac{4}{5}}$ ou bien la grosseur de la corde $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{8}{5}}$ à cause de $\int u\,dx = 5\alpha x^{\frac{1}{5}}$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$y = \Gamma\colon(5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) - 5\alpha x^{\frac{1}{5}}\,\Gamma'\colon(5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t)$$

$$+ \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{2}{5}}\,\Gamma''\colon(5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) + \Delta\colon(5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t)$$

$$- 5\alpha x^{\frac{1}{5}}\,\Delta'\colon(5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{2}{5}}\,\Delta''\colon(5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t),$$

où posant $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{8}{5}}$ il faut prendre $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{4}{5}}$.

2° Soit $P = x$ & $u = \alpha x^{n}$, posons $Q = \beta x^{n+2}$, & $R = \gamma x^{2n+3}$, & nos égalités donneront

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$2\alpha + n\alpha + (n+2)(n+1)\beta = 0$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+2)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+3)(2n+2)\gamma = 0,$$

$$2udR + Rdu = 0,$$

$$2(2n+3)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

d'où nous tirons

$$\beta = -\frac{(n+2)\alpha}{(n+1)(n+2)} = -\frac{\alpha}{n+1},\ \gamma = -\frac{(3n+4)\alpha\beta}{(2n+3)(2n+2)},$$

& $5n + \beta = 0$; donc puisque $n = -\frac{6}{5}$, nous aurons $\beta = 5\alpha$, & $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$, & ensuite $u = \alpha x^{-\frac{6}{5}}$,

$\int u\,dx = -5\alpha x^{-\frac{1}{5}}$, & $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{12}{5}}$, de sorte que posant $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{12}{5}}$ nous aions $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{6}{5}}$. & pour le mouvement

$$y = x\Gamma : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t) + 5\alpha x^{\frac{4}{5}}\Gamma' : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t)$$
$$+ \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{3}{5}}\Gamma'' : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t) + x\Delta : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t)$$
$$+ 5\alpha x^{\frac{4}{5}}\Delta' : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{3}{5}}\Delta'' : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t).$$

PROBLEME 4.

XVII. La grosseur de la corde qui répond à l'intervalle $IX = x$ étant exprimée ainsi $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{2-2n}$, trouver l'équation générale, qui en détermine le mouvement.

SOLUTION.

Prenons $u = \alpha x^{n-1}$, & il faut qu'il soit $\alpha = \frac{f^{1-n}}{\sqrt{2Tg}}$; d'où nous tirons $\int u\,dx = \frac{\alpha}{n} x^n$. Posons maintenant pour notre équation intégrale cherchée

$$y = P\Gamma : \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + Q\Gamma' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right)$$
$$+ R\Gamma'' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + S\Gamma''' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + \&c.$$
$$+ P\Delta : \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + Q\Delta' \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right)$$
$$+ R\Delta'' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + S\Delta'' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + \&c.$$

& soit $P = x^m$, $Q = Bx^{m+n}$, $R = Cx^{m+2n}$, $S = Dx^{m+3n}$ &c. où il faut remarquer que l' exposant m doit être ou $= 0$, ou $= 1$, afin que $\frac{ddP}{dx^2} = 0$. Cela posé nos égalités donneront comme il suit:

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0$$

$$2m\alpha + (n-1)\alpha + (m+n)(m+n-1)B = 0$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0$$

$$2(m+n)\alpha B + (n-1)\alpha B + (m+2n)(m+2n-1)C = 0$$

$$2udR + Rdu + \frac{ddS}{dx} = 0$$

$$2(m+2n)\alpha C + (n-1)\alpha C + (m+3n)(m+3n-1)D = 0$$

$$2udS + Sdu + \frac{ddT}{dx} = 0$$

$$2(m+3n)\alpha D + (n-1)\alpha D + (m+4n)(m+4n-1)E = 0,$$

d' où nous tirons	donc si $m = 0$	& si $m = 1$
$B = -\frac{\alpha(2m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$;	$B = -\frac{\alpha(n-1)}{n(n-1)}$;	$B = -\frac{\alpha(n+1)}{n(n+1)}$;
$C = -\frac{\alpha B(2m+3n-1)}{(m+2n)(m+2n-1)}$;	$C = -\frac{\alpha B(3n-1)}{2n(2n-1)}$;	$C = -\frac{\alpha B(3n+1)}{2n(n+1)}$;
$D = -\frac{\alpha C(2m+5n-1)}{(m+3n)(m+3n-1)}$;	$D = -\frac{\alpha C(5n-1)}{3n(3n-1)}$;	$D = -\frac{\alpha C(5n+1)}{3n(3n+1)}$;
$E = -\frac{\alpha D(2m+7n-1)}{(m+4n)(m+4n-1)}$:	$E = -\frac{\alpha D(7n-1)}{4n(4n-1)}$;	$E = -\frac{\alpha D(7n+1)}{4n(4n+1)}$.

Considérons séparément les deux cas où $m = 0$ & $m = 1$.

1er CAS OÙ $m = 0$, ET $P = 1$.

Dans ce cas nous voions que notre expression devient finie toutes les fois que n est une telle fraction $\frac{1}{\lambda}$ où λ est un nombre impair. Posons donc $n = \frac{1}{\gamma}$ pour avoir

$B =$

$$B = -\frac{\alpha\lambda(\lambda-1)}{1(\lambda-1)} = -\lambda\alpha.$$

$$C = -\frac{\lambda\alpha B(\lambda-3)}{2(\lambda-2)} = +\frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{1\cdot 2(\lambda-1)(\lambda-2)}\alpha^2$$

$$D = -\frac{\lambda\alpha C(\lambda-5)}{3(\lambda-3)} = -\frac{\lambda^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{1\cdot 2\cdot 3(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}\alpha^3$$

$$E = -\frac{\lambda\alpha D(\lambda-7)}{4(\lambda-4)} = +\frac{\lambda^4(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)}\alpha^4$$

&c. &c.

Je n'ai pas ici effacé les facteurs qui se détruisent dans les numérateurs & dénominateurs, puisque toutes les fois qu'un numérateur évanoüit, non seulement le coéficient qui lui répond, mais aussi tous les suivans peuvent être négligés. Voici donc les cas qui en résultent.

1° Si $\lambda = 1$, $n = 1$; $qq = ff$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}$, $\int u dx = \alpha x$; $P = 1$, $Q = 0$, $R = 0$ &c.

2° Si $\lambda = 3$, $n = \frac{1}{3}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{2}{3}}$, $\int u dx = 3\alpha x^{\frac{1}{3}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \alpha x^{\frac{1}{1}}$, $R = 0$; $S = 0$ &c.

3° Si $\lambda = 5$, $n = \frac{1}{5}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{8}{5}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot {}^{\frac{4}{5}}$, $\int u dx = 5\alpha x^{\frac{1}{5}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{4}\alpha x^{\frac{1}{5}}$, $R = +\frac{5\cdot 5}{1\cdot 2} \cdot \frac{4\cdot 2}{4\cdot 3}\alpha^2 x^{\frac{2}{5}}$, $S = 0$ &c.

4° Si $\lambda = 7$, $n = \frac{1}{7}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{12}{l}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{6}{7}}$, $\int u dx = 7\alpha x^{\frac{1}{7}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{6}\alpha x^{\frac{1}{7}}$, $R = +\frac{7\cdot 7}{1\cdot 2} \cdot \frac{6\cdot 4}{6\cdot 5}\alpha^2 x^{\frac{2}{7}}$, $S = -\frac{7\cdot 7\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{6\cdot 4\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4}\alpha^3 x^{\frac{3}{7}}$, $T = 0$ &c.

5° Si $\lambda = 9$, $n = \frac{1}{9}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{16}{9}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{8}{9}}$;
$\int udx = 9\alpha x^{\frac{1}{9}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{9}{1} \cdot \frac{8}{8}\alpha x^{\frac{1}{9}}$; $R = +\frac{9 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 6}{8 \cdot 7}\alpha^2 x^{\frac{2}{9}}$, $S = -\frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6}\alpha^3 x^{\frac{3}{9}}$, $T = +\frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}\alpha^4 x^{\frac{4}{9}}$, $V = 0$ &c.

Posons donc en général $\lambda = 2\mu + 1$, & soit $\lambda\alpha = \beta$; de sorte que la grosseur de la corde $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu}{2\mu+1}}$; on prendra $\beta = \frac{(2\mu+1)f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{-\frac{1}{2\mu+1}}$ & $\int udx = \frac{\alpha}{n} x^n = \beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}$. Or les coéficiens P, Q, R &c. seront déterminés ainsi;

$P = 1$

$$Q = -\frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}}{1}$$

$$R = +\frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta\beta x^{\frac{2}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2}$$

$$S = -\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3 x^{\frac{3}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$T = +\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-5)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4 x^{\frac{4}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \&c.$$

Dans ce cas notre expression devient finie toutes les fois que n est une telle fraction $-\frac{1}{\lambda}$ prenant pour λ un nombre impair quelconque. Posons donc $n = -\frac{1}{\lambda}$, de sorte que la grosseur de la corde soit $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{2\lambda+2}{\lambda}}$. Soit ensuite $\alpha = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}}\cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$ ou $\lambda\alpha = \beta = \frac{\lambda ff}{\sqrt{2Tg}}\cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$, & nous aurons $\int udx = \frac{\alpha}{n}x^n = -\beta x^{-\frac{1}{\lambda}}$, d'où les autres coéficiens seront

$$B = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1}\beta$$

$$C = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(\lambda-1)(\lambda-2)}\cdot\frac{\beta^2}{1\cdot 2}$$

$$D = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}\cdot\frac{\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$E = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)}\cdot\frac{\beta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ \&c.}$$

Soit maintenant $\lambda = 2\mu + 1$, ou bien la grosseur de la corde $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu+4}{2\mu+1}}$. Qu'on prenne $\beta = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{1}{2\mu+1}}$, & nous aurons $\int udx = \frac{\alpha}{n}x^n = -\beta x^{-\frac{1}{2\mu+1}}$.

Or les coéficiens P, Q, R, S &c. se trouveront déterminés de cette manière

$$P = x^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$$

$$Q = \frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta}{1} \cdot x^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$$

$$R = \frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta^2}{1 \cdot 2} \cdot x^{\frac{2\mu-1}{2\mu+1}}$$

$$S = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^{\frac{2\mu-2}{2\mu+1}}$$

$$T = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-6)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^{\frac{2\mu-3}{2\mu+1}} \quad \text{\&c.}$$

Coroll. 1.

XVIII. Voions quelles valeurs obtiendront les coéficiens B, C, D &c. dans l'un & l'autre de nos deux cas, & d'abord au premier ou $m = 0$ & $n = \frac{1}{\lambda}$, nous aurons

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$	$\lambda = 9$	$\lambda = 11$	$\lambda = 13$
$P =$	1	1	1	1	1	1	1
$B =$	0	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$
$C =$	0	0	$+\frac{1}{3}\beta^2$	$+\frac{2}{5}\beta^2$	$+\frac{3}{7}\beta^2$	$+\frac{4}{9}\beta^2$	$+\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	0	0	0	$-\frac{1}{15}\beta^3$	$-\frac{2}{21}\beta^3$	$-\frac{3}{27}\beta^3$	$-\frac{4}{33}\beta^3$
$E =$	0	0	0	0	$+\frac{1}{105}\beta^4$	$+\frac{1}{63}\beta^4$	$+\frac{2}{99}\beta^4$
$F =$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{945}\beta^5$	$-\frac{1}{495}\beta^5$
$G =$	0	0	0	0	0	0	$+\frac{1}{10395}\beta^6$

COROLL. 2.

XIX. Or pour l' autre cas où $m = 1$ & $n = -\frac{1}{\lambda} =$ $= \frac{1}{2\mu + 1}$ ces coéficiens auront les valeurs ſuivantes;

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$	$\lambda = 9$	$\lambda = 11$	$\lambda = 13$
$P =$	x	x	x	x	x	x	x
$B =$	o	β	β	β	β	β	β
$C =$	o	o	$\frac{1}{3}\beta^2$	$\frac{2}{5}\beta^2$	$\frac{3}{7}\beta^2$	$\frac{4}{9}\beta^2$	$\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	o	o	o	$\frac{1}{3\cdot5}\beta^3$	$\frac{2}{3\cdot7}\beta^3$	$\frac{3}{3\cdot9}\beta^3$	$\frac{4}{3\cdot11}\beta^3$
$E =$	o	o	o	o	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\beta^4$	$\frac{3}{3\cdot7\cdot9}\beta^4$	$\frac{6}{3\cdot9\cdot11}\beta^4$
$F =$	o	o	o	o	o	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\beta^5$	$\frac{3}{3\cdot5\cdot9\cdot11}\beta^5$
$G =$	o	o	o	o	o	o	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}\beta^6$

qui ſont les mêmes que les précédentes.

PROBLEME 5.

XX. La groſſeur de la corde étant exprimée par cette formule $qq = \frac{f^4}{x^4}$, où x eſt l'intervalle IX (*fig.* 1.), & qq la groſſeur au point X: déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B, de ſorte que $IA = a$, & $IB = b$, la tenſion étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde apartient au ſecond cas du Probleme précédent, en poſant $\mu = 0$, d'où l'on doit prendre

$\beta = \frac{f'}{\sqrt{2Tg}}$, & puiſque $\int u\,d\,x = -\frac{\beta}{x}$, l' équation pour le mouvement ſera

$$y = x\Gamma : (\frac{\beta}{x} - t) + x\Delta : (\frac{\beta}{x} + t) = XY$$

d' où l' on tire la viteſſe du point Y dans le ſens YX,

$$-(\frac{dy}{dt}) = x\,\Gamma' : (\frac{\beta}{x} - t) - x\Delta' : (\frac{\beta}{x} + t).$$

Pour repréſenter ces fonctions qu'on tire un autre axe ki (*fig.* 3.) ſur lequel on prenne $kx = \frac{\beta}{x}$, $ka = \frac{\beta}{a}$, & $kb = \frac{\beta}{b}$, de ſorte qu'ici les points a & b répondent aux deux termes A & B où la corde eſt fixée. Qu'on décrive ſur l' eſpace ab les deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma\nu$, de ſorte que l' appliquée de celle-là $x\Delta$ repréſente la fonction $\Delta : \frac{\beta}{x}$, & l'appliquée de celle-ci $x\Gamma$ négativement la fonction $\Gamma : \frac{\beta}{x}$, pour l'abſciſſe $kx = \frac{\beta}{x}$. Ces deux courbes ſont arbitraires, pourvû qu'elles aient certaines propriétés exigées par la condition, que les deux points de la corde A & B demeurent immobiles. Pour connoître ces propriétés conſidérons l' état initial de la corde, où le tems $t = 0$, & alors aiant

$$XY = y = x\,(\Delta - x\Gamma),\ \&\ (\frac{dy}{dt}) = x\ (\Delta' : \frac{\beta}{x} + \Gamma' : \frac{\beta}{x})$$

on voit que tranſportant le point X en A ou B, ou bien x en a & b, il faut qu'il ſoit $a\mu = am$ &, $b\nu = bn$. Outre cela pour que les viteſſes en A & B évanoüiſſent auſſi, il eſt néceſſaire que les tangentes de ces deux courbes tant en m & μ, qu'en n & ν ſoient paralelles entr'elles. En obſervant ces conditions la figure de ces deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma\nu$ eſt arbitraire, & on les peut toujours

décrire enforte, qu'il en résulte l'état initial, qui aura été imprimé à la corde au commencement. Ensuite pour connoître l'état de la corde après le tems écoulé $= t$, on n'a qu'à prendre du point x les intervalles xT & $xt = t$, pour avoir $kT = \frac{\beta}{x} + t$ & $kt = \frac{\beta}{x} - t$, & partant les appliquées $TU = \Delta : (\frac{\beta}{x} + t)$ & $tu = - \Gamma : (\frac{\beta}{x} - t)$, d'où l'on aura l'écart du point X de l'axe dans cet instant $XY = y = x\ (TU - tu) = IX\ (TU - tu)$ [*figg.* 1. & 3.]. Mais quand les points T & t tombent au delà des termes a & b, il faut continuer la courbe $n \Delta m$ au delà de a, & la courbe $\mu \Gamma \nu$ au delà de b, enforte que prenant le point x ou en a, ou en b, il y ait toujours $TU = tu$, d'où l'on entend que la partie continuée mn' doit être semblable à la courbe $\mu\nu$, & la partie $\nu\mu'$ à la courbe nm. Donc prenant de part & d'autre les intervalles ab', $b'a''$ &c. ba', $a'b''$ &c. égaux à l'espace ab, les parties vers la droite nm, mn', $n'm''$ &c. seront alternativement semblables à nm & $\mu\nu$; & de la même manière les parties vers la gauche $\mu\nu$, $\nu\mu'$, $\mu'\nu''$ &c. alternativement semblables à $\mu\nu$ & nm; comme on le verra aisément par la figure.

Maintenant quelque grand que soit le tems écoulé t, on pourra assigner l'intervalle XY, auquel le point de la corde X sera alors éloigné de son état naturel, d'où l'on voit qu'après le tems $t = 2ab$, où les points T & t tombent en x' & x'' analogues à x, on aura $XY = x\ (x'\delta' = x''\gamma'') = x\ (x\Delta - x\Gamma)$ tout comme au commencement, de sorte que la corde est parvenue au même état, après avoir achevé dans ce tems deux vibrations, ou selon les circonstances peut être 4 ou 6, ou même plusieurs selon un nombre pair quelconque. Le tems

d'une vibration sera donc $t = ab = \frac{\beta}{a} - \frac{\beta}{b} = \frac{\beta(b-a)}{ab}$ $= \frac{(b-a)f^3}{ab\sqrt{2Tg}}$, ou bien le nombre des vibrations rendues dans une seconde sera $= \frac{ab\sqrt{2Tg}}{(b-a)f^3}$, ou selon les circonstances 2, 3, 4 &c. fois plus grand.

COROLL. 1.

XXI. Une telle corde fera donc des vibrations régulières, de quelque manière qu'elle aura été ébranlée au commencement, & partant les sons qu'elle rend, seront aussi justes que ceux d'une corde partout également épaisse.

COROLL. 2.

XXII. Puisque l'épaisseur de la corde en X est qq $= \frac{f^6}{x^4}$, la masse ou bien le poids de la portion AX sera $= \frac{1}{3} f^6 (\frac{1}{a^3} - \frac{1}{x^3})$, & partant le poids de la corde entière $AB = \frac{1}{3} f^6 (\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3})$. Soit ce poids $= P$ pour avoir $f^3 = \frac{ab\sqrt{3Pab}}{\sqrt{(b^3-a^3)}}$, & le nombre des vibrations rendues par seconde sera $= \sqrt{\frac{2Tg(aa+ab+bb)}{3Pab(b-a)}}$.

COROLL. 3.

XXIII. Posant le poids de la corde $AB = P$ pour avoir $\frac{1}{3} f^6 = \frac{Pa^3b^3}{b^3-a^3}$, le poids de la partie AX, en nommant

mant $IX = x$, sera $= \frac{Pb}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$. Mais il est plus convenable, pour se former une juste idée de cette corde, de remarquer que la grosseur en X est réciproquement proportionnelle au quarré-quarré de l'intervalle $IX = x$.

SCOLIE.

XXIV. Pour connoitre les circonstances, sous lesquelles cette même corde fera deux ou trois &c. fois plus de vibrations qu'à l'ordinaire, étant ébranlé d'une manière quelconque; on comprend de ce que j'ai dit des cordes de la même épaisseur, que cela arrive, lorsque la courbe nm est semblable à la courbe nn', ou nm'' &c., & en même tems la courbe $\mu\nu$ semblable à $\mu\mu'$ ou $\mu\nu''$ &c., ou bien si l'on applique à chaque point x dans l'espace ab une appliquée $= x\Delta - xF$, il faut que cette nouvelle courbe ait deux ou plusieurs parties semblables entr'elles, & alternativement situées à l'égard de l'axe ab (*fig.* 4.). Ainsi pour le cas de deux fois plus d'oscillations, cette nouvelle courbe doit avoir la figure $aycy'b$, de sorte que la partie cya soit égale & semblable à la partie $cy'b$, ou bien en prenant les intervalles $cx = cx'$, qu'il soit $x'y' = xy$. Donc puisque $ka = \frac{\beta}{a}$, & $kb = \frac{\beta}{b}$, nous aurons $kc = \frac{\beta(a+b)}{2ab}$; de là nous formerons ainsi la figure de la corde même au commencement. Aiant $IA = a$ & $IB = b$ (*fig.* 5.), le nœud tombera au point C, ensorte que $IC = \frac{2ab}{a+b}$, c'est-à-dire que IC sera la moyenne harmonique entre IA & IB; & prenant IX

$= \frac{\beta}{kx}$, l'appliquée XY sera $IX \times xy$. Pour rendre cela plus clair, posons $kc = c$, & $cx = cx' = u$, & puisque $IC = \frac{\beta}{c}$, prenons $IX = \frac{\beta}{c+u}$ & $IX' = \frac{\beta}{c-u}$, de sorte que $CX = \frac{\beta u}{c(c+u)}$, & $CX' = \frac{\beta u}{c(c-u)}$, & partant $CX : CX' = IX : IX'$. Maintenant, parceque $XY = IX \times xy$, & $X'Y' = IX' \times xy$, il est évident que $CX : XY = CX' : X'Y'$, & que la droite YY' passe par le nœud C. D'où nous tirons la construction suivante de la courbure de la corde, qui ne dépend plus de la fig. 4.

Aiant partagé la corde AB en C, de manière que IC soit la moyenne harmonique entre IA & IB, qu'on décrive sur AC une courbe quelconque AYC, & pour chaque point X qu'on prenne le point X', ensorte que les trois lignes IX, IC, IX' soient en proportion harmonique, alors la droite tirée de Y par le point C marquera sur l'appliquée $X'Y'$ le point Y' dans la courbe $CY'B$. Si l'on vouloit que la corde rendit trois fois plus de vibrations, il faudroit entre A & B établir deux nœuds C & D, de sorte que les distances IA, IC, ID, IB fissent une proportion harmonique, & aiant pris à volonté la figure d'une partie AYC on formeroit de la même manière la figure au delà du nœud C, & ensuite aussi au delà du nœud D. Cette même construction aura aussi lieu, lorsqu'on voudra établir un plus grand nombre de nœuds.

SCOLIE.

XXV. Voilà donc une espèce de cordes fort remarquable, puisqu'elle a cela de commun avec les cordes uniformément épaisses, que de quelque manière qu'on les ébran-

le, elles produisent toujours des vibrations régulières; or nous verrons bientôt que cette propriété ne sauroit avoir lieu dans aucune autre espèce. Le fondement de cette propriété est, qu'en quelque état que la corde soit mise au commencement, elle y doit nécessairement revenir après un certain tems; or dans les autres espèces de cordes ce rétablissement dans le premier état n'arrive peut-être jamais, & quand il arrive, ce n'est que sous de certaines circonstances, sans lesquelles le son ne sauroit être régulier ou formé par des vibrations isochrones. D'abord les espèces suivantes, que nous sommes en état de développer mettent cette différence dans tout son jour, & de là on pourra juger avec d'autant plus de raison, des autres espèces de cordes, qu'il ne nous est pas encore permis de soumettre au calcul.

PROBLEME 6.

XXVI. La grosseur de la corde étant exprimée par cette formule $qq\,ff\,(\frac{f}{x})^{\frac{4}{3}}$, où x est l'intervalle IX (fig. 1.) & qq la grosseur au point X: déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B, de sorte que $IA = a$ & $IB = b$, la tension étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde apartient au premier cas du Probl. 4, en prenant $\mu = 1$, d'où l'on a $\beta = \frac{3\,ff}{\sqrt{2Tg}}\,f^{-\frac{1}{3}}$, & $\int u\,dx = \beta x^{\frac{1}{3}}$ & ensuite $P = 1$, & $Q = -\beta x^{\frac{1}{3}}$; tous les mouvemens de cette corde seront donc exprimés par cette équation;

$$y = \Gamma : (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) + \Delta : (\beta x^{\frac{1}{2}} - t)$$

$$- \beta x^{\frac{1}{2}} \Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) - \beta x^{\frac{1}{2}} \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{2}} - t)$$

où y exprime l' intervalle XY, dont le point X est éloigné de l' axe après le tems $= t$ *secondes*, d'où la vitesse de ce point Y dans le sens YX sera

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) + \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{2}} - t)$$

$$+ \beta x^{\frac{1}{2}} \Gamma'' : (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) - \beta x^{\frac{1}{2}} \Delta'' : (\beta x^{\frac{1}{2}} - t).$$

Qu'on tire maintenant un nouvel axe ik (*fig.* 6.), sur lequel on prenne $ia = \beta a^{\frac{1}{2}}$, $ib = \beta b^{\frac{1}{2}}$ & $ix = \beta x^{\frac{1}{2}}$;

or posons $ix = \beta x^{\frac{1}{2}} = v$, & sur l' espace ab tirons les deux courbes $m\Gamma n$ & $\mu \Delta \nu$ pour représenter nos deux fonctions arbitraires, de manière qu'il soit $x\Gamma = \Gamma' : v$ & $x\Delta = \Delta' : v$, d' où nous aurons $\Gamma : v = amx\Gamma$, & $\Delta : v = a\mu x\Delta$, en remarquant que puisque nous représentons ici la fonction Δ sous l' axe, il faut changer le signe des fonctions Δ, Δ', Δ'' dans nos formules précédentes. Donc pour l' état initial de la corde où $t = 0$, nous aurons

$$y = amx\Gamma - a\mu x\Delta - v . x\Delta,$$

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -x\Gamma - x\Delta + \frac{v\, dx\Gamma}{dv} + \frac{v\, dx\Delta}{dv}.$$

Or puisque aux points A & B, l'une & l'autre de ces deux valeurs doit évanouir, nous aurons ces conditions à remplir; 1° $am = a\mu$; 2° $am + a\mu = ia \times \frac{d.am + d.a\mu}{dv}$; 3° $ambn - a\mu b\nu = ib\,(bn - b\nu)$; 4° $bn + b\nu = ib \times \frac{d.bn + d.b\nu}{dv}$, & pourvû que ces quatre propriétés aient lieu dans les deux courbes mn & $\mu\nu$, leur dé-

fcription eft arbitraire, & on les peut toujours tracer en forte qu'elles repréfentent un état initial quelconque donné de la corde.

Or maintenant il faut continuer la courbe $\nu\mu$ à gauche & la mn à droite; la première opération eft déterminée par cette condition, que le point A ou a demeure immobile, & l'autre par l'immobilité du point b.

Pour la continuation de la courbe $\nu\mu$ prenons $ax' = ax = t$, & foit $x'\delta'$ l'appliquée cherchée au point x'; donc puifque pour ce cas;

$$\Gamma : (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) = amx\Gamma \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{2}}\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) = ia . x\Gamma$$

$$\Delta : (\beta x^{\frac{1}{2}} - t) = - a\mu x\delta' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{2}}\Delta' : (\beta x^{\frac{1}{2}} - t) = ia . x\delta'$$

il faut qu'il foit

$$o = amx\Gamma + a\mu x'\delta' - ia . x\Gamma + ia . x'\delta'.$$

Pour la continuation de la courbe mn prenons $bx'' = bx = t$, & foit $x''\gamma''$ l'appliquée cherchée au point x'' on aura donc

$$\Gamma : (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) = amx''\gamma'' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{2}}\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) = ib . x''\gamma''$$

$$\Delta : (\beta x^{\frac{1}{2}} - t) = a\mu x\Delta \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{2}}\Delta' : (\beta x^{\frac{1}{2}} - t) = ib . x\Delta$$

& partant il faut qu'il foit

$$o = amx''\gamma'' - a\mu x\Delta - ib . x''\gamma'' + ib . x\Delta$$

Or $amx''\gamma'' = ambn + bnx''\gamma'' = a\mu b\nu + ib . bn - ib . b\nu + bnx''\gamma''$, d'où notre équation fe change en cette forme:

$$o = bnx''\gamma'' + b\nu x\Delta + ib\,(bn - x''\gamma'') - ib\,(\beta\nu - x\Delta).$$

Aiant continué ainfi nos deux courbes, pour trouver l'efpace $XY = y$ (*fig.* 1.) après un tems quelconque de t *fecondes*, qu'on prenne $xT = xu = t$, & on aura

$$y = amTU - a\mu tu - \beta x^{\frac{1}{2}}\,(TU - tu);$$

c' eſt donc de cette formule qu'il faut déterminer l'état de la corde à un tems quelconque t depuis ſon état initial.

COROLL. 1.

XXVII. Par cette conſtruction on voit qu'on ne ſauroit aſſigner aucun tems, auquel la corde revienne néceſſairement à ſon état initial, & partant les ébranlemens dont une telle corde eſt ſuſceptible, ne ſauroient être réduits à un mouvement régulier de vibrations iſochrones, comme dans le cas précédent.

COROLL. 2.

XXVIII. Auſſi la continuation des deux courbes mn & $\mu\nu$ demande une conſtruction tranſcendente. Car poſant $ax = \alpha x' = t$, $xE = p$ & $x'\delta = z$, la continuation de la courbe $\mu\nu$ doit être tirée de cette équation: $\int p\,dt + \int z\,dt - ia\,(p - z) = 0$, ou poſant $ia = \alpha$ de celle-ci $\alpha\,dz + z\,dt = \alpha\,dp - p\,dt$, qui donne

$$\alpha e^{\frac{t}{\alpha}} z = \int e^{\frac{t}{\alpha}} (\alpha\,dp - p\,dt) = \alpha e^{\frac{t}{\alpha}} p - 2\int e^{\frac{t}{\alpha}} p\,dt,$$

ou $z = p - \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}} \int e^{\frac{t}{\alpha}} p\,dt$.

COROLL. 3.

XXIX. De la même manière, pour la continuation de la courbe mn poſant $bx'' = bx = t$, $x\Delta = q$, $x''y'' = z$ & $ib = \beta$, on aura $2mx''y'' = ambn + \int z\,dt$, $a\mu x\Delta = a\mu b\nu - \int q\,dt$, donc $ambn - a\mu b\nu + \int z\,dt + \int q\,dt - \beta z + \beta q = 0$, où $\beta\,dz - z\,dt = \beta\,dq + q\,dt$, &

partant $\beta e^{-\frac{t}{\beta}} z = \int e^{-\frac{t}{\beta}} (\beta d q + q d t)$, ou $z = q + \frac{2}{\beta} e^{\frac{t}{\beta}} \int e^{-\frac{t}{\beta}} q d t$.

SCOLIE.

XXX. Or il n'eſt pas abſolument impoſſible qu'une telle corde produiſe des vibrations régulières ou iſochrones; cela dépend de l' état initial, auquel la corde a été réduite, qui peut bien être tel, que les vibrations deviennent régulières. Pour trouver de tels cas, ſoit pour abreger $\beta x^{\frac{1}{3}} = v$, & poſons

$$\Gamma : (v + t) = C \text{ ſin. } (n v + n t + \zeta), \ \&$$
$$\Delta : (v - t) = C \text{ ſin. } (n v + \zeta - n t),$$

d'où nous aurons

$$\Gamma' : (v + t) = n C \text{ coſ. } (n v + \zeta + n t) \ \&$$
$$\Delta' : (v - t) = n C \text{ coſ. } (n v + \zeta - n t),$$

& partant

$$y = 2 C \text{ ſin. } (n v + \zeta) \text{ coſ. } n t - 2 n C v \text{ coſ. } (n v + \zeta) \text{ coſ. } n t.$$

Maintenant, cette quantité devant évanouir, ſoit qu'on poſe $x = a$ ou $x = b$, ſoit pour abreger $\beta a^{\frac{1}{3}} = h$ & $\beta b^{\frac{1}{3}} = k$, & il faudra remplir ces deux conditions;

1° ſin. $(n h + \zeta) - n h$ coſ. $(n h + \zeta) = 0$, &
2° ſin. $(n k + \zeta) - n k$ coſ. $(n k + \zeta) = 0$;

d'où nous tirons

tang. $(n h + \zeta) = n h$ & tang. $(n k + \zeta) = n k$.

Il s'agit donc de déterminer de ces deux égalités le nombre n avec l' angle ζ. Or éliminant l' angle ζ, nous aurons

$$\text{tang. } n\,(k - h) = \frac{n\,(k - h)}{1 + nnhk},$$

où il faut remarquer que $h = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{1}{3}}$, & $k = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{3}}$. Tout revient donc à déduire de l'équation trouvée le nombre n, ce qui se peut toujours exécuter d'une infinité de manières, attendu que cette équation renferme une infinité de racines, dont aiant trouvé une quelconque pour n, on voit qu'après le tems $t = \frac{2\pi}{n}$, la corde revient au même état, & le tems d'une vibration est par conséquent $= \frac{\pi}{n}$, de sorte que le nombre des vibrations rendues par seconde sera $= \frac{n}{\pi}$. Or pour trouver un tel nombre n on ne sauroit opérer qu'en tatonnant, en prenant successivement plusieurs valeurs pour en conclure enfin la véritable. Pour cet effet aiant pris pour n un nombre quelconque, qu'on cherche les angles φ & ψ, de sorte que $nh = \text{tang. } \varphi$, & $nk = \text{tang. } \psi$, & alors il faut qu'il provienne $n\,(k - h) = \psi - \varphi + i\pi$, où l'on peut prendre pour i ou zero ou un nombre entier quelconque, & quand cela arrivera on aura l'angle $\zeta = \varphi - nh$ ou $\zeta = \psi + i\pi - nk$.

SCOLIE 2.

XXXI. Cette question devient plus aisée à résoudre, si l'on regarde les points A & B où l'on doit fixer la corde, comme inconnus, & le nombre n comme connu, car alors, posant $nh = p$, & $nk = q$, pour avoir tang. $(p + \zeta) = p$ & tang. $(q + \zeta) = q$, ou tang. $(q - p) = \frac{q - p}{1 + pq}$, soit $q - p$

$-p = r$ & $1 + pq = s$, & on aura $s = \frac{r}{\text{tang. } r}$. Qu'on prenne pour r un angle quelconque, & qu'on en cherche la valeur de s, de là on trouvera $q + p = \sqrt{(rr + 4s - 4)}$, & ensuite on aura $h = \frac{\sqrt{(rr + 4s - 4)} - r}{2n}$ & $k = \frac{\sqrt{(rr + 4s - 4)} + r}{2n}$, d'où l'on voit que s doit être plus grand que 1, & partant l'angle r plus grand que 180°, afin qu'on obtienne $r >$ tang. r. Maintenant pour connoître tous les mouvemens réguliers dont la même corde est susceptible, on n'a qu'à prendre l'angle r en sorte, qu'il en résulte le même raport entre h & k; soit pour cet effet $k = mh$, & on aura $(m + 1) r = (m - 1) \sqrt{(rr + 4s - 4)}$ ou $mrr = (m - 1)^2 (s - 1)$, donc $s = 1 + \frac{mrr}{(m-1)^2} = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire $h = \frac{r}{n(m-1)}$, & $k = \frac{mr}{r(m-1)}$, & pour chaque nombre m on peut trouver une infinité de valeurs pour l'angle r.

Exemple.

XXXII. Prenons $m = 2$, de sorte que $k = 2h$ & $b = 8a$, & l'équation à résoudre sera $1 + rr = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire $h = \frac{r}{n}$ & $k = \frac{2r}{n}$. Or il faut remarquer que pour réduire un angle exprimé en secondes à des parties du rayon, il faut ajouter 4, 6855749 au logarithme du nombre des *secondes*, mais puisque nous savons que $r > \pi$, & que posant $r = \pi + \phi$, l'angle ϕ doit être plus grand que 10°, nous aurons à très-peu près tang. $r =$ tang. $\phi = \phi$

$+ \frac{1}{3}\varphi^3$, donc $\varphi(1 + 2rr) = \frac{r}{1 + \frac{1}{3}\varphi^2} = r$ $(1 - \frac{1}{3}\varphi\varphi)$ ou bien

$$6\pi\pi\varphi + 13\pi\varphi\varphi + 7\varphi^3 = 3\pi,$$

d'où l'on tire à peu près $\varphi = \frac{7 + 18\pi\pi + 12\pi^4}{\pi(21 + 52\pi\pi + 24\pi^4)}$, ou $\varphi = \frac{1}{2\pi} - \frac{13}{24\pi^3} + \frac{37}{36\pi^5}$ &c. Pour les autres valeurs on n'a qu'à poser successivement 2π, 3π, 4π &c. au lieu de π. Or pour ces derniers cas on a assès exactement $\varphi = \frac{1}{2i\pi}$, donc $r = i\pi + \frac{1}{2i\pi}$, & de là le nombre $n = \frac{r}{b}$ & le nombre des vibrations rendues par seconde $= \frac{i}{b} + \frac{1}{2i\pi\pi k}$.

Faisons donc le calcul pour trouver les valeurs du nombre r.

	si $i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$\frac{1}{2i\pi} =$	0, 159153	0, 079576	0, 053051	0, 039788
$\frac{13}{24 i^3\pi^3} =$	0, 017469	0, 002185	0, 000647	0, 000273
$\frac{37}{36 i^5\pi^5} =$	0, 003359	0, 000105	0, 000014	0, 000003
$\varphi =$	0, 145043	0, 077496	0, 052418	0, 039518
$\pi =$	3, 141593	6, 283185	9, 424778	12, 566371
$r =$	3, 286636	6, 360681	9, 477196	12, 605889
$\zeta =$	65° 4′	76° 38′	80° 59′	83° 12′

d'où l'on voit que cette même corde peut rendre plusieurs sons réguliers qui sont entr'eux, comme ces valeurs

de r, dont les plus bas s'écartent sensiblement de la suite des nombres naturels; mais les aigus s'y conforment de plus en plus. Aiant ainsi trouvé r, puisque $nh = p = r$, on aura aussi l'angle $\zeta =$ A: tang. $r - r =$ A: tang. $2r - 2r$ dont j'ai aussi marqué les valeurs ci-dessus.

CONCLUSION.

XXX. De la même manière on déterminera les ébranlemens des autres espèces de cordes, que nous sommes en état de soumettre au calcul, & en général on verra, que tous ces ébranlemens ne sont pas réductibles à des vibrations régulières. Mais on peut toujours assigner des conditions, sous lesquelles ces cordes peuvent recevoir un mouvement régulier, & cela même d'une infinité de manières différentes. Or il est bon de remarquer ici, que tous les sons, dont une même corde de ces espèces est susceptible, sont incommensurables entr'eux; pendant, que ceux des deux premières espèces suivent entr'eux la progression des nombres naturels. C'est donc à cause de cette incommensurabilité que les sons des autres espèces sont si irréguliers & contraires à l'harmonie, puisqu'on les peut regarder comme un mélange de plusieurs sons simples, que la même corde pourroit rendre sous de certaines conditions.

RECHERCHES

Sur l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx}z$$

PAR M. EULER.

I. CETTE équation est d'un genre tout-à-fait différent de celui, auquel le calcul intégral a été appliqué jusqu'ici, puisqu'elle renferme trois variables t, x, & z, & qu'il s'agit de déterminer la quantité z par les deux autres t & x, c'est-à-dire qu'on demande quelle fonction de t & x doit être prise pour z, afin que la condition prescrite soit remplie. Mais on cherche principalément une solution complète qui nous découvre à la fois toutes les fonctions possibles, qui étant substituées à la place de z, satisfassent à l'équation proposée ; comme cette équation contient des différentiels du second dégré, son intégrale complète doit nécessairement renfermer deux fonctions absolument indéfinies & arbitraires, comme je l'ai prouvé autresfois.

II. Ce n'est pas une pure spéculation, qui a fourni cette équation, mais elle renferme la solution de plusieurs questions physico-mathématiques de la dernière importance. Le cas, où les quantités b & c sont zero, n'est que trop connu par les recherches sur les vibrations des cordes, dont le mouvement en général est toujours déterminé par cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, pourvu que la corde ait par tout la même grosseur, & que les excursions soient quasi infiniment petites. Ensuite la question sur la propaga-

tion du ſon m' aiant conduit à cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{4a^2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$ il eſt aſsès clair, que l' équation propoſée étant plus générale eſt de la dernière importance.

III. Comme cette équation apartient à un genre de calcul tout particulier, dont les premiers élémens ne ſont pas encore aſsès bien développés, je me propoſe d'établir ici quelques méthodes, qui peuvent être d'un grand uſage dans ce nouveau calcul. Car quoique j'aie donné les intégrales complétes des deux cas mentionnés, c' eſt plutôt par une heureuſe induction, que j' y ai été conduit, que par une méthode certaine, & lorſque M[rs] Bernoulli & D'Alembert ont traité le probleme des cordes vibrantes, ils ſe ſont contentés des ſolution particulières, ſans ſe ſoucier trop de toute l' étendue, que la queſtion renferme par ſa nature. Or avant que d' entreprendre l'intégration de l'équation générale miſe dans le titre, il ſera bon de traiter plus en détail l' équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, & d' expoſer quelques méthodes, qui nous conduiſent à ſon intégrale compléte.

De l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$.

IV. Si l' on vouloit ſe contenter de ſolutions particulières, il feroit fort facile d' en trouver une multitude infinie, toutes les valeurs ſuivantes ſatisfont également à cette équation;

$z = A(x \pm at)^n$, $z = Ae^{n(x \pm at)}$, $z\ A\ \text{ſin.}\ n(x \pm at)$,

& l' on peut encore joindre enſemble autant qu'on voudra de telles valeurs, de ſorte que par ce moyen on pourroit donner une ſolution qui renfermât une infinité de quantité

de quantités constantes, & absolument arbitraires. Cependant une telle solution ne feroit pas encore compléte, & ne comprendroit point toutes les solutions possibles. Mais quand j'ai trouvé $z = \Gamma:(x + at) + \Delta:(x - at)$, où $\Gamma:(x + at)$ marque une fonction quelconque de $x + at$, & $\Delta:(x - at)$ de $x - at$, on voit bien que cette forme est infiniment plus générale, aussi est-elle l'intégrale compléte de notre équation.

V. Il est aisé de s'assurer, que cette formule convient à l'équation proposée; car en marquant le différentiel de $\Gamma:u$ par $du\,\Gamma':u$, & celui de $\Gamma':u$ par $du\,\Gamma'':u$, on en tire

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma':(x + at) + \Delta':(x - at) \;\&$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\Gamma':(x + at) - a\Delta':(x - at)$$

& par la différentiation réitérée

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \Gamma'':(x + at) + \Delta'':(x - at) \;\&$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a^2\Gamma'':(x + at) + a^2\Delta'':(x - at)$$

d'où l'on a évidemment $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Mais il s'agit ici d'une méthode, qui partant de l'équation différentio-différentielle nous conduise immédiatement à la formule $z = \Gamma:(x + at) + \Delta:(x - at)$, & par laquelle nous puissions être assurés, que cette formule est en effet l'intégrale compléte de l'équation différentio-différentielle. Je m'en vais proposer deux méthodes qui conduisent à ce but.

VI. *Première méthode.* Je transforme l'équation par cette substitution $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, d'ou je tire:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + a\left(\frac{ddz}{dt\,dx}\right) \;\&\; \left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt\,dx}\right) +$$

$a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, & partant $\left(\frac{du}{dt}\right) - a\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = 0$. Nous voilà donc parvenus à une équation différentielle du premier dégré $\left(\frac{du}{dt}\right) = a\left(\frac{du}{dx}\right)$, dont il s'agit de trouver la fonction u. Or, puisque $du = dt\left(\frac{du}{dt}\right) + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, nous aurons $du = \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot(adt + dx)$; laquelle formule devant être intégrable, il faut que $\left(\frac{du}{dx}\right)$ soit une fonction de la quantité $x + at$. Posons donc $\left(\frac{du}{dx}\right) = \Gamma'' : (x + at)$, & l'équation $du = (dx + adt)$, $\Gamma'' : (x + at)$ donne $u = \Gamma' : (x + at)$. Maintenant nous avons à résoudre cette équation $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + at)$ dont je cherche l'intégrale de la manière suivante.

VII. Posant $dz = pdx + qdt$, pour avoir $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ & $q = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, à cause de $q = -ap + \Gamma' : (x + at)$, nous aurons :

$$dz = p(dx - adt) + dt\,\Gamma' : (x + at)$$

Posons $p = r + \alpha\Gamma' : (x + at)$, pour avoir :

$$dz = r(dx - adt) + [\alpha dx + (1 - \alpha a)dt]\,\Gamma' : (x + at)$$

& soit $\frac{1 - \alpha a}{\alpha} = a$ ou $\alpha = \frac{1}{2a}$, donc

$$dz = r(dx - adt) + \frac{1}{2a}(dx + adt)\,\Gamma' : (x + at),$$

&, puisque le dernier nombre est intégrable, l'intégrale étant $\frac{1}{2a}\Gamma : (x + at)$ ou bien simplement $\Gamma : (x + at)$

pour rendre le premier membre également intégrable, il faut qu'il soit $r = \Delta' : (x - at)$, d'où nous tirons

$$z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$$

& il est évident en même tems, que cette forme est l'intégrale compléte de l'équation proposée.

VIII. *Autre méthode*. Changeons les variables t & x, dont z doit être une fonction, & posons $x + at = p$, & $x - at = q$, de sorte qu'il faille à présent trouver, quelle fonction de p & q doit être z. Il s'agit donc d'éliminer t & x, & de trouver une équation differentielle entre p, q, & z, ce qui se fera de la manière suivante. Puisque $dz = dt\left(\frac{dz}{dt}\right) + dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$ & $dz = dp\left(\frac{dz}{dp}\right) + dq\left(\frac{dz}{dq}\right)$, à cause de $dp = dx + adt$, & $dq = dx - adt$, nous aurons

$$dt\left(\frac{dz}{dt}\right) + dx\left(\frac{dz}{dx}\right) =$$

$$(dx + adt)\left(\frac{dz}{dp}\right) + (dx - adt)\left(\frac{dz}{dq}\right).$$

Maintenant parceque t & x ne dépendent point l'une de l'autre, les membres affectés de dx & dt doivent être égales séparément, ce qui donne

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dp}\right) + \left(\frac{dz}{dq}\right) \text{ \& } \left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dp}\right) - a\left(\frac{dz}{dq}\right)$$

& de là nous tirons

$$\left(\frac{ddz}{dpdx}\right) = \left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dpdq}\right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dpdt}\right) = a\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) - a\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dqdx}\right) = \left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \left(\frac{ddz}{dq^2}\right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dqdt}\right) = a\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) - a\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)$$

IX. Pour achever la substitution, aiant

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dpdx}\right) + \left(\frac{ddz}{dqdx}\right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a\left(\frac{ddz}{dpdt}\right) - a\left(\frac{ddz}{dqdt}\right)$$

on n'a qu'à substituer ici les valeurs, que nous venons de trouver, & nous obtiendrons

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \left(\frac{ddz}{dq^2}\right) \ \&$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) - 2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + aa\left(\frac{ddz}{dq^2}\right).$$

Donc notre équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ ſe change en celle-ci :

$2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = -2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)$, ou bien $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$ qui eſt beaucoup plus ſimple que la propoſée, ne contenant qu'un ſeul membre, qu'il faut égaler à zero, d'où l'on comprend de quelle importance peuvent ſouvent être de telles transformations, dans ce nouveau genre du calcul intégral.

X. Tout ſe rêduit donc à trouver, quelle fonction des deux variables p & q doit être la quantité z, afin que l'on ait $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$. Or cette équation eſt fort aiſée à réſoudre; qu'on poſe, pour mettre l'opération dans tout ſon jour, $\left(\frac{dz}{dq}\right) = u$, & puiſque $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = \left(\frac{du}{dp}\right)$, il faut qu'il ſoit $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, d'où il eſt clair que la quantité u ne ſauroit renfermer la variable p, & partant elle ſera fonction de la ſeule variable q, & une fonction quelconque de q miſe pour u ſatisfera à la condition $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$. Poſons donc $u = \Delta : q$, ce qui eſt l'intégrale complète de l'équation $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, & maintenant nous aurons $\left(\frac{dz}{dq}\right) = \Delta' : q$. Conſidérons ici l'autre quantité p conſtante, pour avoir $dz = dq\,\Delta' : q$, & partant ſon intégrale $z = \Delta : q +$ conſt.; mais cette conſtante renferme

une fonction quelconque de p, au lieu de laquelle écrivant $\Gamma : p$ nous trouvons comme ci-dessus $z = \Gamma : p + \Delta : q$ ou bien $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$.

XI. Pour mettre devant les yeux toute l'étendue de cette solution, on peut dècrire à volonté deux courbes quelconques *EMS* & *FNT* (*fig.* * *plan.* 1.) raportées à leur axes & *BD*, & alors pour avoir la valeur de z, qui répond à des valeurs quelconques des deux variables x & t, qu'on prenne dans la première courbe l'abscisse $AP = x + at$, & dans l'autre l'abscisse $BQ = x - at$, & la somme des deux appliquées $PM + QN$ ou bien aussi leur différence représentera en général la nature de la fonction cherchée z qui convient à l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Cette construction est si générale, que des traits tirés librement sur le papier sans aucune loi peuvent être employés pour les deux lignes *EMS* & *FNT*.

XII. C'est aussi en quoi consiste le caractère essentiel de ce genre de calcul intégral, & qui le distingue des intégrations ordinaires, où aucune ligne courbe destituée de la loi de continuité, ne sauroit jamais avoir lieu. Mais ici les lignes *EMS* & *FNT* peuvent être tirées d'une manière quelconque, sans qu'elles soient comprises dans quelque équation que ce soit; on les peut terminer brusquement où l'on veut, & les composer d'arcs de courbes tout-à-fait différentes. De quelque manière qu'on ait commencé à tirer ces lignes, on est toujours le maître de les continuer de part & d'autre comme on veut, sans qu'on soit astreint à aucune loi; toutes ces irrégularités n'empêchent pas que la construction donnée ne satisfasse aussi bien à l'équation proposée, que si ces deux lignes courbes étoient tout-à-fait régulières.

De l'équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{\beta}{xx}z$.

XIII. D'abord je remarque qu'on peut transformer cette équation en d'autres semblables, en supposant $z = x^{\lambda}u$, d'où l'on a

$\left(\frac{dz}{dt}\right) = x^{\lambda}\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda-1}u + x^{\lambda}\left(\frac{du}{dx}\right)$, & de là

$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = x^{\lambda}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2}u + 2\lambda x^{\lambda-1}\left(\frac{du}{dx}\right) + x^{\lambda}\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$, & partant cette substitution, en divisant par x^{λ}, nous fournit l'équation :

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{\alpha + 2\lambda}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\beta + \alpha\lambda + \lambda(\lambda-1)}{xx}u.$$

Donc si nous prenons $\lambda = -\frac{1}{2}\alpha$, de sorte que $z = x^{-\frac{1}{2}\alpha}u$, l'équation proposée se transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{4\beta - \alpha\alpha + 2\alpha}{4xx}\cdot u$$

qui aiant un terme de moins, doit être regardée comme plus simple.

XIV. Par la même substitution on peut faire évanouir le dernier terme, en posant $\beta + \alpha\lambda + \lambda\lambda - \lambda = 0$, ce qui donne

$\lambda = \frac{1-\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha)^2}{4} - \beta\right)}$ & $\alpha + 2\lambda = 1 \pm \sqrt{[(1-\alpha)^2 - 4\beta]}$

donc la substitution $z = x^{\lambda}u$ nous conduit à cette équation :

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{1 \pm \sqrt{((1-\alpha)^2 - 4\beta)}}{x}\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Donc sans restraindre la forme proposée nous pouvons d'abord supposer $\beta = 0$, de sorte que nous aions à résoudre cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où il est remarquable que posant $z = x^{1-\alpha} u$, elle se transforme dans celle-ci, qui lui est semblable.

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{2-\alpha}{x}\left(\frac{du}{dx}\right),$$

& partant si la résolution de l'équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

réussit dans le cas de $\alpha = n$, elle réussira aussi dans le cas de $\alpha = 2 - n$.

XV. Mais puisque la destruction du dernier terme pourroit conduire à des valeurs imaginaires, qu'il faudroit donner à l'exposant λ, il vaudra mieux chasser l'avant dernier terme, ce qui se peut toujours faire sans tomber dans cet inconvénient, & partant nos recherches rouleront sur la résolution de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx} z,$$

sur laquelle je remarque, qu'on la peut réduire à une forme où le dernier terme manque d'une double manière, en posant $z = x^{\frac{1 \pm \sqrt{(1-4\beta)}}{2}} u$, d'où l'on parvient à cette forme;

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{1 + \sqrt{(1-4\beta)}}{x}\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Or si β est un nombre positif plus grand que $\frac{1}{4}$ cette forme devient imaginaire.

XVI. Or par raport à cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx} z:$$

je dois avertir d'avance, que je ne la saurois résoudre en général, quelque nombre qu'on prenne pour β, il n'y a

que certaines valeurs de cette lettre, où l' intégration réussisse, en quoi la résolution est semblable à la fameuse équation de Riccati, qui n' est résoluble qu'en certains cas. Mais aussi dans ces cas je dois avoüer, que je ne pas suis assès content de la méthode, qui m'a conduit à l'intégration de ces cas, puisqu'elle m' a été fournie par la considération d'une solution particulière, comme on peut le voir dans mes Recherches sur la propagation du son. Cependant j'expliquerai cette méthode, toute imparfaite qu'elle puisse paroître encore, peut être qu'elle donnera à d'autres occasion de mieux approfondir les mystères, que ce nouveau genre de calcul intégral renferme.

XVII. Après plusieurs essais j'ai trouvé que l' intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx}z$ peut être représentée par une telle suite indéfinie:

$$z = Ax^n\Gamma:(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma':(x \pm at) + Cx^{n+2}\Gamma'':(x \pm at) + Dx^{n+3}\Gamma''':(x \pm at) + \&c.$$

d' où nous tirons d' abord

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = Ax^n\Gamma'':(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma''':(x \pm at) + Cx^{n+2}\Gamma^{\text{IV}}:(x \pm at) + Dx^{n+3}\Gamma^{\text{V}}:(x \pm at) + \&c.$$

pour la première partie de l' équation; or pour l' autre nous trouvons

$$\begin{array}{llll}
\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = & n(n-1)Ax^{n-2}\Gamma:(x \pm at) & +2nAx^{n-1}\Gamma':(x \pm at) & +Ax^n\Gamma'':(x \pm at) \\
 & & +(n+1)nB & +2(n+1)B \\
 & & & +(n+2)(n+1)C \\
\frac{\beta}{xx}z = & \beta A & +\beta B & +\beta C
\end{array}$$

qui devant être égalée à celle-là, nous en tirons les déterminations suivantes

$n(n-1) + \beta = 0$, ou $\beta = -n(n-1)$

$2nA + 2nB = 0$, ou $B = -A$

$2(n+1)B+2(2n+1)C=0$, ou $(n+1)B+2(n+\frac{1}{2})C=0$
$2(n+2)C+2(3n+3)D=0$, ou $(n+2)C+3(n+\frac{2}{2})D=0$
$2(n+3)D+2(4n+6)E=0$, ou $(n+3)D+4(n+\frac{3}{2})E=0$
$2(n+4)E+2(5n+10)F=0$, ou $(n+4)E+5(n+\frac{4}{2})F=0$.

XVIII. Voici donc les déterminations de tous nos coéficiens, en suppofant $\beta = -n(n-1)$.

$B = -A$

$$C = -\frac{(n+1)B}{2(n+\frac{1}{2})} = +\frac{(n+1)}{2(n+\frac{1}{2})}A$$

$$D = -\frac{(n+2)C}{3(n+1)} = -\frac{(n+2)}{2.3(n+\frac{1}{2})}A$$

$$E = -\frac{(n+3)D}{4(n+\frac{3}{2})} = +\frac{(n+2)(n+3)}{2.3.4(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}A$$

$$F = -\frac{(n+4)E}{5(n+2)} = -\frac{(n+3)(n+4)}{2.3.4.5(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}A$$

$$G = -\frac{(n+5)F}{6(n+\frac{5}{2})} = +\frac{(n+3)(n+4)(n+5)}{2.3.4.5.6(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}A$$

$$H = -\frac{(n+6)G}{7(n+3)} = -\frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{2.3.4.5.6.7(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}A$$

&c. &c.

XIX. De là nous voions que toutes les fois que n eft un nombre entier négatif, la férie fuppofée devient finie, & partant c' eft dans ces cas, que nous pouvons affigner l' intégrale de notre équation. Pofons donc $n = -i$, marquant par i un nombre entier quelconque, & l'équation, dont nous fommes en état de trouver l'intégrale fera

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}z$$

de laquelle il eſt bon de remarquer, que poſant $z = x^{i+1} u$, elle ſe change dans cette forme:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{2(i+1)}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Or poſant $z = x^{-i} u$ elle ſe transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2i}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

d' où nous voions que cette forme

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

eſt intégrable toutes les fois, que α eſt un nombre pair, ſoit poſitif, ſoit négatif.

I^r CAS $n = -1$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2}{xx}z.$$

XX. Puiſque $n = -1$, nous aurons $B = -A$, & les coéficiens ſuivans s'évanouïront tous, donc l'intégrale de cette équation ſera, en prenant $A = 1$, & partant $B = -1$,

$$z = \frac{1}{x}\,\Gamma:(x \pm at) - \Gamma':(x \pm at)$$

& tenant compte du ſigne ambigu de la quantité a, l'intégrale complète ſera exprimée ainſi

$$z = \frac{1}{x}\,\Gamma:(x - at) - \Gamma':(x - at)$$

$$+ \frac{1}{x}\,\Delta:(x + at) - \Delta':(x + at)$$

& de la même manière on pourra aiſément trouver les intégrales complétes pour tous les autres cas intégrables. Aiant trouvé les coéficiens de la forme ſuppoſée, on n'a

qu'à résoudre chaque terme en deux, en emploiant pour l'un la forme $x + at$, & pour l'autre la forme $x - at$.

2^d CAS $n = -2$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{6}{xx}z.$$

XXI. Aiant toujours $B = -A$ à cause de $n = -2$, nous aurons $C = \frac{1}{3}A$; prenant $A = 3$, & partant $B = -3$, & $C = 1$, l'intégrale compléte de notre équation sera

$$z = \frac{3}{x^2}\Gamma:(x + at) - \frac{3}{x}\Gamma':(x + at) + \Gamma'':(x + at)$$
$$+ \frac{3}{x^2}\Delta:(x - at) - \frac{3}{x}\Delta':(x - at) + \Delta'':(x - at)$$

où Γ & Δ signifient des fonctions quelconques, exprimées par des appliquées de lignes courbes quelconques, tant régulières qu'irrégulières, & puisque ces deux fonctions sont absolument indépendantes l'une de l'autre, c'est en quoi consiste le caractère de la solution compléte.

3^e CAS $n = -3$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{12}{xx}z.$$

XXII. Ici le quatrième coéficient D entre aussi dans l'intégral avec les trois précédens, dont voici les valeurs $B = -A$, $C = -\frac{2}{5}B = \frac{2}{5}A$, $D = -\frac{1}{6}C = -\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 6}A$.

Posons

Posons donc pour éviter les fractions
$A = 3 \cdot 5$, $B = - 3 \cdot 5$, $C = 2 \cdot 3$, $D = - 1$
& l'intégrale compléte sera

$$z = \frac{3 \cdot 5}{x^3} \Gamma : (x + at) - \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Gamma' : (x + at)$$
$$+ \frac{2 \cdot 3}{x} \Gamma'' : (x + at) - \Gamma''' : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 5}{x^3} \Delta : (x - at) - \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Delta' : (x - at)$$
$$+ \frac{2 \cdot 3}{x} \Delta'' : (x - at) - \Delta''' : (x - at).$$

4e CAS $n = - 4$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{20}{xx} z$$

XXIII. Ici les coéficiens sont déterminés ainsi ;

$$B = - A ; C = - \frac{3}{7} B = \frac{3}{7} : A ;$$
$$D = - \frac{2}{9} C = - \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 9} A ; E = - \frac{1}{10} D, = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{7 \cdot 9 \cdot 10} A$$

de sorte qu'en entiers nous aurons
$A = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $B = - 3 \cdot 5 \cdot 7$, $C = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $D = - 2 \cdot 5$, $E = 1$
& l'intégrale compléte sera

$$z = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^4} \Gamma : (x + at) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^3} \Gamma' : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2} \Gamma'' : (x + at) - \frac{2 \cdot 5}{x} \Gamma''' : (x + at) + \Gamma^{IV} : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^4} \Delta : (x - at) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^3} \Delta' : (x - at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2} \Delta'' : (x - at) - \frac{2 \cdot 5}{x} \Delta''' : (x - at) + \Delta^{IV} : (x - at)$$

5[e] CAS $n = -5$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{30}{xx}z.$$

XXIV. Les coéficiens font déterminés de la manière fuivante

$$B = -A,\ C = -\frac{4}{9}B,\ D = -\frac{3}{12}C,$$

$$E = -\frac{2}{14}D,\ F = -\frac{1}{15}E.$$

& prenant $A = 3.5.7.9$, nous aurons

$$A = 3.5.7.9,\ B = -3.5.7.9,\ C = 4.3.5.7,$$

$$D = -3.5.7,\ E = 3.5,\ F = -1$$

& après avoir trouvé ces coéficiens, on n'a qu'à obferver que l'intégrale compléte fera

$$z = \frac{A}{x^5}\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x^4}\Gamma':(x+at)$$

$$+ \frac{C}{x^3}\Gamma'':(x+at) + \frac{D}{x^2}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$

$$+ \frac{A}{x^5}\Delta:(x-at) + \frac{B}{x^4}\Delta':(x-at)$$

$$+ \frac{C}{x^3}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^2}\Delta''':(x-at) + \&c.$$

6[e] CAS $n = -6$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{42}{xx}z.$$

XXV. Pour les valeurs des coéficiens on aura

$$B = -A,\ C = -\frac{5}{11}B,\ D = -\frac{4}{15}C,$$

$$E = -\frac{3}{18}D,\ F = -\frac{2}{20}E,\ G = -\frac{1}{21}F$$

& prenant $A = 3.5.7.9.11$ les autres feront

$$B = -3.6.7.9.11,\quad C = +5.3.5.7.9,\quad D = -4.5.7.9,$$
$$E = +2.3.5.7,\quad F = -3.7,\quad G - 1$$

d' où l' intégrale compléte devient

$$z = \frac{A}{x^6}\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x^5}\Gamma':(x+at)$$
$$+ \frac{C}{x^4}\Gamma'':(x-at) + \frac{D}{x^3}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^6}\Delta:(x+at) + \frac{B}{x^5}\Delta':(x-at)$$
$$+ \frac{C}{x^4}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^3}\Delta''':(x-at) + \&c.$$

XXVI. En général pour cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}z$$

l' intégrale compléte fera

$$z = \frac{A}{x^i}\Gamma:(x-at) + \frac{B}{x^{i-1}}\Gamma':(x+at)$$
$$+ \frac{C}{x^{i-2}}\Gamma'':(x+at) + \frac{D}{x^{i-3}}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^i}\Delta:(x-at) + \frac{B}{x^{i-1}}\Delta':(x-at)$$
$$+ \frac{C}{x^{i-2}}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^{i-3}}\Delta''':(x-at) + \&c.$$

où les coéficiens doivent être déterminés de la manière fuivante

$$B = -A$$
$$C = -\frac{(i-1)B}{2i-1} = +\frac{(i-1)A}{2i-1}$$
$$D = -\frac{(i-2)C}{3i-3} = -\frac{(2i-4)A}{2.3(2i-1)}$$
$$E = -\frac{(i-3)D}{4i-6} = +\frac{(2i-4)(2i-6)A}{2.3.4(2i-1)(2i-3)}$$

$$F = -\frac{(i-4)\,E}{5i-10} = -\frac{(2i-6)(2i-8)\,A}{2.3.4.5(2i-1)(2i-3)}$$

$$G = -\frac{(i-5)\,F}{6i-15} = +\frac{(2i-6)(2i-8)(2i-10)\,A}{2.3.4.5.6\,(2i-1)(2i-3)(2i-5)}$$

&c. &c.

XXVII. Pour comprendre mieux la loi de ces coéficiens j'obſerve, qu'on trouve les mêmes coéficiens, en intégrant cette équation différentio-différentielle :

$$\frac{xxddy}{dx^2} + \frac{2xxdy}{dx} - i(i+1)\,y = 0$$

ſi l'on ſuppoſe l'intégrale exprimée par cette ſérie

$$y = \frac{A}{x^i} + \frac{B}{x^{i-1}} + \frac{C}{x^{i-2}} + \frac{D}{x^{i-3}} + \&c.$$

Or ſi i eſt un nombre entier, cette même équation nous fournit les coéficiens en ordre retrograde, car ſi nous ſuppoſons

$$y = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \frac{F}{x^5} + \&c.$$

nous trouvons

$$B = -\frac{i(i+1)}{2}\,A$$

$$C = -\frac{(i-1)(i+2)}{4}\,B = +\frac{i(ii-1)(i+2)}{2\,.\,4}\,A$$

$$D = -\frac{(i-2)(i+3)}{6}\,C = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(i+3)}{2\,.\,4\,.\,6}\,A$$

$$E = -\frac{(i-3)(i+4)}{8}\,D = +\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(i+4)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,A$$

$$F = -\frac{(i-4)(i+5)}{10}\,E = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(ii-16)(i+5)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}\,A$$

&c. &c.

XXVIII. Donc ſi nous marquons les fonctions en aſcendant par intégration, de cette maniére :

${}'\Gamma : s = \int ds\,\Gamma : s$, ${}''\Gamma : s = \int ds\,{}'\Gamma : s$, ${}'''\Gamma : s = \int ds\,{}''\Gamma : s$ &c.

l'intégrale de notre équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx} \cdot z$ sera:

$$z = A\,\Gamma : (x + at) + \frac{B}{x}\,{}'\Gamma : (x + at)$$
$$+ \frac{C}{xx}\,{}''\Gamma : (x + at) + \frac{D}{x^3}\,{}'''\Gamma : (x + at) + \&c.$$
$$+ A\,\Delta : (x - at) + \frac{B}{x}\,{}'\Delta : (x - at)$$
$$+ \frac{C}{xx}\,{}''\Delta : (x - at) + \frac{D}{x^3}\,{}'''\Delta : (x + at) + \&c.$$

& pour les diverses valeurs de i ces coéficiens seront

i	A	− B	+ C	− D	+ E	− F
1	1	$\frac{1.2}{2}$				
2	1	$\frac{2.3}{2}$	$\frac{2.3.4}{2.4}$			
3	1	$\frac{3.4}{2}$	$\frac{3.8.5}{2.4}$	$\frac{3.8.5.6}{2.4.6}$		
4	1	$\frac{4.5}{2}$	$\frac{4.15.6}{2.4}$	$\frac{4.15.12.7}{2.4.6}$	$\frac{4.15.12.7.8}{2.4.6.8}$	
5	1	$\frac{5.6}{2}$	$\frac{5.24.7}{2.4}$	$\frac{5.24.21.8}{2.4.6}$	$\frac{5.24.21.16.9}{2.4.6.8}$	$\frac{5.24.21.16.9.10}{2.4.6.8.10}$
6	1	$\frac{6.7}{2}$	$\frac{6.35.8}{2.4}$	$\frac{6.35.32.9}{2.4.6}$	$\frac{6.35.32.27.10}{2.4.6.8}$	$\frac{6.35.32.27.20.11}{2.4.6.8.10}$
7	1	$\frac{7.8}{2}$	$\frac{7.48.9}{2.4}$	$\frac{7.48.45.10}{2.4.6}$	$\frac{7.48.45.40.11}{2.4.6.8}$	$\frac{7.48.45.40.33.12}{2.4.6.8.10}$
		&c.		&c.		

XXIX. J'observe encore, que l'intégrale de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx} z$$

se peut exprimer d'une double manière, l'une finie, & l'autre infinie, puisque on peut mettre tant $i = n$ que $i = -n - 1$. Pour rendre l'une & l'autre plus évidente, posons $x + at = p$, & $x - at = q$; & que P marque une fonction quelconque de p, & Q de q; cela posé la première forme sera

$$z = \frac{A}{x^n}(P + Q) + \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) + \&c.$$

les coéficiens étant déterminés ainsi:

$$B = -A, C = -\frac{2(n-1)}{2(2n-1)}B, D = -\frac{2(n-2)}{3(2n-2)}C,$$
$$E = -\frac{2(n-3)}{4(2n-3)}D, F = -\frac{2(n-4)}{5(2n-4)}E \ \&c.$$

Or l'autre forme est

$$z = Ax^{n+1}(P + Q) + Bx^{n+2}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + Cx^{n+3}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) + \&c.$$

où les coéficiens ont les valeurs suivantes:

$$B = -A, C = -\frac{2(n+2)}{2(2n+3)}B, D = -\frac{2(n+3)}{3(2n+5)}C,$$
$$E = -\frac{2(n+4)}{4(2n+5)}D, F = -\frac{2(n+6)}{5(2n+6)}E \ \&c.$$

Il est bien remarquable que ces deux expressions sont équivalentes, & que dans les cas $n = 0$, & $n = -1$, l'une & l'autre devient infinie, & se réduit à $z = P + Q$.

XXX. Puisque cette réduction ne paroit pas d'abord, il est bon de la démontrer. Soit donc $n = 0$, & pour la premieère forme on aura

$$A = 1, B = -1, C = \frac{2}{2}, D = -\frac{2^2}{2.3}, E =$$

$$+ \frac{2^3}{2.3.4}, \; F = - \frac{2^4}{2.3.4.5} \; \&c.$$

d'où nous tirons

$$\zeta = 1\,(P + Q) - \frac{x}{1}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{2\,x^2}{1.2}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right)$$
$$- \frac{2\,x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3}\right) + \&c.$$

Puisque chaque membre contient deux termes, soit M la série qui contient les termes dépendans de P & N celle qui contient Q, de sorte que $\zeta = M + N$; maintenant puisque $P = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, à cause de $p = x + at$, si nous posons $p - 2\,x$ au lieu de x, on aura par la nature des différentiels

$$\Gamma : (p - 2\,x) = P - \frac{2x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2}$$
$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1.2.3.4} \times \frac{d^4P}{dp^4} - \&c.$$

donc, puisque $M = P - \frac{x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2\,x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2} - \frac{2^2\,x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \&c.$, il est évident, que $2\,M - \Gamma : (p - 2x) = P = \Gamma : p$, & partant $M = \frac{1}{2}\,\Gamma : (p - 2\,x) = \frac{1}{2}\,\Gamma : (x + at) + \frac{1}{2}\,\Gamma : (at - x)$. De la même manière on verra que

$$N = \frac{1}{2}\,\Delta : q + \frac{1}{2}\,\Delta : (q - 2x) = \frac{1}{2}\,\Delta : (x - at) + \frac{1}{2}\,\Delta : (-at - x)$$

, & par conséquent $\zeta = M + N$ se trouve égale à la somme de deux fonctions, l'une de $x + at$, & l'autre de $x - at$.

XXXI. L' autre forme posant $n = 0$ donne

$$A = 1,\ B = -1,\ C = \frac{2}{3},\ D = -\frac{2^2}{3.4},$$

$$E = +\frac{2^3}{3.4.5},\ F = -\frac{2^4}{3.4.5.6}\ \&c.$$

d' où l' on obtient

$$z = x\ (P + Q) - \frac{2x^2}{2.3}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) +$$

$$\frac{2^2x^3}{1.2.3}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) - \frac{2^3x^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3}\right) + \&c.$$

Posons $z = M + N$, de sorte que M contienne les termes renfermans P, & N les Q. Considérons à présent la forme $\int P\,dp = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, & posons $p - 2x$ au lieu de p, pour avoir

$$\Gamma : (p - 2x) = \Gamma : p - \frac{2x}{1} \times P + \frac{2^2x^2}{1.2} \times \frac{dP}{dp}$$

$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \&c.$$

Or $M = \frac{x}{1}\,P - \frac{2x^2}{1.2} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2x^3}{1.2.3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \&c.$
donc $2M + \Gamma : (p - 2x) = \Gamma : p$ & partant

$$M = \frac{1}{2}\Gamma : p - \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) = \frac{1}{2}\Gamma : (x + at)$$

$$- \frac{1}{2}\Gamma : (at - x)$$

& de la même manière on trouve

$$N = \frac{1}{2}\Delta : q - \frac{1}{2}\Delta : (q - 2x) = \frac{1}{2}\Delta : (x - at)$$

$$- \frac{1}{2}\Delta : (- at - x)$$

d' où il est clair que $z = M + N$ devient comme ci-devant la somme des deux fonctions, l' une de $x + at$, & l' autre de $x - at$. Cette réduction pour le cas le plus simple est très remarquable.

XXXII.

XXXII. Par les mêmes principes on peut prouver l'identité des deux expreſſions pour les autres cas. Soit $n = 1$; & la première forme donnant $A = 1$ & $B = -1$; l'intégrale eſt $z = \frac{1}{x}(P + Q) - 1\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right)$.
Or l'autre forme donne ces coéficiens $B = -A$, $C = +\frac{3}{5}A$, $D = -\frac{2.4}{5.6}A$, $E = +\frac{2^2.5}{5.6.7}A$, $F = -\frac{2^3.6}{5.6.7.8}A$ &c.

Poſons $A = \frac{2^3}{1.2.3.4}$, pour avoir la forme ſuivante de l'intégrale, dans laquelle je ne mets que les termes renfermant $P = \Gamma : (x + at)$, puiſque la réduction pour les Q eſt la même:

$$z = \frac{2^3x^2}{1\ldots4}P - \frac{2^3x^3}{1\ldots4}\cdot\frac{dP}{dp} + \frac{2^3.3x^4}{1\ldots5}\cdot\frac{ddP}{dp^2} - \frac{2^4.4x^5}{1\ldots6}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^5.5x^6}{1\ldots7}\cdot\frac{d^4P}{dp^4}\ \&c.$$

que je décompoſe en deux parties, ſavoir

$$z = \frac{2x^2}{1.2}P - \frac{2^2x^3}{1.2.3}\cdot\frac{dP}{dp} + \frac{2^3x^4}{1\ldots4}\cdot\frac{ddP}{dp^2} - \frac{2^4x^5}{1\ldots5}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^5x^6}{1\ldots6}\cdot\frac{d^4P}{dp^4} - \&c.$$
$$-\frac{2^2x^2}{1.2.3}P + \frac{2^3x^3}{1\ldots4}\cdot\frac{dP}{dp} - \frac{2^4x^4}{1\ldots5}\cdot\frac{ddP}{dp^2} + \frac{2^5x^5}{1\ldots6}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} - \frac{2^6x^6}{1\ldots7}\cdot\frac{d^4P}{dp^4} + \&c.$$

pour avoir une telle forme $z = M - N$, où M & N marquent les ſéries trouvées, qui étant aſsès régulières, la valeur de l'une & de l'autre ſe découvrira ainſi.

XXXIII. Pour la première ſérie M, je poſe $P = \frac{ddR}{dp^2}$, où R eſt auſſi une fonction de $x + at$, & j'aurai

$$M = \frac{2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2} - \frac{2^2x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3R}{dp^3} + \frac{2^3x^4}{1\,.\,.\,4} \cdot \frac{d^4R}{dp^4} - \&c.$$

Mais posant $R = \Gamma : p$, il me vient

$$\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2}$$
$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3R}{dp^3} + \&c.$$

& partant $\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + 2M$, d'où l'on tire la valeur de M, savoir

$$M = \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) - \frac{1}{2}\Gamma : p + x\Gamma' : p.$$

Pour l'autre série je fais $P = \frac{d^3S}{dp^3}$ pour avoir

$$N = \frac{2^2x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3S}{dp^3} - \frac{2^3x^4}{1\,.\,.\,4} \cdot \frac{d^4S}{dp^4} + \frac{2^4x^5}{1\,.\,.\,5} \cdot \frac{d^5S}{dp^5} - \&c.$$

Mais puisque $\frac{d^3S}{dp^3} = \frac{ddR}{dp^2}$, il suit que $\frac{dS}{dp} = R = \Gamma p$, donc $S = {}'\Gamma : p$ & ${}'\Gamma : (p - 2x) = S - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dS}{dp}$ $+ \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddS}{dp^2} - \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3S}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1\,.\,.\,4} \cdot \frac{d^4S}{dp^4} - \&c.$
& partant ${}'\Gamma : (p - 2x) = {}'\Gamma : p - 2x\Gamma : p + 2xx\Gamma' : p$ $- 2xN$, de sorte que $N = -\frac{1}{2x}{}'\Gamma : (p - 2x) +$ $\frac{1}{2x}{}'\Gamma : p - \Gamma : p + x\Gamma' : p$, par conséquent $M - N =$ $\frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2x}{}'\Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2}\Gamma : p -$ $\frac{1}{2x}{}'\Gamma : p$, ce qui est la valeur de z.

XXXIV. Puisque $p = x + at$, en doublant les termes, & posant Γ au lieu de ${}'\Gamma$, la partie de l'intégrale, qui renferme la lettre P, se réduit à cette forme.

$$z = \Gamma':(x + at) - \frac{1}{x}\Gamma:(x + at)$$

$$+ \Gamma':(-x + at) + \frac{1}{x}\Gamma:(-x + at)$$

or la même méthode nous fournit pour les termes Q

$$z = \Delta':(x - at) - \frac{1}{x}\Delta:(x - at)$$

$$+ \Delta':(-x - at) + \frac{1}{x}\Delta:(-x - at)$$

& ces deux expressions combinées ensemble donnent l'intégrale trouvée par la première forme.

Soit pour cela $\Delta:(-x - at) - \Gamma:(x + at) = P =$ funct. $(x + at = p)$, & la différentiation donnera $-\Delta':(-x - at) - \Gamma':(x + at) = \frac{dP}{dp}$; posant de même $\Gamma:(-x + at) - \Delta:(x - at) = Q =$ funct. $(x - at = q)$, on aura par la différentiation: $-\Gamma':(-x + at) - \Delta':(x - at) = \frac{dQ}{dq}$, & de-là il est clair qu'on aura, comme ci-dessus:

$$z = \frac{1}{x}(P + Q) - r\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right).$$

XXXV. Ces réductions que je viens de faire pour les cas $n = 0$ & $n = 1$, peuvent être appliquées avec le même succès à des plus grands nombres pris pour n, mais il est aisé de prevoir, qu'elles deviendront de plus en plus embarrassantes. Cependant il suffit d'avoir fait voir la possibilité de réduire la forme infinie de l'intégrale à la finie, dans les cas, où n est un nombre entier. Mais pour les cas, où n est une fraction, les deux formes trouvées pour l'intégrale dans le §. XXIX. deviennent infinies, & il ne paroit aucun moyen de réduire

l'une ou l'autre à une forme finie. On y rencontre les mêmes difficultés que dans les cas irréſolubles de l'équation de Riccati, & quoique j'aie trouvé moyen de conſtruire ces cas par une méthode tout-à-fait particulière, il ne ſemble point, que cette méthode puiſſe être appliquée aux cas dont il s'agit ici. Mais non obſtant le nombre infini des termes, dont les intégrales de ces cas ſont compoſées, elles ne ſont pas moins complétes, puiſqu'elles renferment deux fonctions abſolument indéterminées & arbitraires.

XXXVI. Or pour trouver plus facilement les intégrales complétes de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx}z$$

qu'on poſe $x + at = p$ & $x - at = q$; enſuite ſoit P une fonction quelconque de p, & Q une fonction quelconque de q, qu'on faſſe outre cela pour abreger:
$P' = \int P dp$, $P'' = \int P' dp$, $P''' = \int P'' dp$, $P^{IV} = \int P''' dp$ &c.
$Q' = \int Q dq$, $Q'' = \int Q' dq$, $Q''' = \int Q'' dq$, $Q^{IV} = \int Q''' dq$ &c.
toutes ces valeurs pouvant aiſément être repréſentées par des quadratures de lignes courbes, enfin qu'on forme les coéficiens ſuivans

$$A = +1$$

$$B = +\frac{n(n+1)}{2}$$

$$C = +\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4}$$

$$D = +\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$E = +\frac{(n-3)(n-2)\ldots\ldots\ldots(r+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$F = +\frac{(n-4)(n-3)\ldots\ldots\ldots(n+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$$

&c.

& l' intégrale cherchée sera

$$z = A(P+Q) - \frac{B}{x}(P'+Q') + \frac{C}{xx}(P''+Q'')$$
$$- \frac{D}{x^3}(P'''+Q''') + \&c.$$

XXXVII. Aiant trouvé cette intégrale ou valeur de z, on aura aussi les intégrales de toutes les équations qui en sont transfermées, comme posant $z = x^{-m} u$, à cause de $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = x^{-m}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$ &

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = x^{-m}\left(\frac{du}{dx}\right) - m x^{-m-1} u$$
$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = x^{-m}\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - 2mx^{-m-1}\left(\frac{du}{dx}\right) + m(m+1)x^{-m-2}u$$

l' équation transformée sera:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-n)(m+n+1)}{xx}u$$

& partant son intégrale sera :

$$u = Ax^m(P+Q) - Bx^{m-1}(P'+Q')$$
$$+ Cx^{m-2}(P''+Q'') - Dx^{m-3}(P'''+Q'''). \&c.$$

XXXVIII. Développons les cas les plus simples de cette équation généralisée, en conservant les mêmes significations $p = x + at$ & $q = x - at$, & des fonctions qui en sont formées P, P', P'', P''' &c. Q, Q', Q'', Q''' &c.

1° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{m(m+1)}{xx}u$

l'intégrale est : $u = x^m(P+Q)$

2° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-1)(m+2)}{xx}u$

l'intégrale : $u = x^m(P+Q) - \frac{1.2}{2}x^{m-1}(P'+Q')$

3° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-2)(m+3)}{xx}u$

dont l' intégrale est

$$u = x^m (P + Q) - \frac{2.3}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$
$$+ \frac{1.2.3.4}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'').$$

4° $\frac{1}{aa} (\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dx^2}) - \frac{2m}{x} (\frac{du}{dx}) + \frac{(m-3)(m+4)}{xx} u$

dont l' intégrale eſt

$$u = x^m (P + Q) - \frac{3.4}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$
$$+ \frac{2.3.4.5}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{1.2.3.4.5.6}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$

5° $\frac{1}{aa} (\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dx^2}) - \frac{2m}{x} (\frac{du}{dx}) + \frac{(m-4)(m+5)}{xx} u$

dont l' intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{4.5}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$
$$+ \frac{3.4.5.6}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{2.3.4.5.6.7}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$
$$+ \frac{2.3.4.5.6.7.8}{2.4.6.8} x^{m-4} (P^{IV} + Q^{IV}).$$

6° $\frac{1}{aa} (\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dx^2}) - \frac{2m}{x} (\frac{du}{dx}) + \frac{(m-5)(m+6)}{xx} u$

dont l' intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{5.6}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$
$$+ \frac{4.5.6.7}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{3.4.5.6.7.8}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$
$$+ \frac{2.3.4.5.6.7.8.9}{2.4.6.8} x^{m-4} (P^{IV} + Q^{IV}) - \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{2.4.6.8.10} x^{m-5}$$
$$(P^V + Q^V).$$

XXXIX. Juſqu'ici je n' ai donné que les intégrales pour les cas de l' équation propoſée qui en ſont ſuſceptibles, ſans y avoir été conduit par une méthode certaine, &

directe, car toute l'analise dont je me suis servi est uniquement fondée sur une heureuse conjecture, qui regarde la forme de ces intégrales, & que le pur hazard m'a quasi fournie. Il est donc d'autant plus important de découvrir une méthode directe, qui nous puisse mener au même but, qu'il n'y a aucun doute, qu'une telle méthode n'apporte de très-grands éclaircissemens dans cette nouvelle carrière; or la considération de ces intégrales nous porte aisément à penser, qu'il doit y avoir une méthode, qui, moyennant une certaine transformation conduise des cas plus simples aux plus compliqués, de la même manière que dans le développement de la fameuse équation de Riccati on a réussi à déduire les cas plus difficiles des plus simples, en y employant une certaine substitution. C'est donc par une semblable méthode, que je m'en vais enseigner la résolution de l'équation, que j'ai traitée jusqu'ici.

XL. L'équation proposée étant donc:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}z$$

je la transforme par le moyen de cette substitution:

$$u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}z$$

en cherchant une équation, qui détermine la fonction u par t & x; or il est aisé de prevoir, que l'équation transformée aura une telle forme

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{k'}{xx}u$$

semblable à la proposée, avec cette seule différence que le nombre k' sera différent du nombre k; ou bien sans supposer une telle prévoyance, on peut regarder cette dernière équation comme la proposée, & introduire z à la place de u par la substitution indiquée.

XLI. Supposant donc $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}z$, on en tire

d'abord

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dt^2dx}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

Or la première équation donnant

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{aak}{xx}z$$

si nous différentions par la seule variabilité de x, nous aurons :

$$\left(\frac{d^3z}{dt^2dx}\right) = aa\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) - \frac{aak}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2aak}{x^3}z$$

d'où nous tirons :

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{(m-2)k}{x^3}z.$$

Maintenant la même substitution donne :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{m}{xx}z$$

& de là

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2m}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2m}{x^3}z\;;$$

or $-\frac{k'}{xx}u = -\frac{k'}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{mk'}{x^3}z$

& partant ces deux dernières expressions ensemble doivent être égales à celle, qui vient d'être trouvée pour $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$.

XLII. Puisque les termes $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$ & $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ se détruisent d'eux mêmes, il ne reste qu'à égaler séparément ceux qui sont affectés par $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ & par z, d'où nous tirons ces deux égalités $-k = -2m - k'$ & $-(m-2)k = 2m - mk'$, ou $m = \frac{k-k'}{2}$, & $2k = m(k-k'+2)$ donc $(k-k')^2 - 2k - 2k' = 0$, & partant $k' =$

$k' = k + 1 \pm \surd(1 + 4k)$, & $m = \frac{-1 \mp \surd(1+4k)}{2}$

Par conséquent si nous avons réussi à trouver l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}z$, nous aurons aussi l'intégrale de celle-ci: $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{k'}{xx}u$ posant $k' = k + 1 \pm \surd(1 + 4k)$, puisque $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{k-k'}{2x}z$.

XLIII. Or aiant assigné ci-dessus, indépendamment de ces recherches, l'intégrale de notre équation pour le cas $k = 0$, cette nouvelle méthode nous fournit l'intégrale pour le cas $k' = 2$, & supposant ensuite $k = 2$, nous en tirons le troisiéme cas $k' = 3 + \surd 9 = 6$, & celui-ci, posant $k = 6$, nous conduit au quatriéme $k' = 7 + \surd 25 = 12$, lequel, en faisant $k = 12$, nous méne au cinquiéme $k' = 13 + \surd 49 = 20$, & ainsi de suite selon cette progression:

k	0	2	6	12	20	30	42	&c.
k'	2	6	12	20	30	42	56	&c.

d'où l'on voit que toutes les valeurs de k sont comprises dans cette formule générale $k = i(i + 1)$, & ce cas considéré en général nous conduit au suivant $k' = i(i + 1) + 1 + \surd[1 + 4i(i + 1)] = ii + 3i + 2 = (i + 1)(i + 2)$, d'où nous tirons tous les cas dont j'ai assigné ci-dessus les integrales.

XLIV. Donc si nous connoissons, pour le cas $k = n(n + 1)$ l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx}z$, qui soit $z = V$, nous en tirerons, pour le cas $k' = (n + 1)(n + 2)$ l'intégrale de celle-ci:

9°
$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{(n+1)(n+2)}{xx}\, z$, qui sera $z = \left(\frac{dV}{dx}\right) - \frac{(n+1)}{x} V$, ou bien, puisqu'on peut multiplier la valeur de z par une constante quelconque, cette dernière intégrale peut être exprimée ainsi: $z = \frac{1}{x} V - \frac{1}{n+1}\left(\frac{dV}{dx}\right)$.

Par conséquent, puisque pour le cas, $k = 0$, l'intégrale est $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, en écrivant S pour cette double fonction, nous aurons pour l'équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx} z$$

les intégrales suivantes:

si	
$k = 0$	$z = S$
$k = 1.2$	$z = \frac{1}{x} S - \left(\frac{dS}{dx}\right)$
$k = 2.3$	$z = \frac{3}{2x^2} S - \frac{3}{2x}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)$
$k = 3.4$	$z = \frac{5}{2x^3} S - \frac{5}{2x^2}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)$
&c.	&c.

XLV. Soit, pour le cas $k = n(n+1)$, l'intégrale:

$$z = \frac{A}{x^n} S - \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{D}{x^{n-3}}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \frac{E}{x^{n-4}}\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \text{\&c.}$$

& pour le cas $k = n(n+1)(n+2)$, à cause de $z = \left(\frac{dV}{dx}\right) - \frac{(n+1)}{x} V$, nous aurons:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{nA}{x^{n+1}} S + \frac{A}{x^n}\left(\frac{dS}{dx}\right) - \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{(n-1)B}{x^n} - \frac{(n-2)C}{x^{n-2}}$$

$$+ \frac{C}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3}\right) - \&c.$$

$$+ \frac{(n-3)D}{x^{n-2}} \quad - \&c.$$

$$-\frac{(n+1)}{x} V = -\frac{(n+1)A}{x^{n+1}} S + \frac{(n+1)B}{x^n} \left(\frac{dS}{dx}\right)$$

$$-\frac{(n+1)C}{x^{n-1}} \left(\frac{ddS}{dx^2}\right) + \frac{(n+1)D}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3}\right) - \&c.$$

& partant l' intégrale pour le cas $k = (n + 1)(n + 2)$ en changeant les signes sera :

$$z = \frac{(2n+1)A}{x^{n+1}} S - \frac{(A+2nB)}{x^n} \left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{(B+[2n-1]C)}{x^{n-1}}$$

$$\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{(C+[2n-2]D)}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3}\right) + \&c.$$

& il est évident que cette méthode nous fournit les mêmes intégrales que la précédente; quoique les valeurs pour chaque nombre n ne paroissent point si ouvertement, cependant une légère attention nous découvrira bientôt la même loi de progression entre les coéficiens A, B, C, D &c. qui a été trouvée ci-dessus.

RECHERCHES

Sur la construction des nouvelles Lunettes à 5 & 6 verres & leur perfection ultérieure

PAR M. EULER.

I. DEPUIS quelque tems cette espèce de Lunettes est devenue fort commune, & l' emporte beaucoup sur les Lunettes à 4 verres, dont on s'étoit servi jusqu'ici pour représenter les objets debout. L' invention de ces nouvelles Lunettes est apparemment dûe au célèbre M. Dollond, qui semble avoir porté l' art de polir les verres presque au plus haut degré de perfection, dont il est susceptible. Aussi les avantages de ces nouvelles Lunettes sur les ordinaires à 4 verres sont ils très-considérables: elles présentent les objets plus nettement, elles découvrent un plus grand champ, & pour le même grossissement elles ne sont pas si longues que les ordinaires.

II. D'abord je me suis imaginé que ces Lunettes étoient construites sur le même principe que les ordinaires, qu'on peut regarder comme deux Lunettes astronomiques jointes ensemble, & que l' artiste y avoit adroitement ajouté un cinquiéme & même un sixiéme verre, tant pour augmenter le champ apparent, que pour délivrer des couleurs d' iris la représentation des objets. Mais aiant examiné quelques unes de ces Lunettes, j' ai remarqué que l' arrangement des verres est fondé sur un principe tout-à-fait différent, & en particulier on y trouve une lentille, dont l'ouverture est beaucoup plus petite que dans les ordinaires, sans que le champ apparent en souffre la moindre diminution. Cette petite lentille constitue quasi l'essence de

ces nouvelles Lunettes, en les distinguant de toutes les autres dont on s' est servi jusqu'ici.

III. Le principe sur lequel ces Lunettes sont fondées, consiste dans une disposition toute particulière des deux verres du milieu, qu' il faut bien distinguer tant de l'objectif que des oculaires. L'objectif étant placé en A (*fig.* 1. *pl.* 3.), on met le second verre QQ à peu près dans le foyer de l' objectif (je supposerai ici qu'il s' y trouve exactement, puisque cette situation ne cause aucune confusion); ensuite considérant l' objectif PAP comme un vrai objet qu'on marque le lieu C où son image tomberoit par le second verre QQ, & c' est précisément ici qu'il faut placer le troisième verre RR; d' où l' on voit que son ouverture est déterminée uniquement par celle de l' objectif, de sorte que $RR = \frac{BC}{AB} \cdot PP$, & puisque la distance BC est ordinairement très-petite à l' égard de AB, c'est la raison pourquoi l'ouverture de ce troisième verre est si petite, en quoi consiste le caractère de ces Lunettes.

IV. Après ces trois verres en A, B, & C, on peut employer un ou deux, ou plusieurs oculaires pour gagner un champ apparent d' autant plus grand; car si l' on ne se servoit que d'un seul oculaire SDS le champ seroit au dessous des Lunettes ordinaires, & cependant comme ce cas renferme le fondement des suivans, il sera bon de le développer.

Soit donc p la distance de foyer de l' objectif, & x le demi-diamétre de son ouverture, & que pour les autres verres les distances de foyer soient exprimées par les lettres q; r, s, & les demi-diamètre de leurs ouvertures par πq, $\pi' r$, $\pi'' s$, entant que le champ apparent en dépend. Ensuite pour les nombres B, C, D de mes formules générales expliquées dans le XIII. Volume des Mém. de l'Acad. de Berlin, puisque le verre B est placé au foyer de l'obje-

ctif, nous aurons $B = -1$ & $B = \infty$, pour le troisiéme verre posons $C = \frac{c}{1-c}$, & partant $C = c$, or le quatriéme verre étant l'oculaire, donne $D = \infty$, & $D = 1$.

V. Maintenant, puisque les objets doivent être présentés debout, soit $m:1$ le raport du grossissement sélon le diamètre, & posant le demi-diamètre du champ apparent $= \phi$ nous aurons d'abord $\phi = -\frac{\pi + \pi' - \pi''}{m-1}$, où je remarque que si l'on fait l'oculaire également convexe des deux côtés, on peut prendre $\pi'' = -\frac{1}{4}$, de sorte que le diamètre de son ouverture soit égal à la moitié de sa distance de foyer. Or pour rendre les déterminations plus générales, au lieu de la fraction $\frac{1}{2}$, qui *répond à la* plus grande ouverture, j'écrirai ω, & je poserai $\pi'' = -\omega$. Pour la lettre π', puisque l'ouverture du troisième verre n'influe point sur le champ, j'aurai $\pi' = 0$, & la lettre π ne pouvant être prise négative, je mettrai $\pi = \beta\omega$, où il faut prendre β aussi petite que les circonstances le permettent. De là nous aurons $\phi = \frac{1-\beta}{m-1}\omega$, & posant pour abreger $\frac{1-\beta}{m-1} = M$, cette expression $\phi = M\omega$.

VI. Aiant établi ces élémens, je tire de mes formules générales, à cause de

$B\pi - \phi = \infty\pi$, $C\pi' - \pi\phi = -(\beta - M)\omega$, & $\pi'' - \pi' + \pi - \phi = -(1 - \beta + M)\omega$, tant pour les distances de foyer de nos verres, que pour leurs intervalles les valeurs suivantes :

$$q = \frac{B\varphi}{B\pi - \varphi}\, p = \frac{M}{\beta}\, p,$$

$$r = \frac{BC\varphi}{-(\beta - M)\,\omega}\, p = \frac{cM}{\beta - M}\, p$$

$$s = \frac{BC\varphi}{-(1 - \beta + M)\,\omega}\, p = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{1 - \beta + M}\, p,$$

$$AB = \frac{B\pi}{B\pi - \varphi}\, p = p$$

$$BC = \frac{\varphi B\pi}{B\pi(\beta - M)\,\omega}\, p = \frac{M}{\beta - M}\, p$$

$$CD = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{(\beta - M)(1 - \beta + M)}\, p$$

& pour le lieu de l'œil, la diſtance $DO = \frac{s}{1 - \beta + M}$. Or la formule, qui ſert à détruire les couleurs d'iris, ne ſauroit être remplie, puiſqu'il faudroit qu'il fût $\frac{1}{1 - \beta + M} = 0$, & partant ce ſera un grand défaut de cette première eſpèce de Lunettes.

VII. Or l'autre défaut, par raport au champ apparent, eſt encore plus conſidérable, ſon demi-diamètre $\varphi = \frac{1 - \beta}{m - 1}\,\omega$ étant encore plus petit que dans les Lunettes aſtronomiques ordinaires; car non ſeulement le nombre β ne ſauroit évanoüir, mais il faut qu'il ſoit plus grand que M. Poſons donc $\beta = (1 + n)M$, & puiſque $1 - \beta = (m - 1)M$, nous aurons $M = \frac{1}{m + n}$, & partant $\varphi = M\omega = \frac{\omega}{m + n}$, & enſuite les autres déterminations:

$q = \frac{1}{1 + n}\, p$, $AB = p$

$r = \frac{c}{n}\, p$, $BC = \frac{1}{n}\, p$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{M}{1-nM} p$, $CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{n(1-nM)} p$,

ou $t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{m} p$, ou $CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{m+n}{nm} p$

& pour le lieu de l' œil $DO = \frac{s}{1-nM} = \frac{m+n}{m} s$.

VIII. Si nous considérons les distances de foyer des trois premiers verres p, q, r, avec le grossissement m, comme données, nous en aurons $n = \frac{p-q}{q}$ & $c = \frac{(p-q)r}{pq}$, d' où le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{q\omega}{mq+p-q}$, qui ne dépend donc point du troisiéme verre en C. Mais pour l'oculaire en D sa distance de foyer doit être $s = \frac{(p-q)r}{pq-(p-q)r} \cdot \frac{p}{m}$, & les intervalles entre les verres, $AB = p$, $BC = \frac{pq}{p-q}$, $CD = \frac{r(mq+p-q)}{m(pq-(p-q)r)} p = s\left(\frac{mq}{p-q} + 1\right)$. Cet arrangement des verres nous fournit donc la commodité que, quand même on pourroit donner à p une valeur très-petite, on pourroit se servir d' un oculaire, dont la distance de foyer fût aussi grande qu'on voudra.

IX. Pour rendre cet avantage plus sensible, soit la distance de foyer de l' oculaire donnée, $s = k$, & puisque $\frac{c}{1-c} = \frac{mk}{p}$, nous aurons $c = \frac{mk}{mk+p}$, d' où les déterminations de la Lunette seront les suivantes:

Dist. de foyer du verre	Intervalles entre les verres
en $A = p$	$AB = p$
en $B = q = \frac{1}{1+n} p$	$BC = \frac{1}{n} p$

Dist. de foyer du verre	Intervalles entre les verres
en $C = r = \frac{mkp}{n(mk+p)}$	$CD = \frac{m+n}{n} k$
en $D = s = k$	$DO = \frac{m+n}{m} k$

où le nombre n est encore indéterminé ; mais puisque nous avons pour le champ apparent $\phi = \frac{\omega}{m+n}$, il est bon de prendre n aussi petit qu'il est possible ; or on voit qu'en diminuant trop le nombre n, la longueur de la Lunette deviendroit excessive, défaut qu'on a encore plus de raisons d'éviter, que la petitesse du champ apparent.

X. Considérons aussi l'ouverture de chaque verre, & pour l'objectif le demi-diamètre de son ouverture x se détermine par le grossissement, en prenant $x = \frac{m}{60}$ pouces ou bien $x = \frac{m}{50}$ pouces, si l'on craint que la pluralité des verres ne nuise à la clarté. Pour le second verre QBQ, le demi-diamètre de son ouverture doit être $BQ = \beta\omega q = M\omega p = \frac{\omega}{m+n} p$. Pour le troisiéme verre RCR, il faut avoir uniquement égard à l'ouverture de l'objectif, dont le demi-diamètre étant $AP = x$, nous aurons $CR = \frac{BC}{AB} x = \frac{x}{n}$, d'où l'on comprend la raison, pourquoi ce verre souffre une si petite ouverture. Mais au verre oculaire il faut donner la plus grande ouverture dont il est susceptible, son demi-diamètre étant $DS = \omega k$ ou bien $\frac{1}{4} k$.

XI. Il est aussi important de déterminer conformément à mes expressions générales la confusion qui résulte de tous

nos quatre verres, où leur figure indiquée par les nombres λ, λ', λ'', λ''' entre principalement en considération. Puisque donc $B = -1$, $C = \frac{c}{1 - c}$, $C\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega = -n\varphi$, on voit que le second verre ne cause aucune confusion; or de tous les autres ensemble résulte cette expression:

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda'' + \nu c(1-c)}{nc^3} + \frac{\lambda'''(1-c)^3}{mc^3}\right)$$

qui ne doit pas excéder la valeur de $\frac{\mu}{4x^3}$, prenant x entre 40 & 50. Il faut donc qu'il soit

$$\frac{mx^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda'' + \nu c(1-c)}{nc^3} + \frac{\lambda'''(1-c^3}{mc^3}\right) < \frac{1}{x^3}$$

ou, puisque $\frac{c}{1 - c} = \frac{mk}{p}$, & $c = \frac{mk}{mk+p}$, nous aurons:

$$\frac{mx^3}{p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda''(mk+p)^3}{nm^3k^3} + \frac{\nu p(mk+p)}{nmmkk} + \frac{\lambda''' p^3}{m^3k^3}\right) < \frac{1}{\mu^3}$$

XII. De là nons voyons que plus on prend petit le nombre n plus la confusion sera augmentée, ce qui est un nouveau motif de prendre toujours $n > 1$. Ensuite comme le second verre n'affecte point la confusion, on le fera également convexe des deux côtés, pourqu'il admette l'ouverture que je viens de lui assigner, sur tout quand j'employerai plusieurs oculaires. Or pour le troisiéme verre, comme il ne demande presque point d'ouverture, il sera bon de prendre $\lambda'' = 1$, & puisque sa distance de foyer est $= r$, & $C = c$, il faudra faire les rayons

de la face d'avant $= \frac{r}{\rho c + \sigma(1 - c)}$

de la face de derrière $= \frac{r}{\sigma c + \rho(1 - c)}$

où les nombres ρ & σ de même que le nombre ν dépendent de la raison de réfraction, comme je l'ai expliqué ailleurs. Mais

pour l'oculaire SDS, on voit qu'en augmentant k audelà de $\frac{p}{m}$, la confusion qui en résulte, ne sera d'aucune conséquence.

XIII. Je ne m'arrêterai pas à développer cette espèce de telescopes, puisqu'elle est assujettie à ces deux très-grands défauts, que premiérement le champ apparent est très-peu considérable, étant moindre que dans les Lunettes ordinaires composées des deux convexes, & en second lieu parcequ'elle n'est pas délivrée de l'apparition des couleurs d'iris. Aussi M. Dollond n'en a point fait, autant que je sache, & si l'on veut des Lunettes qui n'aient pas plus de verres que quatre, on fera mieux de suivre la construction ordinaire. Cependant cette première espèce me servira de base, pour en déduire les espèces suivantes, qui ne différent de celle-ci que par le nombre des verres oculaires. C'est de cette source qu'on peut non seulement amplifier le champ apparent, mais aussi détruire les couleurs d'iris, & par là procurer à ces Lunettes les avantages, qui les ont rendues si recommendables; je tâcherai sur tout de porter ces avantages au plus haut dégré de perfection, dont ils sont susceptibles.

XIV. Mais auparavant il est nécessaire de donner un bon conseil pour faire mieux réussir l'exécution de ces Lunettes. C'est au sujet du troisiéme verre RCR dont la confusion est si grande, qu'elle pourroit bien surpasser celle de l'objectif même, & partant obliger d'étendre la distance de foyer de l'objectif bien audelà des bornes, que la construction des Lunettes ordinaires prescrit, ce qui allongeroit très-considérablement cette espèce de Lunettes; & puisqu'alors la quantité p devroit surpasser mk, la confusion qui en résulte deviendroit encore plus considérable, sans qu'il fût à propos d'y remédier par l'augmentation du nombre n, ce qui retreciroit trop le champ apparent. Il

faut donc penser à remédier à cet inconvénient d'une autre manière, qui puisse même contribuer à rendre ces Lunettes plus commodes.

XV. Pour cet effet je ne crois pas qu'il y ait un meilleur moyen que de doubler ce verre RCR, ou de le composer de deux verres immédiatement joints ensemble, ce qui se pourra exécuter d' autant plus aisément, puisque ce verre est très-petit, & que son épaisseur ne s' oppose pas à une telle jonction. Aiant donc déterminé la distance de foyer r que ce verre doit avoir, les deux verres dont il sera bon de le composer, doivent être formés selon les mesures suivantes.

Du premier verre qui regarde l' objectif

le rayon de la face $\begin{cases} \text{d'avant} & = 0,74781\, r \\ \text{de derrière} & = 1,02255\, r \end{cases}$

De l' autre verre qui regarde l' œil

le rayon de la face $\begin{cases} \text{d'avant} & = -0,50888\, r \\ \text{de derrière} & = +0,66577\, r \end{cases}$

Ces deux verres étant joints ensemble laisseront un petit vuide entr' eux (*fig.* 2.), & on les pourra regarder comme un seul verre, dont la confusion sera insensible.

XVI. Aiant détruit de cette manière, ou au moins rendu insensible la confusion, qui seroit à craindre de la part de ce troisiéme verre, on pourra avec d' autant plus de succès remédier à toute la confusion causée par l'objectif, & tous les autres verres ensemble. On n' a qu'à composer l'objectif aussi de deux verres, dont voici la construction, la distance de foyer devant être $= p$

Du premier verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{d'avant} & = 0,51467\, p \\ \text{de derrière} & = 4,05851\, p \end{cases}$

De l' autre verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} & = -0,59340\, p \\ \text{de derrière} & = +0,74127\, p \end{cases}$

On mettra entre ces deux verres une telle distance, à déterminer par l'expérience, que l'on s'apperçoive le moins de toute confusion. Quand cette construction réussit bien, on pourra, peut être, prendre $p = \frac{m}{4}$ pouces ou encore plus petite, ce qui racourciroit très-considérablement ces Lunettes.

De Lunettes de cette espèce à 5 verres.

XVII. Ces Lunettes ne différent des précédentes, que parceque j'emploie ici deux verres oculaires, tant pour augmenter le champ apparent, que pour faire évanoüir les couleurs d'iris, dont la représentation des objets pourroit être troublée. Ensuite je nomme ces Lunettes à cinq verres, quand même on auroit doublé tant l'objectif que le troisiéme petit verre *RCR*, puisque cette duplication n'empêche pas qu'on ne puisse regarder dans le calcul ces verres comme simples. Mais quand il s'agit de fixer la distance de foyer l'objectif, que je nomme $= p$, & à laquelle l'intervalle des verres *AB* est toujours égale, il y faut faire attention à cause de la confusion, qui pourroit résulter de tous les verres. Car plus on réussit à diminuer cette confusion, plus peut-on prendre petite la distance de foyer de l'objectif, laquelle doit pourtant être toujours au moins plus de quatre fois plus grande que le diamètre de son ouverture qui se détermine par le grossissement exprimé par la lettre m.

XVIII. Posant donc le lettres p, q, r, s & t pour les distances de foyer de nos 5 verres, soient les demidiamètres de leurs ouvertures:

$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$ & $ET = \pi''' t$; & le demi-diamètre du champ apparent $= \varphi$. Cela posé, puisque le grossissement est $= m$, & que les objets doi-

vent être représentés debout, mes formules générales me fournissent cette équation $\varphi = -\frac{\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m-1}$, où comme j'ai remarqué cy-dessus, la lettre π doit avoir une valeur positive $< \omega$, & $\pi = 0$. Donc pour rendre le champ aussi grand qu'il est possible, je poserai $\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, & $\pi''' = \omega$, pour avoir $\varphi = \frac{2-\beta}{m-1}\omega$, ou $\varphi = M\omega$, en posant $M = \frac{2-\beta}{m-1}$.

XIX. Soient ensuite les nombres, qui déterminent dans mes formules tant les distances de foyer, que les intervalles des verres :

$$B = -1,\ C = \frac{c}{1-c},\ D = -\frac{d}{1+d},\ E = \infty$$

$$\mathrm{B} = \infty,\ \mathrm{C} = c,\quad \mathrm{D} = -d,\quad \mathrm{E} = 1$$

d'où nous tirons d'abord les valeurs suivantes :

$\mathrm{B}\pi - \varphi = \infty\beta\omega$

$\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega$

$\mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\omega$

$\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = +(2 - \beta + M)\omega$

& de là les distances de foyer avec les intervalles des verres :

$$q = \frac{M}{\beta}p$$

$$r = \frac{M}{\beta - M}p$$

$$s = \frac{c}{1-c}\cdot\frac{dM}{d+\beta-M}p$$

$$t = \frac{cd}{(1-c)(1+d)}\cdot\frac{M}{2-\beta+M}p$$

$$AB = p$$

$$BC = \frac{M}{\beta - M}p$$

$$CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{dM}{(\beta - M)(d + \beta - M)} p$$

$$DE = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{(d+2)M}{(d+\beta-M)(2-\beta+M)} p$$

& pour le lieu de l' œil la diſtance $E O = \frac{t}{2-\beta+M}$.

XX. Pour abreger ces expreſſions, poſons $\beta = (n+1) M$, puiſqu'il faut néceſſairement qu'il ſoit $\beta > M$, ce qui four- $M = \frac{2}{m+n}$, & partant le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{2}{m+n}\,\omega$, qui eſt le double du cas précédent, en donnant au nombre n la même valeur. Or nos formules deviendront :

$$q = \frac{1}{n+1} p$$

$$r = \frac{c}{n} p$$

$$s = \frac{1}{1-c} \cdot \frac{dM}{d+nM} p$$

$$t = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{M}{2-nM} p$$

$$AB = p$$

$$BC = \frac{1}{n} p$$

$$CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{n(d+nM)} p$$

$$DE = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{(d+2)}{(d+nM)(2-nM)} p$$

& pour le lieu de l' œil $E O = \frac{t}{2-nM} = \frac{t}{mM}$, où les trois quantités c, d & n ſeroient arbitraires.

XXI. Mais il faut à cette heure tenir compte des couleurs d'iris, qui évanouïront en satisfaisant à cette équation:

$$\frac{\pi}{B\pi - \varphi} + \frac{\pi'}{C\pi' - \pi + \varphi} + \frac{\pi''}{D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi} + \frac{\pi'''}{E\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi} = 0$$

qui pour le cas présent se réduit à celle-ci:

$$-\frac{1}{d + nM} + \frac{1}{2 - nM} = 0$$

d'où nous trouvons $d = 2 - 2nM$ & $d + 2 = 2(2 - nM)$, & en substituant pour M sa valeur $\frac{2}{m+n}$, nous aurons $2 - nM = d + nM = \frac{2m}{m+n}$, $d = \frac{2(m-n)}{m+n}$ & $d + 2 = \frac{4m}{m+n}$, & partant:

$$q = \frac{1}{n+1}p \qquad AB = p$$

$$r = \frac{\epsilon}{n}p \qquad BC = \frac{1}{n}p$$

$$s = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \cdot \frac{2(m-n)}{m+n} \cdot \frac{p}{m}, \quad CD = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \cdot \frac{m-n}{n} \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \cdot \frac{2(m-n)}{3m-n} \cdot \frac{p}{m}, \quad DE = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \cdot \frac{4(m-n)}{3m-n} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil $EO = \frac{m+n}{2m}t$.

XXII. On peut rendre ces formules encore plus simples en posant $n = \frac{m}{i}$, de sorte que le demi-diamètre du champ apparent devienne $\varphi = \frac{2i}{m(i+1)}\omega$, & les autres déterminations seront:

$$q = \frac{i}{m+i}p \qquad AB = p$$

$$r = ci \cdot \frac{p}{m} \qquad BC = i \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m} \qquad CD = \frac{c}{1-c} \cdot (i-1) \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m} \qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil la diſtance $EO = \frac{i+1}{2i}t$, où le champ apparent demande de grandes valeurs pour le nombre i, mais la longueur de la Lunette auſſi bien que la diſtinction en demande de petites, puiſque (§. XI.) la quantité $\frac{\lambda''}{nc^3} = \frac{\lambda'' i}{mc^3}$ doit être fort petite par raport à l'unité à moins qu'on ne remédie à la confuſion, en doublant le troiſiéme verre.

XXIII. Poſons outre cela $\frac{c}{1-c} \times \frac{p}{m} = z$, pour mieux ſoumettre les verres oculaires à notre volonté, de ſorte, que $\frac{c}{1-c} = \frac{mz}{p}$, & $c = \frac{mz}{mz+p}$, d'où la fraction $\frac{i}{m}(1 + \frac{p}{mz})^3$ devroit être aſsès petite, pour n'être pas obligé de doubler le troiſiéme verre. Donc les déterminations générales pour ces Lunettes ſeront:

$$q = \frac{i}{m+i}p \qquad AB = p$$

$$r = \frac{ipz}{mz+p} \qquad BC = \frac{i}{m}p$$

$$s = \frac{2(i-1)}{i+1}z \qquad CD = (i-1)z$$

$$t = \frac{2(i-1)}{3i-1}z \qquad DE = \frac{4(i-1)}{3i-1}z$$

pour le lieu de l'œil $EO = \frac{i+1}{2i} t$, & le demi-diametre du champ apparent $\varphi = \frac{2i}{m(i+1)} \omega$; où il eſt remarquable que les deux quantités i & z ſont indépendantes du groſſiſſement m, & de la diſtance de foyer de l'objectif p, & partant tant les deux verres D & E, que les diſtances CD, DE, & EO n'en dépendent pas non plus.

XXIV. Pour les ouvertures des verres, celles de l'objectif & du troiſiéme ſont déterminées par le dégré de clarté, & celles des autres par le champ apparent, de la manière ſuivante:

Demi-diamètres de l'ouverture des verres

$$AP = x = \frac{m}{60} \text{ ou } \frac{m}{50} \text{ pouces}$$

$$BQ = \frac{2i}{m(i+1)} \omega p$$

$$CR = \frac{i}{m} x = \frac{i}{60} \text{ ou } \frac{i}{50} \text{ pouces}$$

$$DS = \omega s = \frac{2(i-1)}{i+1} \omega z$$

$$ET = \omega t = \frac{2(i-1)}{3i-1} \omega z$$

où l'on peut prendre $\omega = \frac{1}{4}$, ſi l'on fait les verres B, D & E également convexes des deux côtés.

XXV. Si l'on vouloit ſeſervir tant d'un objectif ordinaire, que du troiſiéme verre ſimple, il ſeroit bon pour diminuer la confuſion, de prendre z beaucoup plus grand que $\frac{p}{m}$; mais puiſque alors la diſtance de foyer des verres D & E deviendroit aſsès conſidérable pour les grandes multiplications, ces verres devroient être trop grands. Il conviendra donc de prendre un milieu, en poſant $z =$

$\frac{p}{m}$, & de donner plutôt au verre objectif une plus grande distance de foyer p pour rendre la confusion insensible. Alors aiant $c = \frac{1}{2}$, on n'aura qu'à déterminer la distance de foyer de l'objectif par cette formule $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+8i)}$ pouces, & lui donner une ouverture dont le demidiamètre $x = \frac{m}{60}$ pouces. Dans ce cas, le troisiéme verre C deviendra aussi également convexe des deux côtés. Or en supposant la raison de réfraction de l' air dans le verre, comme 1, 54 à 1, il sera bon de former l'objectif ensorte, que le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0, 60849\, p \\ \text{de derrière} = 4, 79820\, p \end{cases}$ Pour les autres verres également convexes des deux côtés, la distance de foyer étant $= q$, on prendra le rayon de chaque face $= 1, 08q$.

XXVI. Cela posé nous aurons les déterminations suivantes pour la construction de ces Lunettes, en prenant $\omega = \frac{1}{4}$.

Distance de foyer du verre	Demi-diamètre de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A .. $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+8i)}$ pouces	$AP = x = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en B .. $q = \frac{i}{m+i} p$	$BQ = \frac{i}{2(i+1)} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = i \cdot \frac{p}{m}$
en C .. $r = \frac{1}{2} i \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{i}{60}$ pouces	$CD = (i-1) \frac{p}{m}$
en D .. $s = \frac{2(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{i-1}{2(i+1)} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{4(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$
en E .. $t = \frac{2(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{i-1}{2(3i-1)} \cdot \frac{p}{m}$	$EO = \frac{ii-1}{i(3i-1)} \cdot \frac{p}{m}$

la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{6i^2 - 3i - 1}{i(3i - 1)} \cdot \frac{p}{m}$ & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{i}{2m(i+1)}$, qui étant réduit en minutes, donne $\varphi = \frac{1718\,i}{m(i+1)}$ minutes. Or pour que le second verre admette l'ouverture marquée, il faut qu'il soit $m > \frac{2i}{i-1}$.

XXVII. Le nombre i étant encore permis à notre choix à l'égard du champ apparent, il seroit bon de le prendre fort grand, cependant si on l'augmentoit à l'infini, on n'en tireroit que $\varphi = \frac{1}{2m}$, & la Lunette deviendroit à deux égards infiniment longue, puisque la distance de foyer de l'objectif devroit aussi être prise infinie. Mais prenant $i = 2$, à cause de $\varphi = \frac{1}{3m}$, on perd bien daus le champ la sixième partie, mais la Lunette devient aussi plus courte à un double égard, ce qui est sans doute bien préférable. Si l'on vouloit mettre $i = 3$, on gagneroit tant soit peu sur le champ, mais la Lunette deviendroit assès considérablement plus longue. D'où je conclud qu'il est avantageux de ne pas supposer i plus grand que 2, attendu que si l'on souhaite un plus grand champ, on n'a qu'à ajouter encore un verre, qui l'augmentera de la moitié, pendant qu'en donnant ici au nombre i de plus grandes valeurs, les accroissemens du champ seroient insensibles.

XXVIII. Posons donc $i = 2$, & prenant la distance de foyer de l'objectif $p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m + 24)}$ pouces, nous aurons les déterminations suivantes:

Dist. de foyer du verre	Demi-diam. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = \frac{2}{m+2}p$	$BQ = \frac{1}{3m}p$	$BC = \frac{2}{m}p$
en $C = \frac{1}{m}p$	$CR = \frac{1}{30}$ pouc.	$CD = \frac{1}{m}p$
en $D = \frac{2}{3m}p$	$DS = \frac{1}{6m}p$	$DE = \frac{4}{5m}p$
en $E = \frac{2}{5m}p$	$ET = \frac{1}{10m}p$	$EO = \frac{3}{10m}p$

donc la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{41}{10m}p$, & le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1}{3m}$ ou de $\frac{1146}{m}$ minutes, d'où il est aisé de tirer pour chaque multiplication proposée les mesures exprimées en pouces, & d'y régler la construction des Lunettes.

1° *Devis d'une telle Lunette qui grossit 10 fois.*

XXIX. A' cause de $m = 10$, nous aurons $p = \frac{15}{2}\sqrt{34}$ $= 24,3$ pouces, prenons donc $p = 25$ pouces, puisqu'il vaut mieux de la prendre plus grande que plus petite, & nous obtiendrons les mesures suivantes en pouces.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 25,00$	15,21 / 119,95	$AP = 0,17$	$AB = 25,00$
en $B = 4,17$	4,50	$BQ = 0,83$	$BC = 5,00$
en $C = 2,50$	2,70	$CR = 0,03$	$CD = 2,50$
en $D = 1,67$	1,80	$DS = 0,42$	$DE = 2,00$
en $E = 1,00$	1,00	$ET = 0,25$	$EO = 0,75$

la longueur de toute la Lunette $AO = 35, 25$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 114' = 1°, 54'$.

2° Devis d'une telle Lunette que grossit 20 fois.

XXX. La valeur $m = 20$ donne $p = 15 \sqrt[3]{44} = 53$, prenons donc $p = 55$ pouces, & nos mesures seront :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 55, 00$	{ 33, 47 263, 90	$AP = 0, 33$	$AB = 25, 00$
en $B = 5, 00$	5, 40	$BQ = 0, 92$	$BC = 5, 50$
en $C = 2, 75$	2, 97	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 75$
en $D = 1, 83$	1, 98	$DS = 0, 46$	$DE = 2, 20$
en $E = 1, 10$	1, 19	$ET = 0, 27\frac{1}{2}$	$EO = 0, 82$

la longueur de toute la Lunette $AO = 66, 27$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 57'$.

3° Devis d'une telle Lunette qui grossit 30 fois.

XXXI. La valeur $m = 30$ donne $p = \frac{45}{2} \sqrt[3]{54} = 85$; donc

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres.
en $A = 88$	{ 53, 55 422, 24	$AP = 0, 50$	$AB = 88, 00$
en $B = 6, 50$	5, 94	$BQ = 0, 98$	$BC = 5, 86$
en $C = 2, 93$	3, 16	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 93$
en $D = 1, 95$	2, 11	$DS = 0, 49$	$DE = 2, 34$
en $E = 1, 17$	1, 26	$ET = 0, 29$	$EO = 0, 88$

la longueur de toute la Lunette $AO = 100, 01$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 38'$

XXXII. Si les verres objectifs quoique simples étoient si excellens, qu'ils admissent une plus grande ouverture, & qu'ils pûssent être employés à des plus grands grossissemens, alors on pourroit prendre pour les cas que je viens de développer, des objectifs d'une moindre distance de foyer que je n'ai marqué ; & dans ces cas on n'aura qu'à diminuer toutes les mesures dans la même proportion, excepté les ouvertures de l'objectif, & du troisiéme verre. Or si l'on doubloit le troisiéme verre de la manière que j'ai indiquée dans le §. XV., pour diminuer la confusion, on pourroit bien donner à l'objectif une moindre distance de foyer, & ensuite conformément diminuer les autres mesures. Je dois encore remarquer que dans l'application à la pratique j'ai pris $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 24)}$ au lieu de $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 16)}$, que la position $i = 2$ donne, pour tenir compte de la confusion qui naît des deux verres oculaires, qui fournit à peu-près cet excès, mais on ne sauroit ici rien prescrire de précis, puisque tout dépend de l'adresse de l'Artiste.

XXXIII. Mais si l'Artiste est asses habile pour exécuter les objectifs composés, dont j'ai donné ci-dessus la description (§. XVI.), de sorte que toute confusion puisse être réduite à rien, alors la distance de foyer de l'objectif p se déterminera uniquement par son ouverture, dont le demi-diamètre étant $x = \frac{m}{60}$ pouces, ou même $x = \frac{m}{50}$ pouces, on pourra bien se contenter de prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$. Alors pour que le verre oculaire ne devienne pas trop petit, il sera bon de prendre,

$c = \frac{3}{4}$, ou $\frac{c}{1-c} = 3$, & alors la confuſion du troiſiéme verre contenue dans la formule $\frac{\lambda'' i}{m c^3}$ ne ſera pas trop à craindre, quand même on prendroit ce verre ſimple, & également convexe des deux côtés, ſur tout en ſuppoſant comme auparavant $i = 2$, la conſtruction de l'objectif étant telle, qu'en approchant ou éloignant d'avantage les deux verres dont il eſt compoſé, cette confuſion avec celle des autres puiſſe être anéantie.

XXXIV. Poſant donc $p = \frac{m}{2}$ pouces, $c = \frac{2}{4}$ & $i = 2$, nous aurons les meſures ſuivantes pour la conſtruction de ces Lunettes :

Diſt. de foyer du verre	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{m}{m+2}$	$BQ = \frac{1}{6}$	$BC = 1$
en $C = r = \frac{3}{4}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = \frac{3}{2}$
en $D = s = 1$	$DS = \frac{1}{4}$	$DE = \frac{6}{5}$
en $E = t = \frac{3}{5}$	$ET = \frac{3}{20}$	$EO = \frac{9}{20}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 4\frac{3}{20}$ pouces, le demi-diamètre du champ apparent étant $= \frac{1146}{m}$ minutes.

XXXV. De là il eſt clair que nous pouvons bien donner à $\frac{c}{1-c}$ une valeur plus grande, & poſer $c = \frac{6}{7}$,

&

& alors rien n'empêche qu'on ne prenne $i = 3$ pour augmenter un peu le champ apparent. Or ces positions nous fournissent les mesures suivantes :

Dist. de foyer du verre	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{3m}{2(m+3)}$	$BQ = \frac{3}{16}$	$BC = \frac{3}{2}$
en $C = r = \frac{9}{7}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 6$
en $D = s = 3$	$DS = \frac{3}{4}$	$DE = 3$
en $E = t = \frac{3}{2}$	$ET = \frac{3}{8}$	$EO = \frac{3}{2}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 11\frac{1}{2}$ pouces, & le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1289}{m}$ minutes.

Cette hypothése paroit de beaucoup préférable à la précédente, parceque tous les verres ont ici plus d'un pouce de foyer, & causent par conséquent une d'autant plus petite confusion, & celle du troisiéme pouvant être détruite par la construction de l'objectif enseignée dans le §. XVI.

XXXVI. Au reste je ne dois pas oublier de faire observer un très-grand avantage, que le troisiéme verre procure à cette espèce de Lunettes par la très-petite ouverture, que ce verre admet sans que le champ apparent en soit diminué. Car cette petite ouverture est le moyen le plus propre d'exclure les rayons étrangers, & il est sans doute beaucoup plus efficace que les diphragmes, dont on se sert ordinairement dans cette vue ; car on est obligé de les placer dans les lieux où les images sont représentées, &

partant leurs trous ne sauroient être plus petits que les images mêmes. Or comme le second verre QBQ se trouve précisément dans le lieu de la première image, il tient lieu d'un tel diaphragme, mais son ouverture qui répond au trou du diaphragme, est beaucoup plus grande que celle du troisième verre. Par cette raison il est bon de ne donner à ce verre que la petite ouverture, que je lui viens d'assigner, quoiqu'à d'autres égards une plus grande ne causeroit aucun inconvénient.

Des Lunettes de cette espèce à 6 verres.

XXXVII. Je marquerai les distances de foyer de nos six verres par les lettres p, q, r, s, t & u, & les demi-diamètres de leurs ouvertures :

$AP = x,\ BQ = \pi q,\ CR = \pi' r,\ DS = \pi'' s,\ ET = \pi''' t,\ FU = \pi^{IV} u;$

puisque le diamètre du champ est $\phi = \dfrac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{IV}}{m - 1}$.

le grossissement étant $= m$, posons :

$\pi = \beta\omega,\ \pi' = 0,\ \pi'' = -\omega,\ \pi''' = \omega$ & $\pi^{IV} = -\omega$

pour avoir $\phi = \dfrac{-\beta + 3}{m - 1}\omega$ ou bien $\phi = M\phi$, en posant

$M = \dfrac{3 - \beta}{m - 1}$. Ensuite soit:

$B = -1,\ C = \dfrac{c}{1 - c},\ D = -\dfrac{d}{1 + d},\ E = -1,\ F = \infty$

$\mathrm{B} = \infty,\quad \mathrm{C} = c,\quad \mathrm{D} = -d,\quad \mathrm{E} = \infty,\quad \mathrm{F} = 1$

& posons les formules, qui en sont formées :

$Q = \mathrm{B}\pi - \phi = \infty\pi$

$R = \mathrm{C}\pi' - \pi + \phi = -(\beta - M)\omega$

$S = \mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi = (d + \beta - M)\omega$

$T = \mathrm{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi = \infty$

$U = \mathrm{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \phi = -(3 - \beta + M)\omega$

XXXVIII. Cela posé, les déterminations tant des distances de foyer que des intervalles des verres seront

$q = \frac{B\varphi}{Q} p$ $\qquad AB = p$

$r = B \cdot \frac{C\varphi}{R} p$ $\qquad BC = B\varphi \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{R}\right) p$

$s = BC \cdot \frac{D\varphi}{S} p$ $\qquad CD = BC\varphi \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) p$

$t = BCD \cdot \frac{E\varphi}{T} p$ $\qquad DE = BCD\varphi \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{T}\right) p$

$u = BCDE \cdot \frac{F\varphi}{U} p$ $\qquad EF = BCDE\varphi \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{U}\right) p$

& pour le lieu de l' œil $FO = \frac{1}{mM} u$; mais la destruction des coleurs d' iris exige cette condition:

$$\frac{\pi}{Q} + \frac{\pi'}{R} + \frac{\pi''}{S} + \frac{\pi'''}{T} + \frac{\pi^{IV}}{U} = 0$$

qui se réduit à celle-ci: $-\frac{1}{S} - \frac{1}{U} = 0$ ou $S = -U$ d' où nous tirons $d + \beta - M = 3 - \beta + M$, & $d = 3 - 2(\beta - M)$.

XXXIX. Soit maintenant $\beta = (n + 1) M$, de sorte que $M = \frac{3}{m + n}$, & $\beta - M = nM$. Or posons d' abord $n = \frac{m}{i}$, de sorte que $M = \frac{3i}{m(i+1)}$, $\beta - M = \frac{3}{i + 1}$, $d = \frac{3(i - 1)}{i + 1}$, & $U = -\frac{3i}{i + 1}\omega$, donc $S = \frac{3i}{i + 1}\omega$, & puisque $\beta = \frac{3(m + i)}{m(i + 1)}$, nous aurons:

$\frac{B\varphi}{Q} = \frac{M}{\beta} = \frac{i}{m + i}$, $R = -\frac{3}{i + 1}\omega$, $\frac{\varphi}{R} = -\frac{i}{m}$;

$\frac{\varphi}{S} = \frac{1}{m}$, $\frac{\varphi}{T} = 0$; or $\frac{C\varphi}{T} = \frac{3i}{m(i+1)}$, & $\frac{\varphi}{U} = -\frac{1}{m}$, d'où nous tirons les déterminations suivantes :

$q = \frac{i}{m+i} p$ | $AB = p$

$r = \frac{ci}{m} p$ | $BC = \frac{i}{m} p$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m}$ | $CD = \frac{c}{1-c} (i-1) \frac{p}{m}$

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$ | $DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$ | $EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l'œil $FO = \frac{i+1}{3i} u$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3i}{m(i+1)} \omega$.

XL. Quand on se sert d'un objectif simple, en faisant les rayons des faces $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = 0,60849\,p \\ \text{de derrière} = 4,79820\,p \end{array} \right.$, il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{i}{c^3})}$ pouces. Je m'en vais donc développer les hypothéses suivantes :

1[re] *Hipothése* $i = 2$ & $c = \frac{1}{2}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+20)}$	$AP = \frac{m}{60} p$	$AB = p$
en $B = q = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{1}{2m} p$	$BC = \frac{2}{m} p$
en $C = r = \frac{1}{m} p$	$CR = \frac{1}{30} p$	$CD = \frac{1}{m} p$

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Interval. entre les verres
en $D = s = \frac{1}{m} p$	$DS = \frac{1}{4m} p$	$DE = \frac{1}{2m} p$
en $E = t = \frac{1}{m} p$	$ET = \frac{1}{4m} p$	$EF = \frac{1}{2m} p$
en $F = u = \frac{1}{2m} p$	$FU = \frac{1}{8m} p$	$FG = \frac{1}{4m} p$

donc la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{17}{4m} p$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{1}{2m}$ ou bien $\varphi = \frac{1718}{m}$ minutes.

2de *Hipothèse* $i = 3$ & $c = \frac{2}{3}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Intervalles entre les vêrres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+15)}$	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{9}{16m} p$	$BC = \frac{3}{m} p$
en $C = r = \frac{2}{m} p$	$CR = \frac{1}{20} p$	$CD = \frac{4}{m} p$
en $D = s = \frac{3}{m} p$	$DS = \frac{3}{4m} p$	$DE = \frac{6}{5m} p$
en $E = t = \frac{27}{10m} p$	$ET = \frac{27}{40m} p$	$EF = \frac{6}{5m} p$
en $F = u = \frac{6}{5m} p$	$FU = \frac{3}{10m} p$	$FO = \frac{8}{15m} p$

donc la longueur de toute la Lunette $AO = p + \frac{149}{15m} p$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{9}{16m}$ ou bien $\varphi = \frac{1933}{m}$ minutes.

XLI. Mais quand on veut employer un verre objectif composé, dont j'ai donné la description ci-dessus (16), de sorte qu'on puisse prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, on peut se régler sur l'une des hypothéses suivantes:

1^re *Hipothése* $i = 2$ & $c = \frac{4}{5}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{m}{m+2}$	$BQ = \frac{1}{4}$	$BC = 1$
en $C = r = \frac{4}{5}$	$CR = \frac{1}{30}$	$CD = 2$
en $D = s = 2$	$DS = \frac{1}{2}$	$DE = 1$
en $E = t = 2$	$ET = \frac{1}{2}$	$EF = 1$
en $F = u = 1$	$FU = \frac{1}{4}$	$FO = \frac{1}{2}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 5\frac{1}{2}$ pouces, & le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{1}{2m}$, ou $\phi = \frac{1718}{m}$ minutes.

2^de *Hipothése* $i = 3$ & $c = \frac{5}{6}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouces	$AB = \frac{m}{2}$
en $B = q = \frac{3m}{2(m+3)}$	$BQ = \frac{3}{16}$	$BC = \frac{3}{2}$

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $C = r = \frac{5}{4}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 5$
en $D = s = \frac{15}{4}$	$DS = \frac{15}{16}$	$DE = \frac{3}{2}$
en $E = t = \frac{27}{8}$	$ET = \frac{27}{32}$	$EF = \frac{3}{2}$
en $F = u = \frac{3}{2}$	$FU = \frac{3}{8}$	$FO = \frac{2}{3}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 10\frac{1}{6}$ pouces, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{9}{16m}$ ou $\varphi = \frac{1933}{m}$ minutes. Si ces Lunettes réussissoient, on les pourroit regarder comme les plus parfaites dans leur espèce.

Des Lunettes de cette espèce à 7 verres.

XLII. Les distances de foyer de nos 7 verres étant marquées par les lettres p, q, r, s, t, u, & v, & les demi-diamètres de leurs ouvertures:
$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$, $ET = \pi''' t$, $FU = \pi^{IV} u$, $GV = \pi^{V} v$, puisque le demi-diamètre du champ est $\varphi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{IV} + \pi^{V}}{m - 1}$

posons $\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, $\pi''' = \omega$, $\pi^{IV} = -\omega$, & $\pi^{V} = +\omega$, pour avoir $\varphi = \frac{-\beta + 4}{m - 1}\omega$, ou $\varphi = M\omega$, en posant $M = \frac{4 - \beta}{m - 1}$. Soient ensuite:

$$B = -1,\ C = \frac{c}{1-c},\ D = \frac{-d}{1+c},$$
$$\mathrm{B} = \infty,\quad \mathrm{C} = c,\quad \mathrm{D} = -d,$$
$$E = \frac{-e}{1-e},\ F = \frac{-f}{f-1},\ G = \infty,$$
$$\mathrm{E} = -e,\ \mathrm{F} = f,\quad \mathrm{G} = 1;$$

d' où nous tirons les valeurs suivantes :

$Q = \mathrm{B}\pi - \omega = \mathrm{B}\beta\omega$
$R = \mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\,\omega$
$S = \mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\,\omega$
$T = \mathrm{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = -(e - 1 + \beta - M)\,\omega$
$U = \mathrm{F}\pi^{\mathrm{IV}} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(f + 2 - \beta + M)\,\omega$
$V = \mathrm{G}\pi^{\mathrm{V}} - \pi^{\mathrm{IV}} + \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = (4 - \beta + M)\,\omega$

XLIII. De là la destruction des couleurs donne :

$$-\frac{\omega}{S} + \frac{\omega}{T} - \frac{\omega}{U} + \frac{\omega}{V} = 0$$

pour satisfaire à cette équation, puisque $-T > S$, & $-U > V$, posant $S = V$, & $-T = -U = \zeta V$, ou $\zeta > 1$. Soit pour abreger $\beta = (1 + n)M$, de sorte que $\beta - M = nM$ & $M = \frac{4}{m+n}$, & soit $n = \frac{m}{i}$, pour avoir $M = \frac{4i}{m(i+1)}$, $\beta - M = \frac{4}{i+1}$ & $\beta = \frac{4(m+i)}{m(i+1)}$ de là nous aurons :

$V = \frac{4i}{i+1}$, $S = (d + \frac{4}{i+1})\,\omega = \frac{4i}{i+1}$, donc $d = \frac{4(i-1)}{i+1}$

$-T = (e - 1 + \frac{4}{i+1})\,\omega = \frac{4\zeta i}{i+1}\,\omega$, donc $e = \frac{(4\zeta+1)i-3}{i+1}$

$-U = (f + 2 - \frac{4}{i+1})\,\omega = \frac{4\zeta i}{i+1}\,\omega$, donc $f = \frac{(4\zeta-2)i+2}{i+1}$

Ensuite $R = -\frac{4}{i+1}\,\omega$, & $Q = \frac{\mathrm{B}.4(m+i)}{m(i+1)}$, d'où nous tirons les valeurs suivantes :

$\frac{\varphi}{Q} =$

$\frac{\varphi}{Q} = 0$, $\frac{B\varphi}{Q} = \frac{i}{m+i}$, $\frac{\varphi}{R} = -\frac{i}{m}$, $\frac{\varphi}{S} = \frac{i}{m}$, $\frac{\varphi}{T} = -\frac{1}{\zeta m} = \frac{\varphi}{U}$, & $\frac{\varphi}{V} = \frac{i}{m}$.

XLIV. De là résultent les déterminations suivantes :

$q = \frac{i}{m+i} p$, $\qquad AB = p$,

$r = ci \cdot \frac{p}{m}$, $\qquad BC = i \cdot \frac{p}{m}$,

$s = \frac{c}{1-c} \cdot d \cdot \frac{p}{m}$, $\qquad CD = \frac{c}{1-c} (i-1) \frac{p}{m}$,

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot e \cdot \frac{p}{\zeta m}$, $DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m}$,

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot f \cdot \frac{p}{\zeta m}$,

$$EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{2}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{p}{m}$,

$$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

& pour le lieu de l' œil $GO = \frac{i+1}{4i} v$, le demi-diamètre du champ apparent étant $\varphi = \frac{4i}{m(i+1)} \omega$, où pour les hypothéses $i = 2$ & $i = 3$, il est bon de marquer les valeurs des lettres d, e & f.

1° $i = 2$, $d = \frac{4}{3}$, $e = \frac{8\zeta - 1}{3}$, $f = \frac{8\zeta - 2}{3}$, $\varphi = \frac{8}{3m} \omega$

2° $i = 3$, $d = 2$, $e = 3\zeta$, $f = 3\zeta - 1$, $\varphi = \frac{\zeta}{m} \omega$.

XLV. Soit donc pour la première hypothése $i = 2$ & $\zeta = 2$, de sorte que $e = 5$, & $f = \frac{14}{3}$, & nous aurons les déterminations suivantes:

$$q = \frac{2}{m+2} p, \qquad BQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{m}, \qquad AP = p,$$

$$r = 2c \cdot \frac{p}{m}, \qquad CR = \frac{1}{30} \text{ pouc.}, \qquad BC = 2 \cdot \frac{p}{m};$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{p}{m}, \qquad DS = \frac{1}{4} s, \qquad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{p}{m};$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{p}{m}, \qquad ET = \frac{1}{4} t, \qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{p}{m},$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{p}{m}, \qquad FU = \frac{1}{4} u, \qquad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{p}{m},$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{20}{33} \cdot \frac{p}{m}, \qquad GU = \frac{1}{4} v, \qquad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{33} \cdot \frac{p}{m}.$$

Pour le lieu de l'œil $GO = \frac{3}{8} v$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2}{3m}$, ou bien $\varphi = \frac{2291}{m}$ minutes.

XLVI. L' autre hipothèſe $i = 3$, en prenant $\zeta = \frac{8}{3}$, de ſorte que $e = 8$, & $f = 7$ donne les déterminations ſuivantes :

$$q = \frac{3}{m+3} p, \qquad BQ = \frac{3}{4m} p, \qquad AB = p$$

$$r = c \cdot 3 \cdot \frac{p}{m} \qquad CR = \frac{1}{20}, \qquad BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}, \qquad DS = \frac{1}{4} s, \qquad CD = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}, \qquad ET = \frac{1}{4} t, \qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{m}$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{p}{m}, \qquad FU = \frac{1}{4} u, \qquad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m}$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{56}{81} \cdot \frac{p}{m}, \qquad GV = \frac{1}{4} v, \qquad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{35}{81} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l' œil $GO = \frac{1}{3} v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{56}{243} \cdot \frac{p}{m}$,

& le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3}{4m}\varphi$ ou $= \frac{2578}{m}$ minutes, où il faut au moins prendre $\frac{c}{1-c} = 2$, & $c = \frac{2}{3}$, pour prevenir une trop grande confusion de la part du troisiéme verre, d'où les verres oculaires deviendront passablement grands.

XLVII. Ici on peut encore considérer deux cas, selon qu'on se sert d'un objectif simple ou composé, propre à détruire toute confusion. Dans le premier cas d'un verre objectif ordinaire, il faut prendre pour l'hipothése $i = 2$,

$p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{2}{c^3})}$, & partant:

si l'on pose $c = \frac{1}{2}$ on aura $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 16)}$, ou

si l'on pose $c = \frac{3}{5}$ on aura $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 9)}$.

Dans l'autre hipothése $i = 3$, en prenant $c = \frac{2}{3}$, il faut mettre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 11)}$, & je ne voudroit pas prendre $\frac{c}{1-c}$ plus grand, de pour que les oculaires ne dûssent être trop grands. Or quand on se sert d'un verre objectif composé, de sorte qu'on puisse prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, à cause de $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$, si voudrois poser dans l'une & l'autre hipothése $c = \frac{3}{4}$, afin que le dernier oculaire ait environ un pouce de foyer. D'où il est aisé de tirer des devis pour tous les grossissemens, qu'on souhaitera.

Des Lunettes de cette espèce à 8 verres.

XLVIII. Posant les distances de foyer de nous 8 verres p, q, r, s, t, u, v & w, & les demi-diamètres de leurs ouvertures :
$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$, $ET = \pi''' t$, $FU = \pi^{IV} u$, $GV = \pi^{V} v$, $HW \pi^{VI} w$, puisque le demi-diamètre du champ apparent est $\varphi = \dfrac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{IV} + \pi^{V} - \pi^{VI}}{m - 1}$, supposons
$\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, $\pi''' = \omega$, $\pi^{IV} = -\omega$, $\pi^{V} = \omega$, $\pi^{VI} = -\omega$,
pour avoir $\varphi = \dfrac{-\beta + 5}{m - 1}\,\omega$, ou bien $\varphi = M\omega$, posant $M = \dfrac{5 - \beta}{m - 1}$. Ensuite donnons aux indices des verres les valeurs suivantes :

$$\mathfrak{B} = -1,\ \mathfrak{C} = \frac{c}{1 - c},\ \mathfrak{D} = \frac{-d}{1 + d},$$
$$B = \infty,\ C = c,\ D = -d,$$
$$\mathfrak{E} = \frac{-e}{1 + e},\ \mathfrak{F} = -1,\ \mathfrak{G} = \frac{-g}{g - 1},\ \mathfrak{H} = \infty,$$
$$E = -e,\ F = \infty,\ G = g,\ H = 1,$$

& de là formons les expressions suivantes :
$\mathfrak{Q} = B\pi - \varphi = B\beta\omega$, à cause de $B = \infty$,
$\mathfrak{R} = C\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega$,
$\mathfrak{S} = D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\omega$,
$\mathfrak{T} = E\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = -(e - 1 + \beta - M)\omega$,
$\mathfrak{U} = F\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -F\omega$, à cause de $F = \infty$,
$\mathfrak{V} = G\pi^{V} - \pi^{IV} + \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = +(g + 3 - \beta + M)\omega$,
$\mathfrak{W} = H\pi^{VI} - \pi^{V} + \pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(5 - \beta + M)\omega$.

XLIX. Cela posé la destruction des couleurs fournit cette équation :

$$-\frac{\omega}{S}+\frac{\omega}{T}+\frac{\omega}{V}-\frac{\omega}{W}=0,$$

à la quelle je satisferai en posant $S=-W$ & $-T=V=-\zeta W$. Soit ensuite comme ci-dessus $M=\frac{5i}{m(i+1)}$, $\beta-M=\frac{5}{i+1}$ & $\beta=\frac{5(m+i)}{m(i+1)}$, d' où nous tirons :

$W=-\frac{5i}{i+1}\omega$, $S=(d+\frac{5}{i+1})\omega=\frac{5i}{i+1}\omega$, donc $d=\frac{5(i-1)}{i+1}$

$-T=(e-\frac{i+4}{i+1})\omega=\frac{5\zeta i}{i+1}\omega$, donc $e=\frac{(5\zeta+1)i-4}{i+1}$

$V=(g+\frac{3i-2}{i+1})\omega=\frac{5\zeta i}{i+1}\omega$, donc $g=\frac{(5\zeta-3)i+2}{i+1}$

ensuite $R=-\frac{5}{i+1}\omega$ & $Q=B\cdot\frac{5(m+i)}{m(i+1)}$, & après $\frac{\varphi}{Q}=0$, $\frac{B\varphi}{Q}=\frac{i}{m+i}$, $\frac{\varphi}{R}=-\frac{i}{m}$, $\frac{\varphi}{S}=\frac{1}{m}$, $\frac{\varphi}{T}=-\frac{1}{\zeta m}$, $\frac{\varphi}{U}=0$, or $\frac{F\varphi}{U}=-\frac{5i}{m(i+1)}$, $\frac{\varphi}{V}=\frac{1}{\zeta m}$ & $\frac{\varphi}{W}=-\frac{1}{m}$, d' où nous trouvons les déterminations suivantes :

$q=\frac{1}{m+1}p$, $\qquad AB=p$,

$r=ci\cdot\frac{p}{m}$, $\qquad BC=i\cdot\frac{p}{m}$,

$s=\frac{c}{1-c}\cdot d\cdot\frac{p}{m}$, $\qquad CD=\frac{c}{1-c}(i-1)\cdot\frac{p}{m}$,

$t=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{\zeta}\cdot\frac{p}{m}$, $DE=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{\zeta-1}{\zeta}:\frac{p}{m}$,

$u=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{1+e}\cdot\frac{5i}{i+1}\cdot\frac{p}{m}$,

$$EF=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{1+e}\cdot\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{p}{m},$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{g-1} \cdot \frac{p}{m},$$

$$GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{1-g} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

& pour le lieu de l' œil la diſtance $HO = \frac{i+1}{5i} w$, le demi-diamètre du champ étant $\varphi = \frac{5i}{m(i+1)} \omega$.

L. Conſidérons ici trois hipothéſes, puiſqu'il vaut bien la peine examiner auſſi le cas $i = 4$.

1° Si $i = 2$, on aura $d = \frac{5}{3}$, $e = \frac{10\zeta-2}{3}$,

$$g = \frac{10\zeta-4}{3}, \quad \varphi = \frac{10}{3m} \omega.$$

2° Si $i = 3$, on aura $d = \frac{5}{2}$, $e = \frac{15\zeta-1}{4}$,

$$g = \frac{15\zeta-7}{4}, \quad \varphi = \frac{15}{4m} \omega.$$

3° Si $i = 4$, on aura $d = 3$, $e = 4\zeta$,

$$g = 4\zeta - 2, \quad \varphi = \frac{4}{m} \omega,$$

où la valeur de ζ doit être priſe enſorte, qu'aucune des diſtances entre les verres ne devienne trop petite, & cette condition eſt très-bien remplie en poſant $\zeta = 2$; donc ſi nous mettons enſuite $\omega = \frac{1}{4}$, nous aurons dans nos trois hypothéſes:

1° Si $i = 2$, $d = \frac{5}{3}$, $e = 6$, $g = \frac{16}{3}$,

$$\varphi = \frac{5}{6m}, \text{ ou } \varphi = \frac{2864}{m} \text{ min.}$$

2° Si $i = 3$, $d = \frac{5}{2}$, $e = \frac{29}{4}$, $g = \frac{23}{4}$,

$$\varphi = \frac{15}{16m}, \text{ ou } \varphi = \frac{3222}{m} \text{ min.}$$

3° Si $i = 4$, $d = 3$, $e = 8$, $g = 6$,

$$\varphi = \frac{1}{m}, \text{ ou } \varphi = \frac{3437}{m} \text{ min.}$$

1

1^re *Hipothéſe* $i = 2$ & $\zeta = 2$.

LI. Dans cette hypothéſe ſi l' on ſe ſert d' un objectif ſimple, il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{2}{c^3})}$. Mais ſi l' on eſt pourvu d' un objectif composé, on pourra prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces. Dans l' un & l' autre cas les déterminations ſeront :

$q = \frac{2}{m+2} p$,	$BQ = \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{m}$	$AB = p$
$r = c \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$,	$CR = \frac{1}{30}$ pouc.	$BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$
$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{p}{m}$,	$DS = \frac{1}{4} s$	$CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{p}{m}$
$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{p}{m}$,	$ET = \frac{1}{4} t$	$DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{p}{m}$
$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{25}{14} \cdot \frac{p}{m}$,	$FU = \frac{1}{4} u$	$EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{56} \cdot \frac{p}{m}$
$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{p}{m}$,	$GV = \frac{1}{4} v$	$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{56} \cdot \frac{p}{m}$
$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{60}{91} \cdot \frac{p}{m}$,	$HW = \frac{1}{4} w$	$GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{30}{91} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l'œil $HO = \frac{3}{10} w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{18}{91} \cdot \frac{p}{m}$, le demi-diamètre du champ étant de $\frac{2864}{m}$ minutes.

LII. Quand on se sert d'un objectif composé, il conviendra de prendre $c = \frac{3}{4}$; mais n'en employant qu'un ordinaire, je voudrois prendre $c = \frac{3}{5}$ ou $\frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}$, & on aura les mesures suivantes :

Distances de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+10)}$	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = p$
en $B = q = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = \frac{6}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{r}{30}$	$CD = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$
en $D = s = \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{5}{8} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{15}{32} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{45}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{45}{64} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{45}{112} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{75}{28} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{75}{112} \cdot \frac{p}{m}$	$FG = \frac{45}{112} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = \frac{15}{7} \cdot \frac{p}{m}$	$GV = \frac{15}{28} \cdot \frac{p}{m}$	$GH = \frac{45}{91} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{90}{91} \cdot \frac{p}{m}$	$HW = \frac{45}{182} \cdot \frac{p}{m}$	$HO = \frac{27}{91} \cdot \frac{p}{m}$

qu'on appliquera aisément à chaque cas proposé.

2[de] *Hipothése* $i = 3$ & $\zeta = 2$.

LIII. En se servant d'un objectif simple il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{3}{c^3})}$, pendant que la distance de

foyer

foyer d'un objectif composé, peut être prise $p = \frac{m}{2}$ pouces. En voici les déterminations pour l'un & l'autre cas:

$q = \frac{3}{m+3} p$ $\quad BQ = \frac{15}{16} \cdot \frac{p}{m}, \; AB = p$

$r = c \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$ $\quad CR = \frac{1}{20}$ pouc., $BC = 3 \frac{p}{m}$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad DS = \frac{1}{4} s, \; CD = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{56} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad$ &c. $\quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{p}{m}$

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{725}{308} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{462} \cdot \frac{p}{m}$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{1848} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{462} \cdot \frac{p}{m}$

$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{4389} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{8778} \cdot \frac{p}{m}$

Pour le lieu de l'œil $HO = \frac{4}{15} w$ & $\varphi = \frac{3222}{m}$ minutes.

LIV. Quand on se sert d'un objectif composé, où $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$ pouce, on prendra commodement $c = \frac{3}{4}$, mais en employant un objectif simple, je supposerai $c = \frac{2}{3}$, & on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Demid. des ouvertures	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+12)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3}\, p$	$BQ = \frac{15}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{20}$ pouc.	$CD = 4 \cdot \frac{p}{m}$

Dist. de foyer des verres	Demid. des ouvertures	Interval. entre les verres
en $D = s = 5 \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{5}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{5}{7} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{145}{28} \cdot \frac{p}{m}$	&c.	$EF = \frac{145}{231} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{725}{154} \cdot \frac{p}{m}$		$FG = \frac{145}{237} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = \frac{3335}{924} \cdot \frac{p}{m}$		$GH = \frac{3335}{4389} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{6670}{4389} \cdot \frac{p}{m}$		$HO = \frac{5336}{13167} \cdot \frac{p}{m}$

La seule difficulté qu'on rencontrera dans l'exécution, se trouvera dans la grandeur des verres oculaires, dont l'ouverture peut passer plusieurs pouces dans les grands grossissemens.

3^{me} *Hipothése* $i = 4$ & $\zeta = 2$.

LV. Lorsque l'objectif est simple, il faut prendre sa distance de foyer $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{4}{c^3})}$ pouces, pendant que pour un composé il suffiroit de prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces. Les autres déterminations sont :

$$q = \frac{4}{m+4} p, \qquad BQ = \frac{p}{m} \qquad AB = p$$

$$r = c \cdot 4 \cdot \frac{p}{m}, \qquad CR = \frac{1}{15} \text{ pouc.} \quad BC = 4 \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}, \quad DS = \frac{1}{4} s \qquad CD = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}, \qquad \&c. \qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{m}, \qquad\qquad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$, $FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$

$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{p}{m}$, $GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{p}{m}$

Pour le lieu de l' œil la diſtance $HO = \frac{1}{4} w = \frac{c}{1-c} \times \frac{1}{5} \times \frac{p}{m}$, le demidiamètre du champ apparent étant $\varphi = \frac{1}{m}$, ou $\varphi = \frac{3437}{m}$ minutes.

LVI. Quand on ſe ſert d' un objectif composé, on pourra bien prendre $c = \frac{3}{4}$, ſans que les verres deviennent trop grands, mais pour les objectifs ordinaires il vaudra mieux d' augmenter la diſtance de foyer p, que d'admettre de trop grands oculaires; je poſerai donc $c = \frac{1}{2}$.

Diſt. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{2}{4} m \sqrt[3]{(m+32)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{4}{m+4} p$	$BQ = \frac{p}{m}$	$BC = 4 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{15}$ pouc.	$CD = 3 \cdot \frac{p}{m}$
en $D = s = 3 \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = 3 \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{m}$	$FG = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$GV = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$GH = \frac{2}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{4}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$HW = \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$HO = \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{m}$

Donc la longueur de la Lunette $AO = p + 8 \frac{77}{120} \times \frac{p}{m}$; d'où je tirerai les devis ſuivans pour la pratique.

LVII. Mais j'obſerve avant toutes choſes que dans le cas de huit verre les deux premieres hypothéſes, où $i = 2$ & $i = 3$ ne ſauroient avoir lieu dans la pratique, puiſque le ſecond verre B devroit avoir une ouverture, dont le demi-diamètre ſurpaſsât la quatriéme partie de ſa diſtance de foyer. Ce même inconvénient a bien encore lieu dans la troiſiéme hypothéſe, mais dès que le groſſiſſement eſt conſidérable, la quantité BQ ſurpaſſe ſi peu $\frac{1}{4}q$, que la figure du verre pourroit bien admettre une telle ouverture. Suppoſons que ce verre puiſſe ſouffrir une ouverture dont le demi-diamètre $BQ = \frac{1}{3}q$, & *nous* aurons $\frac{p}{m} = \frac{4}{3(m+4)}p$, donc $m = 12$, ou dès que le groſſiſſement m ſurpaſſe 12, l'exécution ſera poſſible. Il en eſt de même des Lunettes à 7 verres, où l'hypothéſe $i = 2$ ne ſauroit avoir lieu, & poſant $i = 3$, il faut que le groſſiſſement m ſurpaſſe q pour que le demi-diamètre de l'ouverture BQ devienne plus petit que le tiers de la diſtance de foyer q. Or dans le cas de 6 verres l'hypothéſe $i = 2$ n'a lieu que lorſque $m > 6$, mais l'autre $i = 3$ donne toujours $BQ = < \frac{1}{3}q$, & même $BQ < \frac{1}{4}q$, ſi $m > 9$.

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 15 fois.

LVIII. Il faudra bien prendre $p = 40$ pouces, & alors les mesures seront exprimées en pouces.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en *A* = 40, 00	{ 24, 34 / 191, 93	0, 25	*AB* = 40, 00
en *B* = 8, 42	9, 09	2, 67	*BC* = 10, 67
en *C* = 5, 33	5, 76	0, 07	*CD* = 8, 00
en *D* = 8, 00	8, 64	2, 00	*DE* = 1, 00
en *E* = 8, 00	8, 64	2, 00	*EF* = 0, 89
en *F* = 7, 11	7, 68	1, 78	*FG* = 0, 89
en *G* = 5, 33	5, 76	1, 33	*GH* = 1, 07
en *H* = 2, 13	2, 30	0, 53	*HO* = 0, 53

la longueur de toute la Lunette $AO = 63, 05$.
le demi-diamètre du champ apparent $= 3°, 49'$

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 25 fois.

LIX. On prendra $p = 75$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = 3$ pouces, & on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en *A* = 75, 00	{ 45, 64 / 359, 87	0, 42	*AB* = 75, 00
en *B* = 10, 34 $\frac{1}{2}$	11, 17	3, 00	*BC* = 12, 08
en *C* = 6, 00	6, 48	0, 07	*CD* = 9, 00
en *D* = 9, 00	9, 72	2, 25	*DE* = 1, 12 $\frac{1}{2}$
en *E* = 9, 00	9, 72	2, 25	*EF* = 1, 00
en *F* = 8, 00	8, 64	2, 00	*FG* = 1, 00
en *G* = 6, 00	6, 48	1, 50	*GH* = 1, 20
en *H* = 2, 40	2, 59	0, 60	*HO* = 0, 60

la longueur de toute la Lunette $AO = 100, 92 \frac{1}{2}$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2^\circ 17'$.

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 50 fois.

LX. On prendra $p = 166 \frac{2}{3}$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{10}{3}$ pouces, & on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A =$	166, 67	101, 42 / 799, 70	0, 83	$AB = 166, 67$
en $B =$	12, 34	13, 33	3, 33	$BC = 13, 33$
en $C =$	6, 67	7, 20	0, 07	$CD = 10, 00$
en $D =$	10, 00	10, 80	2, 50	$DE = 1, 25$
en $E =$	10, 00	10, 80	2, 50	$EF = 1, 11$
en $F =$	8, 89	9, 60	2, 22	$FG = 1, 11$
en $G =$	6, 67	7, 20	1, 67	$GH = 1, 33$
en $H =$	2, 67	2, 88	0, 67	$HO = 0, 67$

la longueur de toute la Lunette $AO = 195, 47$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1^\circ, 8'$.

LXI. Comme la grandeur des verres pourroit arrêter l'exécution, en cas qu'on veuille se contenter d'un moindre champ qui surpasse pourtant encore le double de celui, qu'offrent les Lunettes ordinaires, les plus commodes de ces sortes de Lunettes semblent celles qui contiennent 6 verres, où posant $i = 3$, je prendrai $c = \frac{1}{2}$ pour éviter de grands verres, ce qui fournit ces déterminations.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+24)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{9}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 3 \frac{p}{m}$
en $C = r = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 2 \frac{p}{m}$
en $D = s = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{27}{20} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{21}{80} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{3}{20} \cdot \frac{p}{m}$	$FO = \frac{4}{15} \cdot \frac{p}{m}$

& le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1933}{m}$ minutes.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 10 fois.

LXII. On prendra ici $p = 25$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{5}{2}$ pouces, & on aura les mesures suivantes.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A =$ 25, 00	{ 15, 11 / 119, 95	0, 17	$AB =$ 25, 00
en $B =$ 5, 77	6, 23	1, 40	$BC =$ 7, 50
en $C =$ 3, 75	4, 05	0, 05	$CD =$ 5, 00
en $D =$ 3, 75	4, 05	0, 94	$DE =$ 1, 50
en $E =$ 3, 37 ½	3, 64 ½	0, 84	$EF =$ 1, 50
en $F =$ 1, 50	1, 62	0, 38	$FO =$ 0, 67

Donc la longueur de toute la Lunette $AO =$ 41, 17 pouces, & le demi-diamètre du champ apparent 3°, 13'.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 15 fois.

LXIII. Je prendrai $p = 40$, d'où $\frac{p}{m} = \frac{8}{3}$, & les mesures seront :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 40, 00$	24, 34 / 191, 93	0, 25	$AB = 40, 00$
en $B = 6, 67$	7, 20	1, 50	$BC = 8, 00$
en $C = 4, 00$	4, 32	0, 05	$CD = 5, 33$
en $D = 4, 00$	4, 32	1, 00	$DE = 1, 60$
en $E = 3, 60$	3, 89	0, 90	$EF = 1, 60$
en $F = 1, 60$	1, 73	0, 40	$FO = 0, 71$

la longueur de toute la Lunette $AO = 57, 24$ pouces, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2^{\circ}, 9$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 20 fois.

LXIV. Je prendrai $p = 55$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{11}{4}$, & les mesures sont :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = 55, 00$	33, 46 / 263, 90	0, 33	$AB = 55, 00$
en $B = 7, 18$	7, 75	1, 55	$BC = 8, 25$
en $C = 4, 12\frac{1}{2}$	4, 45	0, 05	$CD = 5, 50$
en $D = 4, 12\frac{1}{2}$	4, 45	1, 03	$DE = 1, 65$
en $E = 3, 71$	4, 05	0, 93	$EF = 1, 65$
en $F = 1, 65$	1, 78	0, 41	$FO = 0, 73$

la longueur de toute la Lunette $AO = 72, 78$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1^{\circ}, 36'$.

Devis

Devis d'une Lunette à 6 verres qui groſſit 25 fois.

LXV. Je prendrai ici $p = 70$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{14}{5}$, &

Diſt. de foyer des verres	Rayons des faces.	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A = 70, 00	42, 59 335, 87	0, 42	AB = 70, 00
en B = 7, 50	8, 10	1, 57	BC = 8, 40
en C = 4, 20	4, 54	0, 05	CD = 5, 60
en D = 4, 20	4, 54	1, 05	DE = 1, 68
en E = 3, 78	4, 09	0, 95	EF = 1, 68
en F = 1, 68	1, 81	0, 42	FO = 0, 75

la longueur de toute la Lunette AO = 88, 11, & le demi-diametre du champ apparent = 1°, 17′

Devis d'une Lunette à 6 verres qui groſſit 30 fois.

LXVI. Je prendrai ici $p = 90$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = 3$ pouces, & les meſures ſeront

Diſt. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A = 90, 00	54, 77 431, 84	0, 50	AB = 90, 00
en B = 8, 18	8, 84	1, 69	BC = 9, 00
en C = 4, 50	4, 86	0, 05	CD = 6, 00
en D = 4, 50	4, 86	1, 13	DE = 1, 80
en E = 4, 05	4, 37	1, 01	EF = 1, 80
en F = 1, 80	1, 94	0, 45	FO = 0, 80

la longueur de la Lunette AO = 109, 40, & le demi-diametre du champ apparent = 1°, 4′.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 40 fois.

LXVII. Je prendrai ici $p = 120$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = 3$ pouces &c.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en A = 120, 00	{ 73, 02 575, 78	0, 67	AB = 120
en B = 8, 37	9, 04	1, 69	BC = 9, 00
en C = 4, 50	4, 86	0, 05	CD = 6, 00
en D = 4, 50	4, 86	1, 13	DE = 1, 80
en E = 4, 05	4, 37	1, 01	EF = 1, 80
en F = 1, 80	1, 94	0, 45	FO = 0, 80

la longueur de toute la Lunette AO = 139, 40, & le demi-diamètre du champ apparent = 48′.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 50 fois.

LXVIII. Je prendrai ici $p = 160$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{16}{5}$ &c.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en A = 160, 00	{ 97, 36 767, 71	0, 83	AB = 160, 00
en B = 9, 06	9, 79	1, 80	BC = 9, 60
en C = 4, 80	5, 18	0, 05	CD = 6, 40
en D = 4, 80	5, 18	1, 20	DE = 1, 92
en E = 4, 32	4, 66	1, 08	EF = 1, 92
en F = 1, 92	2, 07	0, 48	FO = 0, 85

Donc la longueur de la Lunette AO = 180, 69, & le demi-diamètre du champ apparent = 39′.

LXIX. J'ajouterai encore de semblables devis pour des Lunettes à 7 verres, en évitant les cas, où les verres deviendroieut trop grands. Pour cet effet je supposerai dans les déterminations du §. XLVI. la lettre $c = \frac{1}{2}$, où à cause de $i = 3$, la distance de foyer de l'objectif doit être prise $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 34)}$, & les mesures, pour chaque grossissement $= m$, doivent être tirées des formules suivantes.

en $B = q = \frac{3}{m+3} p$, $BQ = \frac{1}{4m} p$, $AB = p$

en $C = r = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$, $CR = \frac{1}{20}$, $BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$

en $D = s = 2 \cdot \frac{p}{m}$, $DS = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{m}$, $CD = 2 \cdot \frac{p}{m}$

en $E = t = 2 \cdot \frac{p}{m}$, $ET = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{m}$, $DE = \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{m}$

en $F = u = \frac{14}{9} \cdot \frac{p}{m}$, $FU = \frac{7}{18} \cdot \frac{p}{m}$, $EF = \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m}$

en $G = v = \frac{56}{81} \cdot \frac{p}{m}$, $GV = \frac{14}{81} \cdot \frac{p}{m}$, $FG = \frac{35}{81} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l'œil la distance $GO = \frac{56}{243} \cdot \frac{p}{m}$.

Or le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{2578}{m}$ minutes, d'où je déduis les devis suivans.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 10 fois.

LXX. En prenant donc ici $p = 25$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{5}{2}$, on aura les mesures suivantes en pouces:

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A =	25, 00	15, 21 / 119, 95	0, 17	AB = 25, 00
en B =	5, 77	6, 23	1, 87	BC = 7, 50
en C =	3, 75	4, 05	0, 05	CD = 5, 00
en D =	5, 00	5, 40	1, 25	DE = 1, 04
en E =	5, 00	5, 40	1, 25	EF = 1, 11
en F =	3, 89	4, 20	0, 97	FG = 1, 08
en G =	1, 73	1, 87	0, 43	GO = 0, 58

Donc la longueur de toute la Lunette AO = 41, 31, & le demi-diamètre du champ apparent = 4°, 18'.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 15 fois.

LXXI. Je pose pour ce grossissement, comme auparavant $p = 40$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{8}{3}$, & de là on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en A =	40, 00	24, 34 / 191, 93	0, 25	AB = 40, 00
en B =	6, 67	7, 20	2, 00	BC = 8, 00
en C =	4, 00	4, 32	0, 05	CD = 5, 33
en D =	5, 33	5, 76	1, 33	DE = 1, 11
en E =	5, 33	5, 76	1, 33	EF = 1, 18
en F =	4, 15	4, 48	1, 04	FO = 1, 15
en G =	1, 85	2, 00	0, 46	GO = 0, 62

la longueur de toute la Lunette AO = 57, 39, & le demi-diamètre du champ apparent = 2°, 52'.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 20 fois.

LXXII. En prenant ici $p = 55$ pouces, d'où l'on a $\frac{p}{m} = \frac{11}{4}$, on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 55,00$	$\begin{cases} 33,46 \\ 263,90 \end{cases}$	0,33	$AB = 55,00$
en $B = 7,18$	7,75	2,06	$BC = 8,25$
en $C = 4,12\frac{1}{2}$	4,45	0,05	$CD = 5,50$
en $D = 5,50$	5,94	1,38	$DE = 1,15$
en $E = 5,50$	5,94	1,38	$EF = 1,22$
en $F = 4,28$	4,62	1,07	$FG = 1,19$
en $G = 1,90$	2,05	0,48	$GO = 0,63$

la longueur de toute la Lunette $AO = 72,94$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2°, 9'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 25 fois.

LXXIII. En supposant comme auparavant $p = 70$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{14}{5}$, nous aurons les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 70,00$	$\begin{cases} 42,59 \\ 336,87 \end{cases}$	0,42	$AB = 70,00$
en $B = 7,50$	8,10	2,10	$BC = 8,40$
en $C = 4,20$	4,54	0,05	$CD = 5,60$
en $D = 5,60$	6,05	1,40	$DE = 1,17$
en $E = 5,60$	6,05	1,40	$EF = 1,24$
en $F = 4,36$	4,71	1,09	$FO = 1,21$
en $G = 1,94$	2,10	0,49	$GO = 0,65$

la longueur de toute la Lunette AO = 88, 27, & le demi-diamètre du champ apparent 1°, 43′.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 30 fois.

LXXIV. La distance de foyer de l'objectif étant prise p = 90 pouces, de sorte que $\frac{p}{m}$ = 3, on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en A =	90, 00	54, 77 / 431, 84	0,50	AB = 90, 00
en B =	8, 18	8, 84	2, 25	BC = 9, 00
en C =	4, 50	4, 86	0, 05	CD = 6, 00
en D =	6, 00	6, 48	1, 50	DE = 1, 25
en E =	6, 00	6, 48	1, 50	EF = 1, 33
en F =	4, 67	5, 04	1, 17	FO = 1, 29
en G =	2, 07	2, 24	0, 52	GO = 0, 69

la longueur de toute la Lunette AO = 109, 56, & le demi-diamètre du champ apparent = 1°, 26′.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 40 fois.

LXXV. En prenant ici, comme ci-dessus, p = 120 pouces, de sorte que $\frac{p}{m}$ soit = 3, on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A =	120, 00	73, 02 / 575, 78	0, 67	AB = 120, 00
en B =	8, 37	9, 04	2, 25	BC = 9, 00
en C =	4, 50	4, 86	0, 05	CD = 6, 09

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres	
en D =	6, 00	6, 48	1, 50	DE =	1, 25
en E =	6, 00	6, 48	1, 50	EF =	1, 33
en F =	4, 67	5, 04	1, 17	FG =	1, 29
en G =	2, 07	2, 24	0, 52	GO =	0, 69

la longueur de toute la Lunette AO = 139, 56, & le demi-diamètre de l'ouverture = 1°, 5'.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 50 fois.

LXXVI. Je prendrai ici, comme auparavant, $p = 160$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{16}{5}$, & j'en trouve les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres	
en A =	160, 00	97, 36 / 767, 71	0, 83	AB =	160, 00
en B =	9, 06	9, 79	2, 40	BC =	9, 60
en C =	4, 80	5, 18	0, 05	CD =	6, 40
en D =	6, 40	6, 91	1, 60	DE =	1, 33
en E =	6, 40	6, 91	1, 60	EF =	1, 42
en F =	4, 98	3, 38	1, 25	FG =	1, 38
en G =	2, 22	2, 40	0, 56	GO =	0, 67

Donc la longueur de toute la Lunette AO = 180, 80, & le demidiamètre du champ apparent = 51'.

De la construction de ces Lunettes en y employant un verre objectif composé.

LXXVII. De la manière que j'ai ici considéré la confusion, celle qui résulte du troisiéme verre est repré-

ſentée par cette formule $\frac{i}{mc^3}$, laquelle étant indiquée par la lettre M, j'ai fait voir ailleurs que pour détruire cette confuſion auſſi bien que celle de l'objectif, celui-ci doit être compoſé de deux verres l'un convexe, & l'autre concave enſorte qu'il ſoit, poſant p pour la diſtance de foyer de l'objectif entier :

Du premier verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,51467\,p \\ \text{de derrière} = 4,05851\,p \end{cases}$

De l'autre verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = -0,73978\,p + 0,7319\,Mp \\ \text{de derrier} = +1,01897\,p - 1,3885\,Mp \end{cases}$

Cependant il faut ici remarquer, que comme les autres verres produiſent auſſi quelque confuſion, il faut prendre $M > \frac{i}{mc^3}$, & il eſt même bon d'en prendre la valeur un peu trop grande, puiſqu'on eſt en état de redreſſer cette faute, en éloignant les deux verres l'un de l'autre plus que je ne l'ai ſuppoſé dans le calcul, où leur diſtance a été ſuppoſée $= \frac{1}{80}p$.

LXXVIII. Je n'appliquerai ces objectifs qu'au cas de ſix verres, & à l'hypothéſe, où j'ai ſuppoſé $i = 3$ & $c = \frac{5}{6}$; de là j'aurai donc $\frac{i}{mc^3} = 5$, & partant, pour tenir compte des autres verres, je ſuppoſerai $M = \frac{10}{m}$, d'où l'on comprend aiſément que cette hypothéſe ne ſauroit être appliquée qu'aux cas, où le groſſiſſement eſt très-conſidérable, ou $\frac{10}{m}$ une fraction aſsès petite. Donc ſi nous prenons

$p =$

$p = \frac{m}{2}$, la construction de notre objectif composé pour le grossissement $= m$ sera en pouces.

Du premier verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,\ 25734\, m \\ \text{de derrière} = 1,\ 02926\, m \end{cases}$

De l' autre verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = -(0,\ 36989\, m - 3,\ 659) \\ \text{de derrière} = +(0,\ 50948\, m - 6,\ 942) \end{cases}$

ce dernier verre est donc un menisque tournant sa face concave vers le premier verre.

Table pour la construction de ces Lunettes.

Objectif composé

Grossissement	Premier verre, Rayon de sa face d'avant	de derrière	L'autre verre Rayon de sa face de devant	de derrière	Dist. de foyer du 2nd verre	Rayon de ses deux faces	Demid. du champ apparent
m	+	+	—	+	—	+	
30	7, 72	60, 88	7, 44	8, 34	1, 36	1, 47	1°, 4'
40	10, 29	81, 17	11, 14	13, 44	1, 39	1, 50	48'
50	12, 87	101, 46	14, 84	18, 53	1, 42	1, 53	38
60	15, 44	121, 75	18, 53	23, 63	1, 43	[illegible]	32
70	18, 01	142, 05	22, 23	28, 72	1, 44	1, 55	28
80	20, 59	162, 34	25, 93	33, 82	1, 44	1, 55	24
90	23, 16	182, 63	29, 63	38, 91	1, 45	1, 56	21
100	25, 73	202, 93	33, 33	44, 00	1, 45	1, 56	19
125	32, 17	253, 66	42, 58	56, 74	1, 46	1, 57	16
150	38, 60	304, 39	51, 83	69, 48	1, 46	1, 57	13
175	45, 03	355, 12	61, 07	82, 22	1, 47	1, 58	11
200	51, 47	405, 85	70, 32	94, 95	1, 47	1, 58	9
250	64, 34	507, 32	88, 82	120, 43	1, 47	1, 58	$7\frac{1}{2}$
300	77, 20	608, 78	107, 31	145, 90	1, 48	1, 59	6
350	90, 07	710, 24	125, 81	171, 38	1, 48	1, 59	$5\frac{1}{2}$
400	102, 94	811, 70	144, 30	196, 85	1, 48	1, 59	5
450	115, 80	913, 17	162, 80	222, 32	1, 49	1, 60	$4\frac{1}{2}$
500	128, 67	1014, 63	181, 29	247, 80	1, 49	1, 60	4

Le ſecond verre *B*, dont la conſtruction eſt donnée ici, doit toujours être mis dans le foyer de l' objectif, & le demidiamètre de ſon ouverture eſt $\frac{3}{16}$ pouces, & de là juſqu'au troiſiéme verre *C*, la diſtance eſt $BC = 1\frac{1}{2}$ pouce.

Du troiſiéme verre *C* la diſtance de foyer eſt = 1, 25; donc le rayon de ſes deux faces = 1, 35, le demi-diamètre de ſon ouverture = $\frac{1}{20}$ pouce, & la diſtance *CD* = 5.

Du quatriéme verre *D* la diſtance de foyer eſt = 3, 75; donc le rayon de ſes faces = 3, 89, le demi-diamètre de ſon ouverture = 0, 94, & la diſtance *DE* = 1, 5.

Du cinquiéme verre *E* la diſtance de foyer eſt = 3, 37 $\frac{1}{2}$; donc le rayon de ſes faces = 3, 48, le demi-diamètre de ſon ouverture = 0, 84, & la diſtance *EF* = 1, 5.

Du ſixiéme verre *F* la diſtance de foyer eſt = 1, 50; donc le rayon de ſes faces = 1, 62, le demidiamètre de ſon ouverture eſt = 0, 37 $\frac{1}{2}$, & la diſtance de l' œil *FO* = 0, 61.

LXXIX. Mais en cas qu'on ne réuſſiſſe pas ſi heureuſement dans la conſtruction de ces objectis compoſés, qu'on puiſſe prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, il ſera bon de donner des régles plus générales pour les Lunettes, qu'on ſera en état d'en faire. Pour cet effet je poſe $p = nm$, afin qu'on puiſſe prendre pour *n* un nombre tel, que les circonſtances le permettront.

Je commencerai donc par le cas de 5 verres, en regardant la distance de foyer du dernier oculaire comme connue:

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en *A*	$p = nm$ pouces	$AP = x$	$AB = nm$
en *B*	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{in}{2(i+1)}$	$BC = in$
en *C*	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{3i-1}{2} t$
en *D*	$s = \frac{3i-1}{i+1} t$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = 2t$
en *E*	$t = t$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EO = \frac{i+1}{2i} t$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+i) + \frac{(i+1)(3i+1)}{2i} t$, & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{i}{2(i+1)m}$; or $\frac{c}{1.-c} = \frac{3i-1}{2n(i-1)} t$; ce qui donne la valeur de c, & par conséquent celle de r.

Pour le cas de 6 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en *A*	$p = nm$ pouces	$AP = x$	$AB = nm$
en *B*	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{3in}{4(i+1)}$	$BC = in$
en *C*	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{4i-2}{3} u$
en *D*	$s = \frac{4i-2}{i+1} u$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = u$
en *E*	$t = \frac{3i}{i+1} u$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EF = u$
en *F*	$u = u$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FO = \frac{i+1}{3i} u$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+i) + \frac{(i+1)(4i+1)}{3i} u$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3i}{4(i+1)m}$; or pour la distance de foyer r on a $\frac{c}{r-c} = \frac{4i-2}{3n(i-1)}$, d'où l'on doit tirer la valeur de c.

Pour le cas de 7 verres.

Posant comme ci-dessus $\zeta = 2$, nous aurons $\frac{c}{1-c} = \frac{5i-3}{4i-4} \times \frac{10i-2}{9i-3} \times \frac{5i+1}{6i+2} \times \frac{v}{n}$, d'où l'on doit tirer la valeur de c, alors on aura:

Du verre	Distance de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$,
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{in}{i+1}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{5i-3}{4} \cdot \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2}$
en D	$s = \frac{5i-3}{i+1} \cdot \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot \frac{v}{2}$
en E	$t = \frac{10i-2}{i+i} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot \frac{v}{2}$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EF = \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$
en F	$u = \frac{5i+1}{i+1} \cdot \frac{v}{2}$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FG = \frac{1}{2} \cdot v$
en G	$v = v$	$GV = \frac{1}{4} v$	$GO = \frac{i+1}{4i} \cdot v$

où le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{1}{(i+1)m}$; or afin que BQ ne surpasse point $\frac{1}{4} q$, il faut prendre $i > \frac{3m}{m-4}$.

LXXX. Donnons à i des valeurs convenables pour diminuer l'ouverture du second verre, & pour augmenter en même tems le champ apparent, & nous aurons les régles suivantes plus particulières.

Pour le cas de 5 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{3nm}{m+3}$	$BQ = \frac{3n}{8}$	$BC = 3n$
en C	$r = \frac{6nt}{2t+n}$	$CR = \frac{3x}{m}$	$CD = 4t$
en D	$s = 2t$	$DS = \frac{1}{2}t$	$DE = 2t$
en E	$t = t$	$ET = \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{2}{3}t$

Donc la longueur de la Lunette $AO = n(m+3) + \frac{20}{3}t$, & le demidiamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3}{8m}$, ou bien $\varphi = \frac{1289}{m}$ minutes.

Pour le cas de 6 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{5nm}{m+5}$	$BQ = \frac{5n}{8}$	$BC = 5n$
en C	$r = \frac{15nu}{3u+2n}$	$CR = \frac{5x}{m}$	$CD = 6u$

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en D	$s = 3u$	$DS = \frac{3}{4}u$	$DE = u$
en E	$t = \frac{5}{2}u$	$ET = \frac{5}{8}u$	$EF = u$
en F	$u = u$	$FU = \frac{1}{4}u$	$FO = \frac{2}{5}u$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+5) + \frac{42}{5}u$, & le demidiamètre du champ apparent $\varphi = \frac{5}{8m}$ ou bien $\varphi = \frac{2148}{m}$ minutes.

Pour le cas de 7 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{7nm}{m+7}$	$BQ = \frac{7n}{8}$	$BC = 7n$
en C	$r = \frac{476nv}{68v+55n}$	$CR = \frac{7x}{m}$	$CD = \frac{408}{55}v$
en D	$s = \frac{204}{55}v$	$DS = \frac{51}{55}v$	$DE = \frac{51}{110}v$
en E	$t = \frac{153}{44}v$	$ET = \frac{153}{176}v$	$EF = \frac{9}{11}v$
en F	$u = \frac{9}{4}v$	$FU = \frac{9}{16}v$	$FG = \frac{1}{2}v$
en G	$v = v$	$GX = \frac{1}{4}v$	$GO = \frac{2}{7}v$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+7) + \frac{332}{25}v$, & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{7}{8m}$ ou bien $\varphi = \frac{3007}{m}$ minutes.

LXXXI. Si nous traitons de la même manière nos formules pour le cas de 8 verres, en supposant $i = 9$, & introduisant la distance de foyer du dernier oculaire, nous trouvons les formules suivantes, dont la connexion avec les cas précédens est remarquable.

Pour le cas de 8 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{9nm}{m+9}$	$BQ = \frac{9x}{8}$	$BC = 9n$
en C	$r = \frac{9 \cdot 1155mw}{1155w+988n}$	$CR = \frac{9x}{m}$	$CD = \frac{2310}{247}w$
en D	$s = \frac{1155}{247}w$	$DS = \frac{1155}{988}w$	$DE = \frac{231}{494}w$
en E	$t = \frac{231}{52}w$	$ET = \frac{231}{208}w$	$EF = \frac{11}{26}w$
en F	$u = \frac{99}{26}w$	$FU = \frac{99}{104}w$	$FG = \frac{11}{26}w$
en G	$v = \frac{11}{4}w$	$GV = \frac{11}{16}w$	$GH = \frac{1}{2}w$
en H.	$w = w$	$HW = \frac{1}{4}w$	$HO = \frac{2}{9}w$

& le demi-diamètre du champ apparent $\Phi = \frac{9}{8m}$ ou $\Phi = \frac{3867}{m}$ minutes. De là on voit que la longueur de la Lunette croît à mesure qu'on augmente le champ apparent.

AVERTISSEMENT.

Comme le Mémoire précédent suppose celui que l'Auteur a donné dans le XIII. Volume de l'Académie de Berlin, on a cru devoir en extraire les formules principales, pour les mettre ici sous les yeux de nos Lecteurs.

FORMULES DE DIOPTRIQUE NÉCESSAIRES POUR L'INTELLIGENCE DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

SOIENT (*fig.* * *plan.* 3) autant de lentilles qu'on voudra PP, QQ, RR &c. rangées sur le même axe ao, de manière qu'elles forment une Lunette quelconque. Imaginons que $a\alpha$ soit un objet donné, & que $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, $e\varepsilon$ &c. soient les différentes images de cet objet formées par les lentilles PP, QQ, RR &c., de sorte que les points de l'axe b, c, d &c. soient les foyers des rayons qui partent du point a, & les points β, γ, δ &c., (qui se déterminent en tirant les perpendiculaires $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ &c., & menant ensuite les droites $\alpha A\beta$, $\beta B\gamma$, $\gamma C\delta$ &c.) soient les foyers des rayons qui partent du point α placé hors de l'axe. On voit aisément que le rayon αA, qui passe par le centre de la lentille PP, & qui doit être regardé comme le principal de tous ceux qui partent du point α, ira rencontrer la lentille QQ en Q, que de là il passera par γ, & rencontrera la lentille RR en R, ensuite la lentille SS en S &c., & enfin la lentille XX en X, d'où il sortira parallélement au rayon ηG, à cause que tous

tous les rayons doivent ſe trouver parallèles entr'eux au ſortir de la dernière lentille.

Soit maintenant O le point où le rayon XO coupera l'axe, ce point ſera celui où il faudra placer l'œil pour voir le point α, c'eſt-à-dire pour pouvoir découvrir un champ apparent égal à l'angle $\alpha A a$; l'angle $XOG = \eta G g$, comparé à l'angle $\alpha A a$, déterminera le groſſiſſement de la Lunette; & les parties BQ, CR, DS &c. des lentilles ſeront les ouvertures qu'il faudra leur donner pour pouvoir joüir de tout le champ $aA\alpha$.

Cela poſé ſoit: $aA\alpha = \varphi$, $aA = \infty$, $GO = k$; enſuite $\frac{Bc}{bB} = B$, $\frac{Cd}{cC} = C$, $\frac{De}{dD} = D$, $\frac{Ef}{eE} = E$ &c.

Soient de plus p, q, r, s &c. les diſtances focales des lentilles PP, QQ, RR, SS &c., & πq, $\pi' r$, $\pi'' s$ &c. les demi-diamètres BQ, CR, DS &c. des ouvertures des verres QQ, RR, SS &c. en tant qu'elles contribuent au champ apparent, on aura, en faiſant pour abreger

$$\mathrm{B} = \frac{B}{B+1},\ \mathrm{C} = \frac{C}{C+1},\ \mathrm{D} = \frac{D}{D+1}\ \text{\&c.}$$

Diſtances focales

$$q = \frac{\mathrm{B}\varphi}{\mathrm{B}\pi - \varphi}\, p$$

$$r = \frac{B\,\mathrm{C}\varphi}{\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi}\, p$$

$$s = \frac{B\,C\,\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi}\, p$$

&c.

Intervalles entre les verres

$$AB = \frac{\mathrm{B}\pi}{\mathrm{B}\pi - \varphi}\, p$$

$$BC = \frac{(B\,\mathrm{C}\pi' - \mathrm{B}\pi)\varphi}{(\mathrm{B}\pi - \varphi)(\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi)}\, p$$

$$CD = \frac{B(C\,\mathrm{D}\pi'' - \mathrm{C}\pi')\varphi}{(\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi)(\mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi)}\, p$$

&c.

Diſtances de l' œil

Pour un ſcul verre $k = 0$

Pour 2 verres $k = \frac{\varphi\pi}{(B\pi - \varphi)} p$

Pour 3 verres $k = \frac{B\varphi\pi'}{(C\pi' - \pi + \varphi)^2} p$

Pour 4 verres $k = \frac{BC\varphi\pi''}{(D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi)^2} p$

&c.

Enfin ſoit m le nombre qui exprime la multiplication des diamètres apparens des objets, on aura l' équation

$$\pm m = \overline{\varphi - \pi + \pi' - \pi'' + \&c.}$$

le ſigne + eſt pour le cas, où les objets ſont repréſentés debout, & le ſigne — pour le cas oppoſé, de ſorte que l' on aura :

pour le premier cas . . . $\varphi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' \&c.}{m - 1}$

& pour le ſecond cas . . . $\varphi = \frac{+\pi - \pi' + \pi'' \&c.}{m + 1}$

Pour ce qui eſt de l' aberration des lentilles, on trouve;

1° Que celle qui vient de la diverſe refrangibilité des rayons ſera anéantie en ſatisfaiſant à cette équation

$$0 = \frac{\pi}{B\pi - \varphi} + \frac{\pi'}{C\pi' - \pi + \varphi} + \frac{\pi''}{D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi} + \&c.$$

2° Que l' autre aberration, celle qui vient de la figure ſphérique des verres, eſt exprimée pour chaque lentille par la formule ſuivante :

$$\frac{\mu x^3}{p} (\lambda (A + 1)^2 + \nu A)$$

x étant le demidiamètre de l' ouverture, A le raport de la diſtance entre le point rayonnant & la lentille, à la diſtance entre le foyer des rayons rompus & la même

lentille, μ, ν des nombres dépendans du raport de refraction dans le verre, & λ un nombre $=$ ou $>$ 1.

3° Que l'aberration étant donnée, la figure de la lentille doit être telle que l'on ait :

Rayon de la surface tournée vers le point lumineux $\left\{ \dfrac{p}{\rho A + \sigma(1-A) \pm \tau \sqrt{(\lambda - 1)}} \right.$

Rayon de la surface opposée $\left\{ \dfrac{p}{\sigma A + \rho(1-A) \mp \tau \sqrt{(\lambda - 1)}} \right.$

où p est la distance focale, A est $= \dfrac{A}{A+1}$, & ρ, σ, τ sont des nombres, qui dépendent de la raison de refraction; d'où l'on voit qu'il y a toujours deux figures à donner à une lentille, pour qu'elle produise une aberration donnée, excepté dans le cas où $\lambda = 1$, qui est celui où l'aberration est la moindre; on voit de plus que le nombre λ ne peut être pris moindre que l'unité, sans que les rayons des faces deviennent imaginaires.

4° Que l'aberration qui résulte de toutes les lentilles ensemble est exprimée par

$$\frac{\mu m x^3}{4p} \times \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \dfrac{(B+1)^2 (\lambda'(B+1) + \nu B)\varphi}{B^3 (B\pi - \varphi)} \\ + \dfrac{(C+1)^2 (\lambda''(C+1) + \nu C)\varphi}{B^3 C^3 (C\pi - \pi + \varphi)} \\ + \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

λ, λ', λ'' &c. étant les valeurs de λ qui conviennent aux lentilles *PP*, *QQ*, *RR* &c.

5° Qu'enfin cette aberration ne doit pas s'étendre au delà de la fraction $\dfrac{\mu}{4 \cdot 30^3}$.

OBSERVATIONES

Circa integralia formularum

$\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$

Posito post integrationem $x=1$

Auctore

L. EULERO.

I. FORMULAM integralem $\int x^{p-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$, seu hoc modo expressam $\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, hic consideraturus, assumo exponentes n, p, & q esse numeros integros positivos, quandoquidem si tales non essent, facile ad hanc formam perduci possent. Deinde hujus formulæ integrale non in genere hic perpendere constitui, sed ejus tantum valorem, quem recipit, si post integrationem statuatur $x=1$, postquam scilicet integratio ita fuerit instituta, ut integrale evanescat posito $x=0$. Primum enim nullum est dubium, quin, hoc casu $x=1$, integrale multo simplicius exprimatur; ac præterea quoties in analysi ad hujusmodi formulas pervenitur, plerumque non tam integrale indefinitum, pro quocunque valore ipsius x, quam definitum valori $x=1$, utpote præcipuo desiderari solet.

II. Constat autem casu, quo post integrationem ponitur $x=1$, integrale $\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, hoc modo per productum infinitorum factorum exprimi, ut sit:

$$\frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)}\cdot\frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)}\cdot\frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)}\cdot\ \&c.$$

cujus quidem primus factor $\frac{p+q}{pq}$ non legi sequentium adstringitur. Hoc tamen non obstante perspicuum est exponentes p & q inter se esse commutabiles, ita ut sit:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

quæ quidem æqualitas etiam facile per se ostenditur. Verum productum istud infinitum nos ad alia multo majora perducet, quibus hæc integralia magis illustrabuntur.

III. Ut autem brevitati in scribendo consulam, neque opus habeam scripturam hujus formulæ $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ toties repetere, pro quovis exponente n ejus loco scribam $\left(\frac{p}{q}\right)$, ita ut $\left(\frac{p}{q}\right)$ denotet valorem formulæ integralis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, casu quo post integrationem ponitur $x = 1$. Et quoniam vidimus esse hoc casu:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

manifestum est fore $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, ita ut pro quovis valore exponentis n, hæ expressiones $\left(\frac{p}{q}\right)$ & $\left(\frac{q}{p}\right)$ eandem significent quantitatem. Ita si fuerit exempli gratia $n = 4$, erit:

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

Per productum autem infinitum habebitur.

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{2.3} \cdot \frac{4.9}{6.7} \cdot \frac{8.13}{10.11} \cdot \frac{12.17}{14.15} \cdot \&c.$$

IV. Jam primum observo, si exponentes p & q fuerint majores exponente n, formulam integralem semper ad aliam

reduci posse, in qua hi exponentes infra n deprimantur. Cum enim sit:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{p-n}{p+q-n}\int \frac{x^{p-n-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

erit, recepto hic scribendi more:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}\left(\frac{p-n}{q}\right)$$

quo si fuerit $p > n$, formula ad aliam, in qua exponens p minor sit quam n revocatur, quod etiam ob commutabilitatem de altero exponente q est tenendum. Quamobrem nobis has formulas examinaturis sufficiet pro quovis exponente n exponentes p & q ipso n minores accipere, quoniam his expeditis, omnes casus quibus majores habituri essent valores, eo reduci possunt.

V. Statim autem patet casus, quibus est vel $p = n$, vel $q = n$, absolute seu algebraice esse integrabiles. Si enim fuerit $q = n$, ob $\left(\frac{p}{n}\right) = \int x^{p-1}dx = \frac{x^p}{p}$, posito $x = 1$, erit $\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p}$; similique modo $\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{q}$. Atque hi soli sunt casus, quibus integrale nostræ formulæ absolute exhiberi potest, si quidem p & q exponentem n non excedant. Reliquis casibus omnibus integratio vel quadraturam circuli, vel adeo altiores quadraturas implicabit; quas hic accuratius perpendere animus est. Post eas igitur formulas $\left(\frac{p}{n}\right)$, seu $\left(\frac{n}{p}\right)$, quarum valor absolute est $= \frac{1}{p}$, veniunt eæ, quarum valor per solam circuli quadraturam exprimitur; tum vero sequentur eæ, quæ altiorem quandam quadraturam postulant, atque has altiores quadraturas tam ad simplicissimam formam, quam ad minimum numerum revocare conabor.

VI. Cum numeri p & q exponente n minores ponantur, eæ formulæ $\left(\frac{p}{q}\right)$ per ſolam circuli quadraturam integrabiles exiſtunt, in quibus eſt $p + q = n$. Sit enim $q = n - p$, & formula noſtra:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}}$$

hoc producto infinito exprimetur:

$$\frac{n}{p(n-p)} \cdot \frac{n \cdot 2n}{(n+p)(2n-p)} \cdot \frac{2n \cdot 3n}{(2n+p)(3n-p)} \cdot \frac{3n \cdot 4n}{(3n+p)(4n-p)} \text{ \&c.}$$

quod hoc modo repræſentatum:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{nn}{nn-pp} \cdot \frac{4nn}{4nn-pp} \cdot \frac{9nn}{9nn-pp} \text{ \&c.}$$

congruit cum eo producto, quo *ſinus* angulorum expreſſi: Quare ſi π ſumatur ad ſemicirconferentiam circuli cujus radius ſit $= 1$, ſimulque menſuram duorum angulorum rectorum exhibeat, erit:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \frac{\pi}{n \operatorname{ſin.} \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \operatorname{ſin.} \frac{q\pi}{n}}.$$

VII. Ceteris caſibus, quibus neque $p = n$, neque $q = n$, neque $p + q = n$, integrale etiam neque abſolute, neque per quadraturam circuli exhiberi poteſt, ſed aliam quandam altiorem quadraturam complectitur. Neque vero ſinguli caſus diverſi peculiarem hujuſmodi quadraturam exigunt, ſed plures dantur reductiones, quibus diverſas formulas inter ſe comparare licet. Hæ autem reductiones derivantur ex producto infinito ſupra exhibito cum enim ſit:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \text{ \&c.}$$

erit ſimili modo:

$$\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{p+q+r}{(p+q)r} \cdot \frac{n(p+q+r+n)}{(p+n+n)(r+n)} \cdot \frac{2n(p+q+r+2n)}{(p+q+2n)(r+2n)} \text{ \&c.}$$

quibus in ſe invicem ductis obtinetur:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\frac{p+q+r}{pqr}\cdot\frac{nn(p+q+r+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)}\cdot\frac{4nn(p+q+r+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)}\ \&c.$$

ubi ternæ quantitates p, q, r ſunt inter ſe permutabiles.

VIII. Hinc ergo permutandis his quantitatibus p, q, r conſequimur ſequentes reductiones.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right).$$

unde ex datis aliquot formulis plures aliæ determinari poſſunt. Veluti ſi ſit $q+r=n$, ſeu $r=n-q$, ob $\left(\frac{q+r}{p}\right)=\frac{1}{p}$ & $\left(\frac{q}{r}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}}$ erit: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{n-q}\right)$

$=\frac{\pi}{np\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}}$, nec non $\left(\frac{p}{n-q}\right)\left(\frac{n+p-q}{q}\right)=\frac{\pi}{np\,\text{ſin.}\frac{q\pi}{n}}$

Deinde ſi ſit $p+q+r=n$, ſeu $r=n-p-q$, erit:

$$\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{r\pi}{n}}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}}\left(\frac{p}{r}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{p\pi}{n}}\left(\frac{q}{r}\right)$$

unde inſignes reductiones aliarum ad alias oriuntur, quibus multitudo quadraturarum ad noſtrum ſcopum neceſſariarum vehementer diminuitur.

IX. Præterea vero pro p, q, r numeris determinatis aſſumendis, ſequentes adipiſcimur productorum ex binis formulis æqualitates:

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{3}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{1}\right)$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$$
$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$$
$$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$
$$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$
$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$
&c.

ubi quidem plures occurrunt, quæ jam in reliquis continentur.

X. His quasi principiis præmissis formulam generalem $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, in qua numeros p & q exponentem n non superare assumo, in classes ex exponente n petitas distinguam, ita ut valores $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ &c. classes primam, secundam, tertiam &c. sint præbituri.

Ac prima quidem classis, qua $n = 1$, unicam formulam complectitur $\left(\frac{1}{1}\right)$, cujus valor est $= 1$. Secunda classis, qua $n = 2$, has formulas $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{2}{1}\right)$ & $\left(\frac{2}{2}\right)$ continet, quarum evolutio per se est manifesta. Tertia classis, qua $n = 3$ has habet:

$$\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{2}{1}\right),\ \left(\frac{3}{1}\right),\ \left(\frac{2}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{3}{3}\right).$$

Quarta vero classis, qua $n = 4$, istas:

$$\left(\frac{1}{1}\right),\left(\frac{2}{1}\right),\left(\frac{3}{1}\right),\left(\frac{4}{1}\right),\left(\frac{2}{2}\right),\left(\frac{3}{2}\right),\left(\frac{4}{2}\right),\left(\frac{3}{3}\right),\left(\frac{4}{3}\right),\left(\frac{4}{4}\right);$$

sicque in sequentibus classibus formularum numerus secun-

dum numeros trigonales crescit. Has igitur classes ordine percurramus.

$$\textit{Classis } 2^{dae} \textit{ formae } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[2]{(1-x^2)^{2-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Perspicuum hic quidem est istas formulas vel absolute, vel per quadraturam circuli exprimi: nam hæ $\left(\frac{2}{1}\right)$ & $\left(\frac{2}{2}\right)$ absolute dantur, & reliqua $\left(\frac{1}{1}\right)$ ob $1 + 1 = 2$ est $\frac{\pi}{2 \sin. \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$; si ergo brevitatis causa ponamus $\frac{\pi}{2} = \alpha$, uti scilicet in sequentibus classibus faciemus, omnes formulæ hujus classis ita definiuntur:

$$\left(\frac{2}{1}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \alpha.$$

$$\textit{Classis } 3^{a} \textit{ formae } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Cum hic sit $n = 3$, formula quadraturam circuli involvens est $\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\pi}{3 \sin. \frac{\pi}{3}}$, ponamus ergo $\left(\frac{2}{1}\right) = \alpha$ reliquæ autem formulæ, quæ non absolute dantur, altiorem quadraturam involvunt, & quidem unicam $\left(\frac{1}{1}\right)$, quam littera A indicemus, qua concessa valores omnium formularum hujus classis assignari poterimus:

$(\frac{3}{1}) = 1, \ (\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}, \ (\frac{3}{3}) = \frac{1}{3}$

$(\frac{2}{1}) = \alpha, \ (\frac{2}{2}) = \frac{\alpha}{A}$

$(\frac{1}{1}) = A.$

Classis 4^{ta} *formæ* $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} = (\frac{p}{q})$

Cum hic ſit $n = 4$, duas habemus formulas a quadratura circuli pendentes, quarum valores, quia ſunt cogniti, ita indicemus

$$(\frac{3}{1}) = \frac{\pi}{4 \text{ ſin. } \frac{\pi}{4}} = \alpha \ \ \& \ \ (\frac{2}{2}) = \frac{\pi}{4 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{4}} = \beta.$$

Præterea vero unica opus eſt formula altiorem quadraturam involvente, qua conceſſa reliquas omnes cognoſcemus. Ponamus enim $(\frac{2}{1}) = A$, & omnes formulæ hujus claſſis ita determinabuntur:

$(\frac{4}{1}) = 1, (\frac{4}{2}) = \frac{1}{2}, (\frac{4}{3}) = \frac{1}{3}, (\frac{4}{4}) = \frac{1}{4}$

$(\frac{3}{1}) = \alpha, \ (\frac{3}{2}) = \frac{\beta}{A}, (\frac{3}{3}) = \frac{\alpha}{2A}$

$(\frac{2}{1}) = A, (\frac{2}{2}) = \beta$

$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}.$

$$\textit{Classis } 5^{tae} \textit{ formae } \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Cum hic sit $n = 5$, notemus statim formulas a quadratura circuli pendentes:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{\pi}{5}} = \alpha, \quad \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{2\pi}{5}} = \beta$$

Duabus autem insuper novis quadraturis opus est huic classi peculiaribus, quas ita designemus:

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A, \text{ \& } \left(\frac{2}{2}\right) = B$$

ex quibus reliquae omnes ita definientur:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = 1, \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}, \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \alpha, \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta}{2B}, \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\alpha}{3A},$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A, \left(\frac{3}{2}\right) = \beta, \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\beta\beta}{\alpha B},$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = B,$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

$$\textit{Classis } 6^{tae} \textit{ formae } \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Hic est $n = 6$, & formulae quadraturam circuli involventes sunt:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{\pi}{6 \sin. \frac{\pi}{6}} = \alpha, \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\pi}{6 \sin. \frac{2\pi}{6}} = \beta, \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{6 \sin. \frac{3\pi}{6}} = \gamma.$$

Reliquarum vero omnium valores insuper a binis hisce quadraturis pendent:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = A \;\&\; \left(\frac{3}{2}\right) = B,$$

atque ita ſe habere deprehenduntur:

$(\frac{6}{1}) = 1,\ (\frac{6}{2}) = \frac{1}{2},\ (\frac{6}{3}) = \frac{1}{3},\ (\frac{6}{4}) = \frac{1}{4},\ (\frac{6}{5}) = \frac{1}{5},\ (\frac{6}{6}) = \frac{1}{6}$

$(\frac{5}{1}) = \alpha,\ (\frac{5}{2}) = \frac{\beta}{A},\ (\frac{5}{3}) = \frac{\gamma}{2B},\ (\frac{5}{4}) = \frac{\beta}{3B},\ (\frac{5}{5}) = \frac{\alpha}{4A},$

$(\frac{4}{1}) = A,\ (\frac{4}{2}) = \beta,\ (\frac{4}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ (\frac{4}{4}) = \frac{\beta\gamma A}{2\alpha BB},$

$(\frac{3}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta},\ (\frac{3}{2}) = B,\ (\frac{3}{3}) = \gamma,$

$(\frac{2}{1}) = \frac{\alpha B}{\gamma},\ (\frac{2}{2}) = \frac{\alpha BB}{\gamma A},$

$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}.$

Claſſis $7^{mæ}$ *formæ* $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[7]{(1-x^7)^{7-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right).$

Quia $n = 7$, formulæ a quadratura circuli pendentes ita deſignentur:

$$\left(\frac{6}{1}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{\pi}{7}} = \alpha,\ \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{7}} = \beta,\ \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{7}} = \gamma$$

præterea vero hæ quadraturæ introducantur:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = A,\ \left(\frac{4}{2}\right) = B,\ \left(\frac{3}{3}\right) = C$$

quibus datis omnes formulæ ita determinabuntur:

$(\frac{7}{1}) = 1,\ (\frac{7}{2}) = \frac{1}{2},\ (\frac{7}{3}) = \frac{1}{3},\ (\frac{7}{4}) = \frac{1}{4},\ (\frac{7}{5}) = \frac{1}{5},\ (\frac{7}{6}) = \frac{1}{6},\ (\frac{7}{7}) = \frac{1}{7},$

$(\frac{6}{1}) = \alpha,\ (\frac{6}{2}) = \frac{\beta}{A},\ (\frac{6}{3}) = \frac{\gamma}{2B},\ (\frac{6}{4}) = \frac{\gamma}{3C},\ (\frac{6}{5}) = \frac{\beta}{4B},\ (\frac{6}{6}) = \frac{\alpha}{5A},$

$(\frac{5}{1}) = A,\ (\frac{5}{2}) = \beta,\ (\frac{5}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ (\frac{5}{4}) = \frac{\gamma\gamma A}{2\alpha BC},\ (\frac{5}{5}) = \frac{\beta\gamma A}{3\alpha BC},$

$(\frac{4}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta}, (\frac{4}{2}) = B, (\frac{4}{3}) = \gamma, (\frac{4}{4}) = \frac{\gamma\gamma}{\alpha C};$

$(\frac{3}{1}) = \frac{\alpha C}{\gamma}, (\frac{3}{2}) = \frac{\alpha BC}{\gamma A}, (\frac{3}{3}) = C;$

$(\frac{2}{1}) = \frac{\alpha B}{\gamma}, (\frac{2}{2}) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\gamma A};$

$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}.$

Classis 8^{va} *formæ* $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[8]{(1-x^8)^{8-q}}} = (\frac{p}{q})$

Quia hic eſt $n = 8$, formulæ quadraturam circuli implicantes erunt:

$$(\frac{7}{1}) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{\pi}{8}} = \alpha, (\frac{6}{2}) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{8}} = \beta,$$

$$(\frac{5}{3}) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{8}} = \gamma, (\frac{4}{4}) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{4\pi}{8}} = \delta$$

Nunc vero tres ſequentes formulæ tanquam cognitæ ſpectentur:

$$(\frac{6}{1}) = A, (\frac{5}{2}) = B, \& (\frac{4}{3}) = C$$

atque ex his omnes formulæ hujus claſſis ita determinabuntur.

$(\frac{8}{1}) = 1, (\frac{8}{2}) = \frac{1}{2}, (\frac{8}{3}) = \frac{1}{3}, (\frac{8}{4}) = \frac{1}{4}, (\frac{8}{5}) = \frac{1}{5},$

$(\frac{8}{6}) = \frac{1}{6}, (\frac{8}{7}) = \frac{1}{7}, (\frac{8}{8}) = \frac{1}{8};$

$(\frac{7}{1}) = \alpha, (\frac{7}{2}) = \frac{\beta}{A}, (\frac{7}{3}) = \frac{\gamma}{2B}, (\frac{7}{4}) = \frac{\delta}{3C}, (\frac{7}{5}) = \frac{\gamma}{4C},$

$(\frac{7}{6}) = \frac{\beta}{5B}, (\frac{7}{7}) = \frac{\alpha}{6A};$

$$\left(\frac{6}{1}\right)=A,\ \left(\frac{6}{2}\right)=\beta,\ \left(\frac{6}{3}\right)=\frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ \left(\frac{6}{4}\right)=\frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC},\ \left(\frac{6}{5}\right)=\frac{\gamma\delta A}{3\alpha CC},$$

$$\left(\frac{6}{6}\right)=\frac{\beta\gamma A}{4\alpha BC};$$

$$\left(\frac{5}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\beta},\ \left(\frac{5}{2}\right)=B,\ \left(\frac{5}{3}\right)=\gamma,\ \left(\frac{5}{4}\right)=\frac{\gamma\delta}{\alpha C},\ \left(\frac{5}{5}\right)=\frac{\gamma\gamma\delta A}{2\alpha\beta CC};$$

$$\left(\frac{4}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\beta},\ \left(\frac{4}{2}\right)=\frac{\alpha BC}{\gamma A},\ \left(\frac{4}{3}\right)=C,\ \left(\frac{4}{4}\right)=\delta;$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\delta},\ \left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\alpha\beta CC}{\gamma\delta A},\ \left(\frac{3}{3}\right)=\frac{\alpha CC}{\delta A};$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\gamma},\ \left(\frac{2}{2}\right)=\frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A};$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta};$$

Hinc iſtas reductiones ad ſequentes claſſes, quouſque libuerit, continuare licet. Quemadmodum ergo hinc in genere ſingularum formularum integralia ſe ſint habitura exponamus.

Evolutio formæ generalis $\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\left(\frac{p}{q}\right)$

Primo ergo abſolute integrabiles ſunt hæ formulæ:

$$\left(\frac{n}{1}\right)=1,\ \left(\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2},\ \left(\frac{n}{3}\right)=\frac{1}{3},\ \left(\frac{n}{4}\right)=\frac{1}{4},\ \&c.$$

deinde formulæ a quadratura circuli pendentes ſunt:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha,\ \left(\frac{n-2}{2}\right)=\beta,\ \left(\frac{n-3}{3}\right)=\gamma,\ \left(\frac{n-4}{4}\right)=\delta\ \&c.$$

quarum quantitatum progreſſio tandem in ſe revertitur cum ſit etiam:

$$\left(\frac{4}{n-4}\right)=\delta,\ \left(\frac{3}{n-3}\right)=\gamma,\ \left(\frac{2}{n-2}\right)=\beta,\ \left(\frac{1}{n-1}\right)=\alpha.$$

Præterea vero altiores quadraturæ in ſubſidium vocari debent, quæ ita repræſententur:

$$\left(\frac{n-2}{1}\right)=A,\ \left(\frac{n-3}{2}\right)=B,\ \left(\frac{n-4}{3}\right)=C,\ \left(\frac{n-5}{4}\right)=D \text{ \&c.}$$

quarum numerum quovis caſu ſponte determinatur, quia hæ formulæ tandem in ſe revertuntur.

His autem formulis admiſſis omnes omnino ad eandem claſſem pertinentes definiri poterunt. Habebimus autem a formula $\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha$, uti ſupra iſtas formulas ordinavimus, deorſum deſcendendo:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha,\ \left(\frac{n-2}{1}\right)=A,\ \left(\frac{n-3}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\beta},\ \left(\frac{n-4}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\gamma},$$
$$\left(\frac{n-5}{1}\right)=\frac{\alpha D}{\delta},\ \left(\frac{n-6}{1}\right)=\frac{\alpha E}{\varepsilon} \text{ \&c.}$$

qui valores retro ſumti ita ſe habent:

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta},\ \left(\frac{2}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\gamma},\ \left(\frac{3}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\delta},\ \text{\&c.}$$

Tum vero ab eadem formula $\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha$ horizontaliter progrediendo definiuntur iſtæ formulæ:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha,\ \left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{\beta}{A},\ \left(\frac{n-1}{3}\right)=\frac{\gamma}{2B},\ \left(\frac{n-1}{4}\right)=\frac{\delta}{3C} \text{ \&c.}$$

quarum ultima erit $\left(\frac{n-1}{n-1}\right)=\frac{\alpha}{(n-2)A}$, penultima $\left(\frac{n-1}{n-2}\right)=\frac{\beta}{(n-3)B}$, antepenultima $\left(\frac{n-1}{n-3}\right)=\frac{\gamma}{(n-4)C}$ &c.

Simili modo a formula $\left(\frac{n-2}{2}\right)=\beta$ tam deſcendendo, quam progrediendo horizontaliter valores aliarum impetrabimus, ac deſcendendo quidem:

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)=\beta,\ \left(\frac{n-3}{2}\right)=B,\ \left(\frac{n-4}{2}\right)=\frac{\alpha BC}{\gamma A},\ \left(\frac{n-5}{2}\right)=\frac{\alpha\beta CD}{\gamma\delta A},$$
$$\left(\frac{n-6}{2}\right)=\frac{\alpha\beta DE}{\delta\varepsilon A},\ \left(\frac{n-7}{2}\right)=\frac{\alpha\beta EF}{\varepsilon\zeta A} \text{ \&c.}$$

ubi

ubi erit ultima $(\frac{2}{2}) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A}$, penultima $(\frac{3}{2}) = \frac{\alpha\beta CD}{\delta\varepsilon A}$ &c.; at horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-2}{2}) = \beta,\ (\frac{n-2}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ (\frac{n-2}{4}) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC},\ (\frac{n-2}{5}) = \frac{\delta\varepsilon A}{3\alpha CD},\ (\frac{n-2}{6}) = \frac{\varepsilon\zeta A}{4\alpha DE},\ (\frac{n-2}{7}) = \frac{\zeta\eta A}{5\alpha EF}\ \&c.$$

quarum erit ultima $(\frac{n-2}{n-2}) = \frac{\beta\gamma A}{(n-4)\alpha BC}$, penultima $(\frac{n-2}{n-3}) = \frac{\gamma\delta A}{(n-5)\alpha CD}$ &c.

Porro a formula $(\frac{n-3}{n-3}) = \gamma$ deſcendendo pervenimus ad has formulas:

$$(\frac{n-3}{3}) = \gamma,\ (\frac{n-4}{3}) = C,\ (\frac{n-5}{3}) = \frac{\alpha CD}{\delta A},\ (\frac{n-6}{3}) = \frac{\alpha\beta CDE}{\delta\varepsilon AB},$$

$$(\frac{n-7}{3}) = \frac{\alpha\beta\gamma DEF}{\delta\varepsilon\zeta AB},\ (\frac{n-8}{3}) = \frac{\alpha\beta\gamma EFG}{\varepsilon\zeta\eta AB}\ \&c.$$

& horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-3}{3}) = \gamma,\ (\frac{n-3}{4}) = \frac{\gamma\delta}{\alpha C},\ (\frac{n-3}{5}) = \frac{\gamma\delta\varepsilon A}{2\alpha\beta CD},\ (\frac{n-3}{6}) = \frac{\delta\varepsilon\zeta AB}{3\alpha\beta CDE},$$

$$(\frac{n-3}{7}) = \frac{\varepsilon\zeta\eta AB}{4\alpha\beta DEF},\ (\frac{n-3}{8}) = \frac{\zeta\eta\theta AB}{5\alpha\beta EFG}\ \&c.$$

Pari modo a formula $(\frac{n-4}{4}) = \delta$ deſcendendo nanciſcimur:

$$(\frac{n-4}{4}) = \delta,\ (\frac{n-5}{4}) = D,\ (\frac{n-6}{4}) = \frac{\alpha DE}{\varepsilon A},\ (\frac{n-7}{4}) = \frac{\alpha\beta DEF}{\varepsilon\zeta AB},$$

$$(\frac{n-8}{4}) = \frac{\alpha\beta\gamma DEFG}{\varepsilon\zeta\eta ABC},\ (\frac{n-9}{4}) = \frac{\alpha\beta\gamma\delta EFGH}{\varepsilon\zeta\eta\theta ABC}\ \&c.$$

& horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-4}{4}) = \delta,\ (\frac{n-4}{5}) = \frac{\delta\varepsilon}{\alpha D},\ (\frac{n-4}{6}) = \frac{\delta\varepsilon\zeta A}{2\alpha\beta DE},\ (\frac{n-4}{7}) = \frac{\delta\varepsilon\zeta\eta AB}{3\alpha\beta\gamma DEF},$$

$(\frac{n-4}{8}) = \frac{\iota\zeta\eta\theta ABC}{4\alpha\beta\gamma DEFG}$, $(\frac{n-4}{9}) = \frac{\zeta\eta\theta\iota ABC}{5\alpha\beta\gamma EFGH}$ &c.

Atque hac ratione tandem omnium formularum valores reperiuntur.

Accommodemus has generales reductiones ad

$$Classem\ 9^{nae}\ formulae\ \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[9]{(1-x^9)^{9-q}}} = (\frac{p}{q})$$

Ubi ob $n = 9$ formulae quadraturam circuli involventes erunt:

$(\frac{8}{1}) = \alpha$, $(\frac{7}{2}) = \beta$, $(\frac{6}{3}) = \gamma$, $(\frac{5}{4}) = \delta$;

hinc $\varepsilon = \delta$, $\zeta = \gamma$, $\eta = \beta$, $\theta = \alpha$.

Deinde novae quadraturae huc requisitae ponantur:

$(\frac{7}{1}) = A$, $(\frac{6}{2}) = B$, $(\frac{5}{3}) = C$, $(\frac{4}{4}) = D$;

sicque erit $E = C$, $F = B$, & $G = A$; atque his quatuor valoribus concessis omnium formularum nonae classis valores assignari poterunt, quos simili ordine, ut hactenus fecimus, repraesentemus.

$(\frac{9}{1}) = 1$, $(\frac{9}{2}) = \frac{1}{2}$, $(\frac{9}{3}) = \frac{1}{3}$, $(\frac{9}{4}) = \frac{1}{4}$, $(\frac{9}{5}) = \frac{1}{5}$,

$(\frac{9}{6}) = \frac{1}{6}$, $(\frac{9}{7}) = \frac{1}{7}$, $(\frac{9}{8}) = \frac{1}{8}$, $(\frac{9}{9}) = \frac{1}{9}$;

$(\frac{8}{1}) = \alpha$, $(\frac{8}{2}) = \frac{\beta}{A}$, $(\frac{8}{3}) = \frac{\gamma}{2B}$, $(\frac{8}{4}) = \frac{\delta}{3C}$, $(\frac{8}{5}) = \frac{\delta}{4D}$,

$(\frac{8}{6}) = \frac{\gamma}{5C}$, $(\frac{8}{7}) = \frac{\beta}{6B}$, $(\frac{8}{8}) = \frac{\alpha}{7A}$;

$(\frac{7}{1}) = A$, $(\frac{7}{2}) = \beta$, $(\frac{7}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}$, $(\frac{7}{4}) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC}$, $(\frac{7}{5}) = \frac{\delta\delta A}{3\alpha CD}$,

$(\frac{7}{6}) = \frac{\gamma\delta A}{4\alpha CD}$, $(\frac{7}{7}) = \frac{\beta\gamma\alpha}{5\alpha BC}$;

$$(\tfrac{6}{1}) = \tfrac{\alpha B}{\beta},\ (\tfrac{6}{2}) = B,\ (\tfrac{6}{3}) = \gamma,\ (\tfrac{6}{4}) = \tfrac{\gamma\delta}{\alpha C},\ (\tfrac{6}{5}) = \tfrac{\gamma\delta\delta A}{2\alpha\beta CD},$$

$$(\tfrac{6}{6}) = \tfrac{\gamma\delta\delta AB}{3\alpha\beta CCD};$$

$$(\tfrac{5}{1}) = \tfrac{\alpha C}{\gamma},\ (\tfrac{5}{2}) = \tfrac{\alpha BC}{\gamma A},\ (\tfrac{5}{3}) = C,\ (\tfrac{5}{4}) = \delta,\ (\tfrac{5}{5}) = \tfrac{\delta\delta}{\alpha D};$$

$$(\tfrac{4}{1}) = \tfrac{\alpha D}{\delta},\ (\tfrac{4}{2}) = \tfrac{\alpha\beta CD}{\gamma\delta A},\ (\tfrac{4}{3}) = \tfrac{\alpha CD}{\delta A},\ (\tfrac{4}{4}) = D;$$

$$(\tfrac{3}{1}) = \tfrac{\alpha C}{\delta},\ (\tfrac{3}{2}) = \tfrac{\alpha\beta CD}{\delta\delta A},\ (\tfrac{3}{3}) = \tfrac{\alpha\beta CCD}{\delta\delta AB};$$

$$(\tfrac{2}{1}) = \tfrac{\alpha B}{\gamma},\ (\tfrac{2}{2}) = \tfrac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A};$$

$$(\tfrac{1}{1}) = \tfrac{\alpha A}{\beta}.$$

Ordo harum formularum etiam in genere diagonaliter a finiſtra ad dextram procedendo notari meretur, ubi quidem duo genera progreſſionum occurrunt, prout vel a prima ſerie verticali, vel a ſuprema horizontali incipimus; hoc modo primum a ſerie verticali incipiendo:

$$(\tfrac{n-1}{1}) = \alpha,\ (\tfrac{n-2}{2}) = \tfrac{\beta}{\alpha}\times(\tfrac{n-1}{1}),\ (\tfrac{n-3}{3}) = \tfrac{\gamma}{\beta}\times(\tfrac{n-2}{2}),\ (\tfrac{n-4}{4}) = \tfrac{\delta}{\gamma}\times(\tfrac{n-3}{3})\ \text{\&c.}$$

$$(\tfrac{n-2}{1}) = A,\ (\tfrac{n-3}{2}) = \tfrac{B}{A}\times(\tfrac{n-2}{1}),\ (\tfrac{n-4}{3}) = \tfrac{C}{B}\times(\tfrac{n-3}{2}),\ (\tfrac{n-5}{4}) = \tfrac{D}{C}\times(\tfrac{n-4}{3})$$

$$(\tfrac{n-3}{1}) = \tfrac{\alpha B}{\beta},\ (\tfrac{n-4}{2}) = \tfrac{\beta C}{\gamma A}\times(\tfrac{n-3}{1}),\ (\tfrac{n-5}{3}) = \tfrac{\gamma D}{\delta B}\times(\tfrac{n-4}{2}),\ (\tfrac{n-6}{4}) = \tfrac{\delta E}{\epsilon C}\times(\tfrac{n-5}{3})$$

$$(\tfrac{n-4}{1}) = \tfrac{\alpha C}{\gamma},\ (\tfrac{n-5}{2}) = \tfrac{\beta D}{\delta A}\times(\tfrac{n-4}{1}),\ (\tfrac{n-6}{3}) = \tfrac{\gamma E}{\epsilon B}\times(\tfrac{n-5}{2}),\ (\tfrac{n-7}{4}) = \tfrac{\delta F}{\zeta C}\times(\tfrac{n-6}{3})$$

$$(\tfrac{n-5}{1}) = \tfrac{\alpha D}{\delta},\ (\tfrac{n-6}{2}) = \tfrac{\beta E}{\epsilon A}\times(\tfrac{n-5}{1}),\ (\tfrac{n-7}{3}) = \tfrac{\gamma F}{\zeta B}\times(\tfrac{n-6}{2}),\ (\tfrac{n-8}{4}) = \tfrac{\delta G}{\eta C}\times(\tfrac{n-7}{3})$$

$$(\tfrac{n-6}{1}) = \tfrac{\alpha E}{\epsilon},\ (\tfrac{n-7}{2}) = \tfrac{\beta F}{\zeta A}\times(\tfrac{n-6}{1}),\ (\tfrac{n-8}{3}) = \tfrac{\gamma G}{\eta B}\times(\tfrac{n-7}{2}),\ (\tfrac{n-9}{4}) = \tfrac{\delta H}{\theta C}\times(\tfrac{n-8}{3})$$

&c.

Deinde a ſuprema horizontali incipiendo:

$$\left(\frac{n}{1}\right) = 1\,,\ \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{\beta}{A}\times\left(\frac{n}{1}\right),\ \left(\frac{n-2}{3}\right) = \frac{\gamma A}{\alpha B}\times\left(\frac{n-1}{2}\right),\ \left(\frac{n-3}{4}\right) = \frac{\delta B}{\beta C}\times\left(\frac{n-2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}\,,\ \left(\frac{n-1}{3}\right) = \frac{\gamma}{B}\times\left(\frac{n}{2}\right),\ \left(\frac{n-2}{4}\right) = \frac{\delta A}{\alpha C}\times\left(\frac{n-1}{3}\right),\ \left(\frac{n-3}{5}\right) = \frac{\varepsilon B}{\beta D}\times\left(\frac{n-2}{4}\right)$$

$$\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{1}{3}\,,\ \left(\frac{n-1}{4}\right) = \frac{\delta}{C}\times\left(\frac{n}{3}\right),\ \left(\frac{n-2}{5}\right) = \frac{\varepsilon A}{\alpha D}\times\left(\frac{n-1}{4}\right),\ \left(\frac{n-3}{6}\right) = \frac{\zeta B}{\beta E}\times\left(\frac{n-2}{5}\right)$$

$$\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{4}\,,\ \left(\frac{n-1}{5}\right) = \frac{\varepsilon}{D}\times\left(\frac{n}{4}\right),\ \left(\frac{n-2}{6}\right) = \frac{\zeta A}{\alpha E}\times\left(\frac{n-1}{5}\right),\ \left(\frac{n-3}{7}\right) = \frac{\eta B}{\beta F}\times\left(\frac{n-2}{6}\right)$$

$$\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5}\,,\ \left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{\zeta}{E}\times\left(\frac{n}{5}\right),\ \left(\frac{n-2}{7}\right) = \frac{\eta A}{\alpha F}\times\left(\frac{n-1}{6}\right),\ \left(\frac{n-3}{8}\right) = \frac{\theta B}{\beta G}\times\left(\frac{n-2}{7}\right)$$

&c.

Ubi lex, qua hæ formulæ a se invicem pendent, satis est perspicua; si modo notemus, in utraque litterarum serie α, β, γ, δ &c. & A, B, C, D &c. terminos primum antecedentes inter se esse æquales.

Conclusio.

Cum igitur formulas secundæ classis, sola concessa circuli quadratura, exhibere valeamus, formulæ tertiæ classis insuper requirunt quadraturam contentam vel hac formula

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A, \quad \text{vel hac} \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{\alpha}{A}$$

quandoquidem, data una, simul altera datur. Quod si istas formulas per productum infinitum exprimamus, earum valor reperitur:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3.5}{4.4}\cdot\frac{6.8}{7.7}\cdot\frac{9.11}{10.10}\cdot\frac{12.14}{13.13}\ \&c.$$

unde ejus quantitas vero proxime satis expedite colligi potest; simili modo est:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = 1\cdot\frac{3.7}{5.5}\cdot\frac{6.10}{8.8}\cdot\frac{9.13}{11.11}\cdot\frac{12.16}{14.14}\ \&c.$$

Deinde omnes formulas quartæ classis integrare poterimus si modo, præter circuli quadraturam, una ex his quatuor formulis fuerit cognita: $(\frac{2}{1})$, $(\frac{1}{1})$, $(\frac{3}{2})$, $(\frac{3}{3})$, quæ præbent has formas:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = A;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\alpha A}{\beta};\ \int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{\alpha}{2A};$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)}} = \frac{\beta}{A};$$

at per productum infinitum erit

$$A = \frac{3}{1.2}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{8.11}{9.10}\cdot\frac{12.15}{13.14}\cdot\frac{16.19}{17.18}\ \&c.$$

Quinta classis postulat duas quadraturas altiores: $(\frac{3}{1}) = A$, & $(\frac{2}{2}) = B$, quarum loco aliæ binæ ab his pendentes assumi possunt, quæ quidem faciliores videantur, etsi ob 5 numerum primum aliæ aliis vix simpliciores reputari queant.

Pro sexta classe etiam duæ quadraturæ requiruntur: $(\frac{4}{1}) = A$ & $(\frac{3}{2}) = B$. Verum hic loco alterius ea, quæ in tertia classe opus erat, assumi potest, ut unica tantum nova sit adhibenda. Cum enim sit

$$(\frac{2}{2}) = \int\frac{x\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^4}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{\alpha BB}{\gamma A}$$

erit $\frac{2\alpha BB}{\gamma A} = \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, quæ est formula ad classem tertiam requisita. Hac ergo data, si insuper innotescat formula:

$\left(\frac{3}{2}\right) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = B$, vel etiam haec $\left(\frac{4}{3}\right) = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}$, quæ ſunt ſimpliciſſimæ in hoc genere, reliquæ omnes per has definiri poterunt. His autem combinatis patet fore:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{6\beta\gamma}{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Simili modo ex formulis quartæ claſſis colligitur:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

cujuſmodi Theorematum ingens multitudo hinc deduci poteſt: inter quæ hoc imprimis eſt notabile:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)}} = \frac{\pi \,\text{ſin.}\, \frac{(m-n)\pi}{mn}}{(m-n)\,\text{ſin.}\, \frac{\pi}{m} \cdot \text{ſin.}\, \frac{\pi}{n}}$$

quod, ſi m & n ſint numeri fracti, in hanc formam tranſmutatur:

$$\int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[r]{(1-x^p)^s}} \cdot \int \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt[p]{(1-x^r)^q}} = \frac{\pi \,\text{ſin.}\, \left(\frac{s}{r} - \frac{q}{p}\right)\pi}{(ps-qr)\,\text{ſin.}\, \frac{q}{p}\pi \cdot \text{ſin.}\, \frac{s}{p}\pi}$$

In genere vero eſt;

$$\left(\frac{n-p}{q}\right) \cdot \left(\frac{n-q}{p}\right) = \frac{\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right)}{(q-p)\cdot\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right)}$$

quod hanc formam præbet;

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{(q-p)\pi}{n}}{n(q-p) \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{n} \cdot \operatorname{fin.} \frac{q\pi}{n}}$$

unde non folum præcedentia Theoremata, fed alia plura facile derivantur. Pofito enim $n = \frac{pq}{m}$ habebimus:

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[p]{(1-x^q)^m}} \cdot \int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[q]{(1-x^p)^m}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} \left(\frac{m}{p} - \frac{m}{q}\right)\pi}{m(q-p) \operatorname{fin.} \frac{m\pi}{q} \cdot \operatorname{fin.} \frac{m\pi}{p}}$$

quam ita latius extendere licet:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} \left(\frac{q}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi}{(mq-np) \operatorname{fin.} \frac{p}{m}\pi \cdot \operatorname{fin.} \frac{q}{n}\pi}$$

in qua fi ponatur $n = 2q$ erit:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{\pi \operatorname{cof.} \frac{p}{m}\pi}{q(m-2p) \operatorname{fin.} \frac{p}{m}\pi}$$

At in pofteriori formula integrali fi ponatur $x^{2q} = 1 - y^m$ erit: $\int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{m}{2q} \int \frac{y^{m-p-1}dy}{\sqrt{(1-y^m)}}$, unde fcripto x pro y

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}} = \frac{2\pi \operatorname{cof.} \frac{p}{m}\pi}{m(m-2p) \operatorname{fin.} \frac{p}{m}\pi}$$

Simili modo si in genere ponatur, pro altera formula integrali, $1 - x^n = y^m$, fiet: $\int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{m}{n}$ $\int \frac{y^{m-p-1}dy}{\sqrt[n]{(1-y^m)^{n-q}}}$; unde, scripto iterum x pro y, obtinebitur:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{n-q}}} = \frac{n\pi \sin.\left(\frac{q}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi}{m(mq-np)\sin.\frac{p}{m}\pi \cdot \sin.\frac{q}{n}\pi}$$

qui valor reducitur ad: $\frac{n\pi}{m(mq-np)}\left(\cot.\frac{p}{m}\pi - \cot.\frac{q}{n}\pi\right)$,

Atque hinc ista forma concinnior resultat:

$$\int \frac{x^{\frac{m-r}{2}-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{\frac{n-s}{2}}}} \cdot \int \frac{x^{\frac{m+r}{2}-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{\frac{n+s}{2}}}} = \frac{2n\pi\left(\text{tang.}\frac{r\pi}{2m} - \text{tang.}\frac{s\pi}{2n}\right)}{m(nr-ms)}$$

Cum fundamentum harum reductionum situm sit in hac aequalitate: $\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right) = \frac{\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right)}{(q-p)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right)}$,

quae ad hanc formam reducitur:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right)$$

ejus veritas hoc modo directe ostendi potest.

Sumtis in reductione §. VIII. tradita pro numeris ternis p, q, r his $n-q$, $q-p$, q habebimus:

$$\left(\frac{n-q}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{q}\right) = \left(\frac{n-q}{q}\right)\left(\frac{n}{q-p}\right)$$

tum vero sumtis eorum loco $n-q$, $q-p$, p erit

$$\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n-q}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right)$$

quibus

quibus æquationibus in ſe invicem ductis, & formula $\left(\frac{n-q}{q-p}\right)$ utrinque communi per diviſionem ſublata, erit:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right)=\left(\frac{n}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right).$$

Quin etiam hujuſmodi ternarum æqualitas ab exponente n non pendens exhiberi poteſt, ſcilicet:

$$\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)\left(\frac{p+s}{r}\right)=\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{s}{q}\right)\left(\frac{q+s}{r}\right)=\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)$$
$$\left(\frac{p+r}{s}\right)=\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{q+r}{s}\right),$$

quæ quatuor adeo litteras ab n non pendentes involvit; ac ſimili eſt æqualitati inter binarum formularum producta:

$$\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{q+r}{p}\right)\left(\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right).$$

Æqualitas autem inter ternarum formularum producta habetur etiam iſta:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{p+q}{r+s}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{q+r}{p+s}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{p+r}{q+s}\right)=$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{s}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right) \text{ \&c.}$$

In his enim litteræ p, q, r, s utrumque inter ſe permutari poſſunt.

Fautes à corriger dans les Mémoires précédens.

Page 1 ligne 8 après *fig.* 1. ajoutez *Pl.* I.
P. 15 l. 19 au lieu de $\Delta : (x + ct)$ lisez $\Delta : (x - ct)$.
P. 22 l. 3 à compter d'en bas à la fin mettez o au lieu de σ.
P. 25 l. 4 au lieu de *plusieurs* lisez *différens*.
P. 27 l. 10 après *fig.* 1. ajout. *Pl.* II.
P. 38 l. 2 à compter d'en bas au lieu de $5n + \beta$ lisez $5n + 6$.
P. 40 dans la troisiéme colonne au lieu de $n + 1$ au dénom. lisez $2n + 1$,
Ibid. dern. ligne au lieu de $\frac{1}{\gamma}$ lisez $\frac{1}{\lambda}$.
P. 42 ligne dern. au lieu de $(2\mu - 5)$ au numer. lisez $(2\mu - 6)$.
P. 46 l. 8 à compter d'en bas au lieu de $x(\Delta - x\Gamma)$ lisez $x(x\Delta - x\Gamma)$.
P. 47 l. 5 à compt. d'en bas au lieu de $(x'\delta' = x''\gamma'')$ lis. $(x'\delta' - x''\gamma'')$.
P. 52 l. 18 au lieu de $-v.x\Delta$ lisez $-v.x\Gamma + v.x\Delta$.
P. 53 l. 5 à compt. d'en bas au lieu de $-ib(\beta v - x\Delta)$ lis. $-ib(bv - x\Delta)$.
P. 54 l. 3 à compter d'en bas au lieu de $2m'x''\gamma''$ lisez $2mx''\gamma''$.
P. 58 l. 4 au lieu de $18\pi\pi$ au numer. lisez $13\pi\pi$, & ligne suiv. au lieu de 36π au dénom. lisez $36\pi^2$.
P. 66 l. 6 à la fin ajoutez *AC*.
P. 79 l. 15 au lieu de $M = \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x)$ lisez $M = \frac{1}{2}\Gamma : p + \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x)$.
P. 94 l. 8 au lieu de $-\frac{\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$ lisez $\frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$, & l. 4 à compt. d'en bas au lieu de $-\pi.\varphi$ lisez $-\pi + \varphi$.
P. 96 l. 2 au commenc. au lieu de t lisez s.
P. 102 l. 2 au lieu de $-\frac{\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$ lisez $\frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$, & ligne 4 au lieu de π mettez π'.
P. 103 l. 3 à compter d'en bas après $(d + 2)$ au numer. ajoutez M.
P. 116 dans la colonne du milieu au lieu de $\frac{m}{60}\,p$ lisez $\frac{m}{60}$ *pouces*, & au lieu de $\frac{1}{30}\,p$ lisez $\frac{1}{30}$.
P. 117 dans la colonne du milieu au lieu de $\frac{1}{20}\,p$ lisez $\frac{1}{20}$.
P. 120 l. 3 à compter d'en bas au commencem. au lieu de $=$ mettez $-$.
P. 123 ligne prem. au lieu de φ *ou* lisez *ou* φ.
P. 138 lignes 3 & 16 au lieu de *&c.* lisez *&*.
P. 154 l. 9. au dessous de la barre écrivez φ.
P. 167 l. 4 au lieu de $\frac{\alpha C}{\beta}$ lisez $\frac{\alpha C}{\gamma}$.

SOLUTION
DE DIFFÉRENS PROBLÊMES
DE
CALCUL INTÉGRAL

PAR M. DE LA GRANGE.

Sur l'intégration de l'équation

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T \;.\;.\; (A);$$

dans laquelle L, M, N &c. T *sont des fonctions de* t.

I. JE multiplie cette équation par $z\,dt$, z étant une variable indéterminée, j'en prends l'intégrale, j'ai:

$$\int Lzy\,dt + \int Mz\frac{dy}{dt}\,dt + \int Nz\frac{d^2y}{dt^2}\,dt + \int Pz\frac{d^3y}{dt^3}\,dt + \&c. = \int Tz\,dt;$$

je change les expressions $\int Mz\frac{dy}{dt}dt$, $\int Nz\frac{d^2y}{dt^2}dt$, $\int Pz\frac{d^3y}{dt^3}dt$ &c. en leurs égales, $Mzy - \int\frac{d\cdot Mz}{dt}ydt$; $Nz\frac{dy}{dt} - \frac{d\cdot Nz}{dt}y + \int\frac{d^2\cdot Nz}{dt^2}ydt$, $Pz\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d\cdot Pz}{dt}\times\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2}y - \int\frac{d^3\cdot Pz}{dt^3}ydt$ &c.; j'ai, en ordonnant les termes par rapport à y,

$$y\left(Mz - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$
$$\frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$
$$\frac{ddy}{dt^2}\left(Pz - \&c.\right) + \&c. +$$
$$\int\left(Lz - \frac{d\cdot Mz}{dt} + \frac{d^2\cdot Nz}{dt^2} - \frac{d^3\cdot Pz}{dt^3} + \&c.\right) y\,dt =$$
$$\int Tz\,dt.$$

Soit maintenant,

$$Lz - \frac{d\cdot Mz}{dt} + \frac{d^2\cdot Nz}{dt^2} - \frac{d^3\cdot Pz}{dt^3}\ \&c. = 0 \ldots (B),$$

& l' équation précédente se réduira à celle-ci

$$y\left(Mz - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$
$$\frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$
$$\frac{ddy}{dt^2}\left(Pz - \&c.\right) + \&c. = \int Tz\,dt \quad \ldots \quad (C),$$

laquelle est d' un ordre moins élevé d' une unité que l' équation proposée (*A*).

II. Donc 1.° si on peut trouver une valeur de z, laquelle satisfasse à l' équation (*B*), on aura tout de suite l' intégrale de l' équation proposée (*A*), en mettant cette valeur dans l' équation (*C*). 2.° Si on avoit deux valeurs différentes de z, lesquelles satisfissent également à l'équation (*B*), on auroit, par la substitution successive de ces valeurs dans l' équation (*C*), deux intégrales de l'équation (*A*), à l' aide desquelles on élimineroit la plus haute différentielle de y; & l' équation résultante seroit l' intégrale seconde de la proposée. (J' entends par intégrale première ou intégrale simplement, une équation qui est d' un ordre moins élevé d' une unité que la proposée; par intégrale seconde une équation qui est d'un ordre moins élevé

de deux unités; & ainsi de suite) 3.° De même si on avoit trois valeurs différentes de z, on trouveroit trois équations intégrales; d'où éliminant les deux plus hautes différentielles de y, on auroit une équation qui seroit l'intégrale troisiéme de la proposée; & ainsi de suite. D'où il est aisé de conclure, qu'en connoissant un nombre de valeurs de z égal à celui de l'exposant de l'ordre de l'équation (A), on pourra trouver l'intégrale finie, & algébrique de cette même équation.

III. Qu'on multiplie l'équation (B) par $y\,dt$, & qu'on en prenne l'intégrale, en faisant disparoitre de dessous le signe $\int$ toutes les différences de z, par des intégrations par parties, comme nous l'avons pratiqué sur l'équation (A), on aura, en changeant les signes,

$$y\left(Mz - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$
$$\frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\left(Pz - \&c.\right) + \&c. -$$
$$\int\left(Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c.\right) z\,dt = \text{const.}$$

Donc si on fait

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = 0 \;\ldots\; (D)$$

& qu'on ordonne l'équation restante par rapport à z, on aura

$$z\left\{\left(M - \frac{dN}{dt} + \frac{d^2P}{dt^2} - \&c.\right)y + \left(N - \frac{dP}{dt} + \&c.\right)\frac{dy}{dt}\right.$$
$$\left. + \left(P - \&c.\right)\frac{d^2y}{dt^2} + \&c.\right\} -$$
$$\frac{dz}{dt}\left\{\left(N - 2\frac{dP}{dt} + \&c.\right)y + \left(P - \&c.\right)\frac{dy}{dt} + \&c.\right\} +$$

$\frac{d^2z}{dt}\left\{ (P - \&c.)\, y + \&c. \right\} - \&c. = \text{conft.} \quad (E)$

IV. Donc, si on peut trouver une valeur de y qui satisfasse à l'équation (D), on aura l'intégrale première de l'équation (B); si l'on a deux valeurs différentes de y, qui satisfassent à la même équation (D), on aura l'intégrale seconde de l'équation (B); & ainsi de suite; de sorte que, si on connoissoit un nombre de valeurs de y égal à celui de l'exposant de l'équation (B), on pourroit trouver l'intégrale finie & algébrique de cette même équation (*Art. II.*).

V. Cette dernière intégrale contiendra, comme l'on voit, autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle (B); car les équations (E), d'où elle résulte, contiennent chacune une constante arbitraire. Donc si on fait successivement toutes ces constantes, moins une, égales à *zero*, on aura autant d'intégrales particulières, & par conséquent autant de valeurs différentes de z, qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation (B); or il est facile de voir que cette équation est du même ordre que l'équation (A) (*Art. I.*); donc on trouvera aussi l'intégrale finie, & algébrique de cette dernière équation (*Art. II.*).

VI. Donc l'équation (A), savoir

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T$$

sera intégrable algébriquement toutes les fois qu'on aura m valeurs de y en t dans le cas de $T = 0$, m étant l'exposant de l'ordre de cette équation.

VII. Si on ne connoissoit que $m - 1$ valeurs de y, dans le cas de $T = 0$; on pourroit néanmoins trouver l'intégrale algébrique de l'équation (A). Car on auroit dans ce cas $m - 1$ équations (E); d'où éliminant les

plus hautes différences de z, on parviendroit à une équation de cette forme $Vz + X\frac{dz}{dt} = Y$, (V, X, & Y étant des fonctions de t) laquelle donneroit

$$z = e^{-\int\frac{V}{X}dt}\left(\text{const.} + \int\frac{Ye^{\int\frac{V}{X}dt}}{X}dt\right);$$ donc &c.

VIII. Donc l'équation (A) sera aussi intégrable algébriquement, toutes les fois qu'on aura $m - 1$ valeurs de y dans le cas de $T = 0$.

IX. Si les valeurs connues de y n'étoient qu'au nombre de $m - 2$, alors il faudroit, pour avoir les m valeurs de z, intégrer une équation de cette forme $Vz + X\frac{dz}{dt} + Y\frac{d^2z}{dt^2} = Z$, laquelle n'est intégrable que dans quelques cas particuliers; & ainsi de suite.

X. Au reste, si on ne connoissoit pas d'avance les valeurs particuliers de y dans le cas de $T = 0$, il vaudroit mieux chercher directement les valeurs de z par la résolution de l'équation (B), laquelle n'est guere plus compliquée que l'équation (D).

XI. Soit l'équation

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = T,$$

pour laquelle on connoît deux valeurs particulières de y, dans le cas de $T = 0$.

On aura d'abord l'équation en z (*Art. III.*)

$$z\left\{\left(M - \frac{dN}{dt}\right)y + N\frac{dy}{dt}\right\} - \frac{dz}{dt}Ny = \text{const.}$$

donc supposant que $y1$, & $y2$ soient les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, on aura

$$z\left\{(M-\frac{dN}{dt})y_1+N\frac{d\cdot y_1}{dt}\right\}-\frac{dz}{dt}Ny_1=A,$$

$$z\left\{(M-\frac{dN}{dt})y_2+N\frac{d\cdot y_2}{dt}\right\}-\frac{dz}{dt}Ny_2=B,$$

A, & B étant deux constantes arbitraires.

On tire de ces deux équations

$$z=\frac{Ay_2-By_1}{N(y_2\frac{d\cdot y_1}{dt}-y_1\frac{d\cdot y_2}{dt})}$$

Soit d'abord $A=0$, on aura

$$z=-\frac{B}{N}\times\frac{y_1}{y_2\frac{d\cdot y_1}{dt}-y_1\frac{d\cdot y_2}{dt}}=z_1\,.$$

Soit ensuite $B=0$, on aura

$$z=\frac{A}{N}\times\frac{y_2}{y_2\frac{d\cdot y_1}{dt}-y_1\frac{d\cdot y_2}{dt}}=z_2;$$

Ayant deux valeurs de z, savoir z_1, & z_2, on les substituera successivement dans l'équation (C), & l'on aura

$$y(Mz_1-\frac{d\cdot Nz_1}{dt})+\frac{dy}{dt}Nz_1=\int Tz_1dt,$$

$$y(Mz_2-\frac{d\cdot Nz_2}{dt})+\frac{dy}{dt}Nz_2=\int Tz_2dt;$$

d'où l'on tire :

$$y=\frac{z_2\int Tz_1dt-z_1\int Tz_2dt}{N(z_1\frac{d\cdot z_2}{dt}-z_2\frac{d\cdot z_1}{dt})}\;:\;:\;:\;:\;(F)$$

C'est la valeur générale, & complete de y qui satisfait à l'équation proposée.

Si on ne connoissoit que la valeur y_1, on auroit simplement l'équation

$$z\left\{(M-\frac{dN}{dt})y_1+N\frac{d\cdot y_1}{dt}\right\}-\frac{dz}{dt}Ny_1=A;$$

laquelle

laquelle étant intégrée donneroit

$$z = e^{\int\left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N\,dt} + \frac{d.y1}{y1\,dt}\right)dt}$$

$$\times \left\{ \text{const.} - A \int \frac{e^{-\int\left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N\,dt} + \frac{d.y1}{y1\,dt}\right)dt}}{N y1}\,dt \right\}$$

ou bien

$$z = \frac{y1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} \left\{ C - A \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{(y1)^2}\, dt \right\}.$$

Donc, en faisant $A = 0$, on auroit

$$z = \frac{Cy1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} = z1,$$

& en faisant $C = 0$

$$z = -\frac{Ay1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{(y1)^2}\, dt = z2.$$

Supposons que les quantités L, M, N soient constantes, on aura, comme l' on sait, pour les deux valeurs de y qui satisfont à l' équation $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, e^{k1t}, & e^{k2t}; $k1$, & $k2$, étant les racines de l' équation $L + Mk + Nk^2 = 0$; donc $y1 = e^{k1t}$, $y2 = e^{k2t}$; & par conséquent $z1 = -\frac{B}{N} \times \frac{e^{-k2t}}{k1 - k2}$, $z2 = \frac{A}{N} \times \frac{e^{-k1t}}{k1 - k2}$; donc

$$y = \frac{e^{k2t}\int Te^{-k2t}dt - e^{k1t}\int Te^{-k1t}dt}{N(k2 - k1)}$$

Si on vouloit employer les valeurs de $z1$, & de $z2$, trouvées à la fin de l' Article précédent, on auroit

$z_1 = \frac{Cy_1}{N} e^{\frac{M}{N}t}$, & $z_2 = -\frac{Ay_1}{N} e^{\frac{M}{N}t} \int \frac{e^{-\frac{M}{N}t}}{(y_1)^2} dt$ ou bien, en mettant pour y_1 sa valeur $e^{k_1 t}$, $z_1 = \frac{C}{N} e^{(k_1 + \frac{M}{N})t}$, & $z_2 = \frac{A}{M + 2Nk_1} e^{-k_1 t}$. Or k_1, & k_2 étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$, on aura $k_1 + k_2 = -\frac{M}{N}$; donc $k_1 + \frac{M}{N} = -k_2$, & $M + 2Nk_1 = N(k_1 - k_2)$; donc en faisant $C = -\frac{B}{k_1 - k_2}$, les valeurs de z_1, & de z_2 seront les mêmes que ci-dessus.

Ces valeurs pourroient encore se trouver d'une manière plus simple par la remarque de l'Article X. Car l'équation (B) sera dans le cas présent $Lz - M\frac{dz}{dt} + N\frac{d^2z}{dt^2} = 0$; d'où l'on tire $z = Fe^{h_1 t} = z_1$, & $z = Ge^{h_2 t} = z_2$, F, G étant deux constantes arbitraires, & h_1, h_2 les racines de l'équation $L - Mh + Nh^2 = 0$; de sorte qu'on aura $h_1 = -k_1$, & $h_2 = -k_2$.

Recherche des cas d'intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ayt^m = T.$$

XII. On aura ici $L = at^{2m}$, $M = 0$, & $N = 1$; donc l'équation (B) deviendra

$$az t^{2m} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G).$$

Supposons dt variable, nous aurons au lieu du terme

$\frac{d^2z}{dt^2}$, ces deux-ci $\frac{d^2z}{dt} - \frac{dz\,d^2t}{dt^3}$; donc faisant cette substitution, & divisant toute l'équation par t^{2m}, on aura la transformée

$$\frac{d^2z}{t^m dt^2} - \frac{dz\,d^2t}{t^m dt^3} + az = 0.$$

Soit maintenant $t^m dt = du$, c'est-à-dire $u = \frac{t^{m+1}}{m+1}$, on aura, en prenant du pour constante, $\frac{d^2t}{dt} + m\frac{dt}{t} = 0$, c'est-à-dire, à cause de $dt = t^{-m}du$, $\frac{d^2t}{dt} = -mt^{-m-1}du = -\frac{m}{m+1} \times \frac{du}{u}$; donc, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, & faisant pour abreger $\frac{m}{m+1} = n$, on aura

$$\frac{d^2z}{du^2} + n\frac{dz}{udu} + az = 0.$$

Si n étoit $= 0$ on auroit $\frac{d^2z}{du^2} + az = 0$, par conséquent $z = e^{ku}$, k étant une des racines de l'équation $k^2 + a = 0$.

Supposons donc $z = xe^{ku}$, on aura après les substitutions & les réductions

$$\frac{d^2x}{du^2} + \left(2k + \frac{n}{u}\right)\frac{dx}{du} + \frac{nkx}{u} = 0.$$

Qu'on fasse $x = Au^r + Bu^{r+1} + Cu^{r+2} +$ &c.; on trouvera, en égalant à zero les termes homogénes, les équations suivantes

$r(r-1)A + nrA = 0$

$(r+1)rB + 2krA + n(r+1)B + nkA = 0$

$(r+2)(r+1)C + 2k(r+1)B + n(r+2)C + nkB = 0$,

& ainsi de suite.

D'où l'on tire premiérement, ou $r = 0$, ou $r - 1 + n = 0$, savoir $r = 1 - n$, ensuite

$$B = - \frac{2r + n}{(r+1)(r+n)} kA$$
$$C = - \frac{2(r+1)+n}{(r+2)(r+1+n)} kB$$
$$D = - \frac{3(r+2)+n}{(r+3)(r+2+n)} kC$$
&c.

En combinant les deux cas de $r = 0$, & de $r = 1 - n$, & faisant $1 - n = \nu$, & $A = 1$, on aura

$$A = 1$$
$$B = - k$$
$$C = \frac{3 \mp \nu}{2(2 \mp \nu)} k^2$$
$$D = - \frac{(3 \mp \nu)(5 \mp \nu)}{2 \cdot 3(2 \mp \nu)(3 \mp \nu)} k^3$$
$$E = \frac{(3 \mp \nu)(5 \mp \nu)(7 \mp \nu)}{2 \cdot 3 \cdot 4(2 \mp \nu)(3 \mp \nu)(4 \mp \nu)} k^4$$
&c.

le signe supérieur étant pour le premier cas, & le signe inférieur pour le second cas; d'où l'on voit que la serie se terminera toutes les fois que $\nu =$ à un nombre quelconque impair positif ou négatif, à l'exception de ± 1.

Ayant ainsi la valeur de x, on aura celle de z, par la supposition de $z = x e^{ku}$; & comme l'équation $kk + a = 0$ donne deux valeurs de k, savoir $k = \pm \sqrt{-a}$, on aura aussi deux valeurs de z, qu'on nommera, comme ci-dessus, $z1$, & $z2$, & qui étant substituées dans la formule (F) de l'Article précédent donneront la valeur de y.

Si a est une quantité positive, les deux valeurs de k seront imaginaires. Dans ce cas la valeur de x sera de cette forme $P \pm Q \sqrt{-1}$; & par conséquent on aura

$z = (P \pm Q\sqrt{-1})\, e^{\pm u\sqrt{a}.\sqrt{-1}} =$ (en mettant au lieu de $e^{\pm u\sqrt{a}.\sqrt{-1}}$ sa valeur, cos. $u\sqrt{a} \pm$ sin. $u\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$) P cos. $u\sqrt{a} - Q$ sin. $u\sqrt{a} \pm (P$ sin. $u\sqrt{a} + Q$ cos. $u\sqrt{a})\sqrt{-1}$.

Soit donc, pour abreger

$$P \text{ cos. } u\sqrt{a} - Q \text{ sin. } u\sqrt{a} = R$$
$$P \text{ sin. } u\sqrt{a} - Q \text{ cos. } u\sqrt{a} = S,$$

on aura $R + S\sqrt{-1} = z1$, & $R - S\sqrt{-1} = z2$, & la valeur de y deviendra

$$y = \frac{R\int TS\,dt - S\int TR\,dt}{N\left(S\frac{dR}{dt} - R\frac{dS}{dt}\right)}.$$

XIII. Si $m = 1$, on aura $n = \infty$, & la valeur de x sera exprimée par une suite infinie; mais en reprenant l'équation (G), on aura

$$\frac{az}{t^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

laquelle en faisant $z = t^r$, se change en

$$a + r(r-1) = 0,$$

d'où l'on tire $r = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4} - a\right)}$.

Ainsi l'on aura les deux valeurs de z.

XIV. Soit $T = 0$ & $y = e^{\int q\,dt}$, l'équation proposée se changera en celle-ci

$$\frac{dq}{dt} + q + at^{2m} = 0,$$

laquelle est connue sous le nom d'équation de Riccati; on trouvera donc par la métode précédente l'intégrale de cette même équation.

Intégration de l' équation

$$Ay + B(h + kt)\frac{dy}{dt} + C(h + kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + D(h + kt)^3 \frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T \quad \ldots \quad (H)$$

A, B, C &c. *étant des coéficiens constans.*

XV. En comparant cette équation avec la formule générale (A), on aura

$L = A$, $M = B(h + kt)$, $N = C(h + kt)^2$

$P = D(h + kt)^3$ &c.

Donc les équations (B) & (C) deviendront

$$Az - B\frac{d.(h + kt)z}{dt} + C\frac{d^2.(h + kt)^2z}{dt^2} - D\frac{d^3.(h + kt)^3z}{dt^3} + \&c. = 0 \quad \ldots \quad (I)$$

$$y\left\{B(h + kt)z - C\frac{d.(h + kt)^2z}{dt} + D\frac{d^2.(h + kt)^3z}{dt^2} - \&c.\right\} + \frac{dy}{dt}\left\{C(h + kt)^2z - D\frac{d.(h + kt)^3z}{dt} + \&c.\right\} + \frac{d^2y}{dt^2}\left\{D(h + kt)^3z - \&c.\right\} + \&c. = \int Tz\,dt \quad \ldots \quad (K).$$

Soit maintenant $z = (h + kt)^r$, & l' équation (I) étant divisée par $(h + kt)^r$ se réduira à celle-ci

$$A - Bk(r + 1) + Ck^2(r + 1)(r + 2) - Dk^3(r + 1)(r + 2)(r + 3) + \&c. = 0 \quad (L)$$

laquelle étant ordonnée par rapport à r montera à un degré, dont l' exposant sera le même que celui de l' ordre de l' équation proposée (H).

Faisant la même substitution dans l' équation (K), on aura, après avoir divisé par $(h + kt)^{r+1}$

$$y \left\{ B - Ck(r+2) + Dk^2 (r+2)(r+3) - \&c. \right\} +$$
$$\frac{dy}{dt} \left\{ C - Dk (r+3) + \&c. \right\} (h+kt) +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} \left\{ D - \&c. \right\} (h+kt)^2 + \&c.$$
$$= (h+kt)^{-r-1} \int T (h+kt)^r dt;$$

équation qui devra avoir lieu, en mettant pour r chacune des racines de l'équation (L).

Soit pour abreger

$B - Ck(r+2) + Dk^2 (r+2)(r+3) - \&c. = \alpha$
$C - Dk (r+3) + \&c. = \beta$
$D - \&c. = \gamma$
&c.
$(h+kt)^{-r-1} \int T (h+kt)^r dt = \theta,$

l'équation dont il s'agit se réduira à celle-ci

$$\alpha y + \beta (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta \quad (M).$$

Supposons que $r1$, $r2$, $r3$ &c. soient les racines de l'équation (L), & que $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ &c. $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$ &c. &c. soient ce que deviennent les quantités α, β &c., lorsque r devient successivement $r1$, $r2$, $r3$ &c.; au lieu de l'équation (M), on aura celles-ci

$$\alpha 1 y + \beta 1 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma 1 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta 1 \quad \ldots \quad (M1)$$

$$\alpha 2 y + \beta 2 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma 2 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta 2 \quad \ldots \quad (M2)$$

$$\alpha 3 y + \beta 3 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma 3 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta 3 \quad \ldots \quad (M3)$$

&c.

dont le nombre sera le même que celui des quantités in-

connues y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c., comme il eſt facile de s'en aſſurer. Ainſi en éliminant les quantités $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c., on aura la valeur de y.

Pour cet effet je multiplie l'équation (M 1) par M', l'équation (M 2) par M'', & ainſi de ſuite; après quoi je les ajoute enſemble, j'ai

$$(\alpha 1\, M' + \alpha 2\, M'' + \alpha 3\, M''' + \&c.)\, y +$$
$$(\beta 1\, M' + \beta 2\, M'' + \beta 3\, M''' + \&c.)\,(h + k\,t)\,\frac{dy}{dt} +$$
$$(\gamma 1\, M' + \gamma 2\, M'' + \gamma 3\, M''' + \&c.)\,(h + kt)^2\,\frac{d^2y}{dt^2} + \&c.$$
$$= M'\theta 1 + M''\theta 2 + M'''\theta 3 + \&c.$$

Je ſuppoſe

$$\left.\begin{array}{l} \beta 1\, M' + \beta 2\, M'' + \beta 3\, M''' + \&c. = 0 \\ \gamma 1\, M' + \gamma 2\, M'' + \gamma 3\, M''' + \&c. = 0 \\ \&c. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (N)$$

j'aurai

$$y = \frac{M'\theta 1 + M''\theta 2 + M'''\theta 3 + \&c.}{M'\alpha 1 + M''\alpha 2 + M'''\alpha 3 + \&c.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

& toute la difficulté ſe réduira à déterminer les quantités M', M'', M''' &c., par le moyen des équations (N).

Or ſi on ſubſtitue dans ces équations, les valeurs de β 1, γ 1, &c. β 2, γ 2 &c. &c., & qu'on ordonne les termes par rapport aux puiſſances de r, on verra qu'elles ſe réduiſent à celles-ci

$$M' + M'' + M''' + \&c. + M^m = 0$$
$$M'r1 + M''r2 + M'''r3 + \&c. + M^m\,(rm) = 0$$
$$M'\,(r1)^2 + M''\,(r2)^2 + M'''\,(r3)^2 + \&c. + M^m\,(rm)^2 = 0$$
$$M'\,(r1)^3 + M''\,(r2)^3 + M'''\,(r3)^3 + \&c. + M^m\,(rm)^3 = 0$$
$$\&c.$$
$$M'(r1)^{m-2} + M''(r2)^{m-2} + M'''(r3)^{m-2} + \&c. + M^m\,(rm)^{m-2} = 0$$

m étant

m étant l'exposant de l'ordre de l'équation proposée (H), & la quantité $M' \alpha 1 + M'' \alpha 2 + M''' \alpha 3 +$ &c. deviendra

$$\pm V k^{m-1} [M' (r 1)^{m-1} + M'' (r 2)^{m-1} + M''' (r 3)^{m-1} + \&c. + M^m (r m)^{m-1}]$$

dans laquelle V est le coéficient du terme $(h + k t)^m \frac{d^m y}{dt^m}$ de la même équation ; le signe supérieur étant pour le cas de m impair, & le signe inférieur pour celui de m pair.

Telles sont les équations, par lesquelles il faudra déterminer les inconnues M', M'', M''' &c. M^m.

Pour rendre cette recherche plus générale nous supposerons que l'on ait les équations suivantes

$$M' + M'' + M''' + \&c. + M^m = R$$
$$M' r 1 + M'' r 2 + M''' r 3 + \&c. + M^m (rm) = R'$$
$$M' (r1)^2 + M'' (r2)^2 + M''' (r3)^2 + \&c. + M^m (rm)^2 = R''$$
$$M' (r1)^3 + M'' (r2)^3 + M''' (r3)^3 + \&c. + M^m (rm)^3 = R'''$$
&c.
$$M' (r1)^{m-1} + M'' (r2)^{m-1} + M''' (r3)^{m-1} + \&c. + M^m (rm)^{m-1} = R^{m-1}$$

(Je prends ici une équation de plus afin que l'on ait autant d'équations que d'inconnues).

On multipliera la première de ces équations par N, la seconde par N', la troisième par N'', & ainsi des autres; on les ajoutera ensemble, & l'on aura

$$M' [N + N' r 1 + N'' (r 1)^2 + N''' (r 1)^3 + \&c. + N^{m-1} (r 1)^{m-1}] +$$
$$M'' [N + N' r 2 + N'' (r 2)^2 + N''' (r 2)^3 + \&c. + N^{m-1} (r 2)^{m-1}] +$$
$$M''' [N + N' r 3 + N'' (r 3)^2 + N''' (r 3)^3 + \&c. + N^{m-1} (r 3)^{m-1}] + \&c. +$$
$$M^m [N + N' (r m) + N'' (r m)^2 + N''' (rm)^3 + \&c. + N^{m-1} (r m)^{m-1}] =$$
$$N R + N' R' + N'' R'' + N''' R''' + \&c. + N^{m-1} R^{m-1}.$$

Maintenant pour avoir la valeur d'une M quelconque, comme M^{μ}, il n'y aura qu'à ſuppoſer $=0$ les quantités qui multiplient toutes les autres M, & l'on aura

$$M^{\mu} = \frac{NR + N'R' + N''R'' + N'''R''' + \&c. + N^{m-1}R^{m-1}}{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + N'''(r\mu)^3 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}} \quad (Q)$$

Et les quantités N, N', N'' &c. N^{m-1} ſeront déterminées par ces équations

$$N + N'r1 + N''(r1)^2 + \&c. + N^{m-1}(r1)^{m-1} = 0$$
$$N + N'r2 + N''(r2)^2 + \&c. + N^{m-1}(r2)^{m-1} = 0$$

& ainſi de ſuite juſqu'à

$$N + N'(rm) + N''(rm)^2 + \&c. + N^{m-1}(rm)^{m-1} = 0$$

à l'exception de

$$N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1} = 0.$$

c'eſt-à-dire qu'on aura l'équation

$$N + N'r + N''r^2 + N'''r^3 + \&c. + N^{m-1}r^{m-1} = 0$$

laquelle devra avoir lieu en mettant ſucceſſivement, au lieu de r, $r1$, $r2$, $r3$, &c. (rm) à l'exception de $(r\mu)$.

Or comme $r1$, $r2$, $r3$ &c. (rm), ſont les racines de l'équation (L), ſi on repréſente cette équation par $a + br + cr^2 + dr^3 + \&c. + tu^{m-1} + ur^m$, on aura par la théorie des équations

$$1 + \frac{N'}{N}r + \frac{N''}{N}r^2 + \frac{N'''}{N}r^3 + \&c. + \frac{N^{m-1}}{N}r^{m-1}$$

$$= \frac{1 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}r^2 + \frac{d}{a}r^3 + \&c. + \frac{u}{a}r^m}{1 - \frac{r}{(r\mu)}};$$

donc, multipliant par $1 - \frac{r}{(r\mu)}$, & comparant les termes, on aura

$$\frac{N'}{N} - \frac{1}{(r\mu)} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{N''}{N} - \frac{1}{(r\mu)} \cdot \frac{N'}{N} = \frac{c}{a},$$

$$\frac{N'''}{N} - \frac{1}{(r\mu)} \cdot \frac{N''}{N} = \frac{d}{a}$$

&c.

d' où l' on tire

$$N' = \frac{N}{a(r\mu)} \times \left\{ a + b(r\mu) \right\}$$

$$N'' = \frac{N}{a(r\mu)^2} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 \right\}$$

$$N''' = \frac{N}{a(r\mu)^3} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + d(r\mu)^3 \right\}$$

&c.

$$N^{m-1} = \frac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + d(r\mu)^3 + \&c. + t(r\mu)^{m-1} \right\}.$$

Faisant ces substitutions dans la formule (Q), on verra que la quantité N disparoitra d' elle même; de sorte que l' on aura la valeur de chacun des coéficiens M.

Soit maintenant $R = o$, $R' = o$, $R'' = o$, &c. $R^{m-2} = o$, on aura

$$M^{\mu} = \frac{N^{m-1} R^{m-1}}{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}}$$

Or $N^{m-1} = \frac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + \&c. + t(r\mu)^{m-1} \right\}$; & comme $a + br + cr^2 + \&c. + tr^{m-1} + ur^m = o$, on a, en mettant $(r\mu)$ au lieu de r, $a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + \&c. + t(r\mu)^{m-1} = -u(r\mu)^m$; donc

$$N^{m-1} = \frac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times - u(r\mu)^m = -\frac{Nu}{a}(r\mu)$$

De plus on a

$$\frac{N + N' r + N'' r + \&c. + N^{m-1} r^{m-1}}{N} = \frac{a + br + cr^2 + \&c. + ur^m}{a\left[1 - \frac{r}{(r\mu)}\right]}$$

donc, si on fait pareillement $r = (r\mu)$, on aura, en prenant la différence du numérateur & du dénominateur, à cause que l'un & l'autre s'évanouissent dans ce cas,

$$\frac{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}}{N} = -\frac{b + 2c(r\mu) + 3d(r\mu)^2 + \&c. + mu(r\mu)^{m-1}}{\frac{a}{(r\mu)}};$$

donc $M = \frac{uR^{m-1}}{b + 2c(r\mu) + 3d(r\mu)^2 + \&c.}$.

Soit

$A - Bk(r+1) + Ck^2(r+1)(r+2) - \&c.$
$\mp Vk^m(r+1)(r+2) \ldots (r+m) = P$,

de sorte que l'équation (L) soit représentée par $P = 0$; on aura

$$a + br + cr^2 + \&c. + ur^m = P;$$

donc $u = \mp Vk^m$, (le signe supérieur étant pour le cas de m impair, & l'inférieur pour celui de m pair);

& $\quad b + 2cr + 3dr^2 + \&c. = \frac{dP}{dr}$.

Donc, si on fait $\frac{dP}{dr} = Q$, & qu'on dénote par $Q1$, $Q2$, $Q3$ &c. le valeurs de Q, lorsque r devient $r1$, $r2$, $r3$ &c., aura

$$M' = \frac{\mp Vk^m R^{m-1}}{Q1},\ M'' = \frac{\mp Vk^m R^{m-1}}{Q2} \ \&c.$$

Substituant donc ces valeurs dans la formule (P), & faisant attention que

$M' \alpha 1 + M'' \alpha 2 + M''' \alpha 3 + \&c. = \pm V k^{m-1}$ $\times [M' (r1)^{m-1} + M''(r2)^{m-1} + M''' (r3)^{m-1} + \&c.]$ $= \pm V k^{m-1} R^{m-1}$, on aura enfin

$$y = -k \left\{ \frac{\theta 1}{Q1} + \frac{\theta 2}{Q2} + \frac{\theta 3}{Q3} + \&c. \right\} \qquad (R)$$

D'où l'on voit que chaque racine de l'équation $P = 0$ donne dans la valeur de y un terme correspondant tel que $-k \frac{\theta}{Q}$.

XVI. Toute la difficulté se réduit donc à résoudre l'équation $P = 0$; or il peut arriver deux cas qu'il est bon d'examiner; le premier est celui où cette équation auroit des racines égales, le second celui où elle auroit des racines imaginaires.

1.° Supposons que l'on trouve deux racines égales, par exemple, $r2 = r1$; on fera $r2 = r1 + \omega$, ω étant une quantité évanouissante, & comme P peut être représenté en général par $(r - r1)(r - r2)\Pi$, on aura $Q = \frac{dP}{dr} = (r - r2)\Pi + (r - r1)\Pi + (r - r1)$ $(r - r2)\frac{d\Pi}{dr}$; donc faisant successivement $r = r1$, & $= r2$, & substituant $r1 + \omega$ au lieu de $r2$, on aura $Q1 = -\omega\Pi 1$, & $Q2 = \omega\Pi 1$, $\Pi 1$ étant la valeur de Π, lorsque $r = r1$. Pour trouver cette valeur on remarquera que, puisque $r2 = r1$, on a $(r - r1)^2\Pi = P$; d'où l'on tire, en différentiant deux fois, $2\Pi + 4$ $(r - r1)\frac{d\Pi}{dr} + (r - r1)^2 \frac{d^2\Pi}{dr^2} = \frac{d^2P}{dr^2} = R$; & par conséquent, en faisant $r = r1$, $2\Pi 1 = R1$, & $\Pi 1 = \frac{R1}{2}$; donc $Q1 = -\frac{\omega}{2}R1$, & $Q2 = \frac{\omega}{2}R1$.

Maintenant on a

$\theta 1 = (h + kt)^{-r1-1} \int T (h + kt)^{r1} dt$, &

$\theta 2 = (h + kt)^{-r2-1} \int T (h + kt)^{r2} dt$;

or $(h + kt)^{-r2-1} = (h + kt)^{-r1-1-\omega} = (h + kt)^{-r1-1} [1 - \omega l(h + kt)$ &c.], & de même $(h + kt)^{r2} = (h + kt)^{r1} [1 + \omega l(h + kt)]$; donc négligeant les ω^2 on aura $\theta 2 = \theta 1 + \omega (h + kt)^{-r1-1} \times [\int T (h + kt)^{r1} l(h + kt) dt - l(h + kt) \times \int T (h + kt)^{r1} dt]$, ou bien

$$\theta 2 = \theta 1 - \omega (h + kt)^{-r1-1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T (h + kt)^{r1} dt;$$

donc faisant ces substitutions dans les termes $-k \frac{\theta 1}{Q1} - k \frac{\theta 2}{Q2}$ de la valeur de y, lesquels répondent aux racines égales $r1$, $r2$, & effaçant ce qui se détruit, on aura $-k \frac{\theta 1}{Q1} - k \frac{\theta 2}{Q2} = k \frac{2 (h+kt)^{-r1-1}}{R1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T (h+kt)^{r1} dt$. On résoudroit de même le cas de trois racines égales, en faisant $r2 = r1 + \omega$, $r3 = r1 + \eta$, ω, η étant deux quantités infiniment petites, & ayant égard aux quantités du second ordre. De cette manière on trouvera que les trois termes $-k \frac{\theta 1}{Q1} - k \frac{\theta 2}{Q2} - k \frac{\theta 3}{Q3}$ deviendront

$$-k \frac{6 (h+kt)^{-r1-1}}{S1} \int \frac{k\,dt}{h+kt} \int \frac{k\,dt}{h+kt} \int T (h + kt)^{r1} dt;$$

S étant $= \frac{d^3 P}{d r^3}$, & $S1$ exprimant la valeur de S, lorsque $r = r1$; & ainsi de suite.

2.° Supposons maintenant que les deux racines $r1$, & $r2$ soient imaginaires, ensorte que $r1 = F + G\sqrt{-1}$, & $r2 = F - G\sqrt{-1}$; il est facile de voir que les quantités $Q1$, & $Q2$ seront de cette forme $Q1 = M + N\sqrt{-1}$, $Q2 = M - N\sqrt{-1}$; de plus les quan-

tités $(h+kt)^{-r1-1}$, & $(h+kt)^{r1}$ deviendront $(h+kt)^{-F-1}(h+kt)^{-G\sqrt{-1}}$, & $(h+kt)^{F}$ $\times (h+kt)^{G\sqrt{-1}}$. Or soit $(h+kt)^{G\sqrt{-1}} = \lambda$ $(\text{cos.}\ \varphi + \text{sin.}\ \varphi \sqrt{-1})$, on aura par les logarithmes $G\sqrt{-1}\, l(h+kt) = l\lambda + \varphi\sqrt{-1}$, donc $l\lambda = 0$, savoir $\lambda = 1$, & $\varphi = G l(h+kt)$, donc $(h+kt)^{G\sqrt{-1}}$ $= \text{cos.}\ Gl(h+kt) + \text{sin.}\ Gl(h+kt)\cdot\sqrt{-1}$, & prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$, $(h+kt)^{-G\sqrt{-1}}$ $= \text{cos.}\ Gl(h+kt) - \text{sin.}\ Gl(h+kt)\cdot\sqrt{-1}$; par ces substitutions on réduira les quantités $\theta 1$, & $\theta 2$ à la forme $X \pm Y\sqrt{-1}$, de sorte que les deux termes $-k\frac{\theta 1}{Q1} - k\frac{\theta 2}{Q2}$ de l'expression de y se changeront en

$$-k\frac{X+Y\sqrt{-1}}{M+N\sqrt{-1}} - k\frac{X-Y\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}} = -2\frac{MX+NY}{M^2+N^2}.$$

Application à l'équation

$$Ay + B\frac{dy}{dt} + C\frac{d^2y}{dt^2} + D\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T.$$

XVI. On aura dans ce cas $h = 1$, & $k = 0$, mais comme la supposition de $k = 0$ donneroit $P = A = 0$; on supposera simplement k infiniment petite, & ensuite r infiniment grande, ensorte que $kr =$ à une quantité finie ρ; de cette manière on aura

$P = A - B\rho + C\rho^2 - D\rho^3 + \&c. = 0$;

équation d'où l'on tirera autant de valeurs de ρ qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle, de sorte que, si on appelle $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. les racines de cette équation, on aura $r1 = \frac{\rho 1}{k}$, $r2 = \frac{\rho 2}{k}$ &c. Or on a $Q = \frac{dP}{dr}$, donc si on fait $\frac{dP}{d\rho} = q$,

on aura $Q = kq$, & par conséquent $Q1 = kq1$, $Q2 = kq2$ &c., donc

$$y = -\left(\frac{\theta 1}{q1} + \frac{\theta 2}{q2} + \frac{\theta 3}{q3} + \&c.\right).$$

Or $\theta = (h + kt)^{-r-1} \int T(h + kt)^r dt$, donc si on fait $h = 1$, & qu'on mette $\frac{p}{k}$ au lieu de r, on aura à cause de $r = \infty$, $\theta = (1 + kt)^{-\frac{p}{k}} \int T(1 + kt)^{\frac{p}{k}} dt$; mais on sait que $(1 + kt)^{\pm\frac{p}{k}}$ = (dans le cas de k infiniment petite) $e^{\pm pt}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1; donc $\theta = e^{-pt} \int T e^{pt} dt$, & par conséquent $\theta 1 = e^{-p1t} \int T e^{p1t} dt$, $\theta 2 = e^{-p2t} \int T e^{p2t} dt$ &c.

Si l'équation $P = 0$ a deux racines égales on transformera d'abord les termes $-\frac{\theta 1}{q1} - \frac{\theta 2}{q2} = -k\left(\frac{\theta 1}{Q1} + \frac{\theta 2}{Q2}\right)$ en $k \frac{2(h+kt)^{-r1-1}}{R1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T(h + kt)^{r1} dt$ (Art. préc.), expression qui se réduit dans le cas présent à celle-ci $\frac{2k}{R1} e^{-p1t} \int dt \int T e^{p1t} dt$; mais $R = \frac{ddP}{dr^2} = \frac{k^2 ddP}{dp^2}$, donc, si on fait $\frac{ddP}{dp} = r$, on aura $\frac{2}{r1} e^{-p1t} \int dt \int T e^{p1t} dt$ au lieu des temes $-\frac{\theta 1}{q1} - \frac{\theta 2}{q2}$. On opéreroit de même si l'on avoit trois, quatre &c. racines égales.

Si $p1$, & $p2$ sont imaginaires de sorte, que $p1 = f + g\sqrt{-1}$, & $p2 = f - g\sqrt{-1}$, on aura
$e^{\pm p1t} = e^{\pm ft}(\text{cos}.\,gt \pm \text{sin}.\,gt \cdot \sqrt{-1})$, &
$e^{\pm p2t} = e^{\pm ft}(\text{cos}.\,gt \mp \text{sin}.\,gt \cdot \sqrt{-1})$,
de plus on trouvera $q1 = m + n\sqrt{-1}$, & $q2 = m -$

$m - n\sqrt{-1}$, donc les termes $-\frac{\theta 1}{q 1} - \frac{\theta 2}{q 2}$ se réduiront à

$$- \frac{2 e^{-ft}}{m + n^2} [(m \text{ cos. } g t - n \text{ sin. } g t) \int T e^{ft} \text{cos. } g t \, dt$$
$$+ (m \text{ sin. } g t + n \text{ cos. } g t) \int T e^{ft} \text{ sin. } g t \, dt].$$

Résolution de l'équation
$\alpha\varphi [t + a(h + kt)] + \beta\varphi [t + b(h + kt)]$ $+ \gamma\varphi [t + c(h + kt)] + \&c. = T$,
dans laquelle φ dénote une fonction inconnue.

XVIII. On sait que $\varphi [t + a(h + kt)]$ peut se réduire en série de cette manière

$$\varphi t + a(h + kt) \frac{d . \varphi t}{dt} + \frac{1}{2} a^2 (h + kt)^2 \frac{d^2 . \varphi t}{dt^2} +$$
$$\frac{1}{2 . 3} a^3 (h + kt)^3 \frac{d^3 . \varphi t}{dt^3} + \&c.;$$

donc si on développe de même $\varphi [t + b(h + kt)]$, $\varphi [t + c(h + kt)]$ &c., & qu'on fasse $\varphi t = y$, l'équation proposée deviendra

$$(\alpha + \beta + \gamma + \&c.) y +$$
$$(\alpha a + \beta b + \gamma c + \&c.) \times (h + kt) \frac{dy}{dt} +$$
$$\frac{1}{2} (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \&c.) \times (h + kt)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} +$$
$$\frac{1}{2.3} (\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \&c.) \times (h + kt)^3 \frac{d^3 y}{dt^3} +$$
$$\&c.$$
$$= T \quad : \quad : \quad : \quad : \quad : \quad : \quad : \quad (S)$$

Comparant cette équation avec l'équation (H) de l'Art. XV. on a

$A = \alpha + \beta + \gamma + \&c.$
$B = \alpha a + \beta b + \gamma c + \&c.$

$$C = \frac{1}{2}(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \&c.)$$

$$D = \frac{1}{2.3}(\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \&c.)$$

&c.

donc on aura

$$P = \alpha [1 - ka(r+1) + \frac{k^2a^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3a^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.] + \beta [1 - kb(r+1) + \frac{k^2b^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3b^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.] + \gamma [1 - kc(r+1) + \frac{k^2c^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3c^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.] + \&c. = 0;$$

équation, d'où l'on tirera les valeurs $r1$, $r2$, $r3$ &c. de r, dont le nombre sera infini; de sorte que la valeur de y sera exprimée par une suite infinie, telle que

$$-k\left(\frac{\theta 1}{Q1} + \frac{\theta 2}{Q2} + \frac{\theta 3}{Q3} + \&c.\right),$$

θ étant $= (h + kt)^{-r-1} \int T(h + kt)^r dt$.

Maintenant il est clair que la valeur de P se réduit à $\alpha(1 + ka)^{-r-1} + \beta(1 + kb)^{-r-1} + \gamma(1 + kc)^{-r-1} + \&c.$ donc $Q = -\alpha(1 + ka)^{-r-1} l(1 + ka) - \beta(1 + kb)^{-r-1} l(1 + kb) - \gamma(1 + kc)^{-r-1} l(1 + kc) - \&c.$

& l'équation à résoudre sera

$$\alpha(1 + ka)^{-r-1} + \beta(1 + kb)^{-r-1} + \gamma(1 + kc)^{-r-1} + \&c. = 0,$$

r étant l'inconnue; or cette résolution réussira dans les deux cas suivans

1.° Lorſque l'équation n'a que deux termes, c'eſt-à-dire qu'on a

$$\alpha(1 + ka)^{-r-1} + \beta(1 + kb)^{-r-1} = 0;$$

car diviſant par $\beta(1 + kb)^{-r-1}$ on a $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1+ka}{1+kb}\right)^{-r-1} + 1 = 0$, d'où l'on tire par les logarithmes

$$r + 1 = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta}}{l\,\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

Qu'on ſuppoſe, ce qui eſt toujours poſſible,

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \lambda(\text{coſ.}\,\omega + \text{ſin.}\,\omega\sqrt{-1})$$

λ étant une quantité réelle & poſitive, on trouvera pour ω une infinité d'angles différens, & l'on aura $l - \frac{\alpha}{\beta} = l\lambda + \omega\sqrt{-1}$, ce qui donnera une infinité de valeurs de r.

Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une quantité réelle poſitive, on fera $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, coſ. $\omega = -1$, & ſin. $\omega = 0$, ce qui donne $\omega = (2\nu + 1)\pi$, ν étant un nombre quelconque entier poſitif, ou négatif, & π dénotant l'angle de 180.°; donc

$$r + 1 = \frac{l\frac{\alpha}{\beta} + (2\nu + 1)\pi\sqrt{-1}}{l\,\frac{1+ka}{1+kb}}$$

& l'on aura les différentes valeurs de r, en faiſant ſucceſſivement $\nu = 1, -1, 2, -2$ &c.

Si $\frac{\alpha}{\beta}$ eſt une quantité réelle négative, $-\frac{\alpha}{\beta}$ ſera réelle poſitive, c'eſt pourquoi on ſuppoſera $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, coſ. ω

$= 1$, fin. $\omega = 0$; d'où $\omega = 2\nu\pi$, & par conféquent

$$r + 1 = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta} + 2\nu\pi\sqrt{-1}}{l\,\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

Enfin fi $\frac{\alpha}{\beta}$ eft une quantité imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$, on aura λ cof. $\omega = -p$, & λ fin. $\omega = -q$, d'où l'on tire $\lambda = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, fin. $\omega = -\frac{q}{\lambda}$, & cof. $\omega = -\frac{p}{\lambda}$. Donc fi on fuppofe que ω' foit le plus petit angle dont le finus $= -\frac{q}{\lambda}$, & le cofinus $= -\frac{p}{\lambda}$, on aura $\omega = \omega' + 2\nu\pi$, ν dénotant comme ci-devant un nombre quelconque entier pofitif ou négatif, d'où

$$r + 1 = \frac{l\lambda + (\omega' + 2\nu\pi)\sqrt{-1}}{l\,\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

2.° Lorfque $1 + kb = (1 + ka)^2$, $1 + kc = (1 + ka)^3$ &c.; car en faifant $(1 + ka)^{-r-1} = p$, l'équation propofée deviendra $\alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 +$ &c. $= 0$, d'où l'on tirera p par les méthodes connues; après quoi on trouvera r par la méthode précédente.

XIX. Si $k = 0$, & $h = 1$, enforte que l'équation à réfoudre foit

$\alpha\varphi(t + a) + \beta\varphi(t + b) + \gamma\varphi(t + c) +$ &c. $= T$, alors, fuivant ce qui a été dit dans l'Article XVII., on trouvera

$P = \alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} + \gamma e^{-\rho c} +$ &c., &

$Q = -\alpha a e^{-\rho a} - \beta b e^{-\rho b} - \gamma c e^{-\rho c} -$ &c.,

& la valeur de y, c'est-à-dire de φt, sera exprimée par la suite infinie

$$-\frac{\theta_1}{q_1}-\frac{\theta_2}{q_2}-\frac{\theta_3}{q_3}-\&c.$$

dans laquelle on aura en général $\theta = e^{-\rho t}\int T e^{\rho t} dt$.

A l'égard des valeurs de ρ on les tirera de l'équation $P = o$, laquelle est résoluble dans les mêmes cas que ci-dessus, savoir lorsque le coéficient γ, & tous les suivans sont nuls, & lorsque $b = 2a$, $c = 3a$ &c. Dans le premier cas on aura $\alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} = o$, d'où l'on tire, en divisant par $\beta e^{-\rho b}$, & prenant les logarithmes

$$\rho = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta}}{b-a} = \frac{l\lambda + \omega\sqrt{-1}}{b-a}.$$ Dans le second on aura, en faisant $e^{-\rho a} = p$, $\alpha + \beta p^2 + \gamma p^3 + \&c. = o$, d'où l'on tirera p, & par conséquent ρ.

Solutions de quelques problêmes concernant le mouvement des fluides.

XX. Si un fluide homogène & non élastique se meut dans un vase de figure quelconque, & qu'on suppose son mouvement arrivé à un état permanent, nommant p & q les vitesses d'une particule quelconque du fluide paralelement à deux axes fixes perpendiculaires entr'eux, & t, x les coordonnées rectangles qui déterminent la position de cette particule par rapport aux mêmes axes, on aura les équations suivantes

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dx} = o, \ \& \ \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dt} = o,$$

(Voyés l'Art. XLII. du Mém. qui a pour titre *Application de la méthode précédente à la solution &c.* inséré dans le Volume précédent).

De ces deux équations on tire celle-ci $\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{d^2p}{dx^2}$, dont l' intégrale eſt

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \psi(t - x\sqrt{-1})$$

φ, & ψ dénotant des fonctions quelconques.

Enſuite l' équation $\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dx}$ donnera

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \psi(t - x\sqrt{-1}).$$

Or dans chaque courbe que les particules du fluide décrivent, on a $\frac{dt}{dx} = \frac{p}{q}$, donc l' équation générale de ces courbes ſera $p\,dx - q\,dt = 0$, ou bien, en ſubſtituant les valeurs de p & q, & intégrant enſuite

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = M$$

M étant une conſtante arbitraire, & Φ, Ψ dénotant des fonctions telles que $\frac{d.\Phi t}{dt} = \varphi t$, & $\frac{d.\Psi t}{dt} = \psi t$; & cette équation devra exprimer auſſi la courbure des parois du vaſe.

Suppoſons que l' axe des t diviſe le vaſe en deux parties égales & ſemblables, il faudra que l' équation dont il s' agit ne contienne aucune puiſſance paire de x; or

$$\Phi(t+x\sqrt{-1}) = \Phi t + \varphi t.x\sqrt{-1} - \varphi' t.\frac{x^2}{2} - \varphi'' t.\frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.}$$

$$\Psi(t-x\sqrt{-1}) = \Psi t - \psi t.x\sqrt{-1} - \psi' t.\frac{x^2}{2} + \psi'' t.\frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.}$$

(on ſuppoſe ici que $\varphi' t = \frac{d.\varphi t}{dt}$, $\varphi'' t = \frac{d.\varphi' t}{dt}$, & ainſi des autres); donc l' équation ſera

$$\Phi t - \Psi t + (\varphi t + \psi t)x\sqrt{-1} - (\varphi' t - \psi' t)\frac{x^2}{2}$$

$$- (\varphi'' t + x'' t)\frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.} = M.$$

Maintenant il eſt clair que les puiſſances impaires de x ne peuvent diſparoitre que dans ces deux cas, 1.° lorſque $\Phi t - \Psi t = M$, ce qui donne, en différentiant deux fois, $\varphi' t - \psi' t = 0$, & ainſi de ſuite; 2.°, lorſque $\varphi t + \psi t = 0$, ce qui donne auſſi $\varphi'' t + \psi'' t = 0$ &c.

Dans le premier cas on aura $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = \Phi(t - x\sqrt{-1}) - M$, & l'équation deviendra

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Phi(t - x\sqrt{-1}) = 0$$

de plus on aura

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}) \quad \&$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$$

où il faut remarquer qu'en faiſant x négative la valeur de p demeure la même, & que celle de q change de ſigne; d'où il s'enſuit que dans ce cas-là les particules du fluide auront autour du diamètre du vaſe des mouvemens ſemblables, & dans le même ſens.

Dans le ſecond cas on aura $\psi(t - x\sqrt{-1}) = -\varphi(t - x\sqrt{-1})$, & intégrant $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = N - \Phi(t - x\sqrt{-1})$, d'où

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) + \Phi(t - x\sqrt{-1}) = M + N,$$

& enſuite

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}).$$

Ici en faiſant x négative p devient négative, & q demeure poſitive, ce qui fait voir que dans ce cas les particules du fluide décrivent de coté & d'autre du diamètre du vaſe des courbes égales & ſemblables, comme dans le cas précédent, mais avec des directions contraires.

Tout ſe réduit donc à trouver la fonction Φ par cette condition que

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) \pm \Phi(t - x\sqrt{-1}) = H,$$

x étant donnée en t par la figure des parois du vaſe, & H étant une quantité conſtante.

Soit $x = h + kt$, ce qui eſt le cas où les parois ſont des lignes droites, & l'équation dont il s'agit ſera réductible à la formule générale de l'Art. XVIII.

On fera donc $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = 0$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -\sqrt{-1}$, $T = H$, $y = \Phi t$, & l'on aura, 1.° $-\frac{\alpha}{\beta} = \mp 1$, & par conſéquent $\lambda = 1$, coſ. $\omega = \mp 1$, ſin. $\omega = 0$; donc $\omega = \mu\pi$, π dénotant la demie circonférence, & μ étant un nombre quelconque impair dans le premier cas, ſavoir dans le cas où l'on prend le ſigne ſupérieur, & un nombre quelconque pair dans l'autre cas; par conſéquent on aura $r + 1 = \frac{\mu\pi\sqrt{-1}}{l\,\frac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}}$; or on ſait que $l\,\frac{1 + \text{tang.}\, u.\sqrt{-1}}{1 - \text{tang.}\, u.\sqrt{-1}} = 2u\sqrt{-1}$; donc, prenant u pour l'arc dont la tangente eſt k, on aura $r + 1 = \frac{\mu\pi}{2u}$. 2.° On aura, par le même Article $Q = -(1 + k\sqrt{-1})^{-r-1}\, l\,(1 + k\sqrt{-1} \mp (1 - k\sqrt{-1})^{-r-1}\, l\,(1 - k\sqrt{-1})$; or, à cauſe de $k = \frac{\text{ſin.}\, u}{\text{coſ.}\, u}$, on a $(1 \pm k\sqrt{-1})^{-r-1} = \text{coſ.}\, u^{r+1}$ $(\text{coſ.}\, u \pm \text{ſin.}\, u \cdot \sqrt{-1})^{-r-1} = \text{coſ.}\, u^{r+1}\, [\text{coſ.}\,(r+1)u \mp \text{ſin.}\,(r+1)u \cdot \sqrt{-1}]$, & $l\,(1 \pm k\sqrt{-1}) = l\,\frac{\text{coſ.}\, u \pm \text{ſin.}\, u.\sqrt{-1}}{\text{coſ.}\, u} = \pm u\sqrt{-1} - l\,\text{coſ.}\, u$; donc on aura pour le premier cas $Q = -2\,\text{coſ.}\, u^{r+1}\,[u\,\text{ſin.}\,(r+1)u - l\,\text{coſ.}\, u \cdot \text{coſ.}\,(r+1)u] =$ (à cauſe de $(r+1)u = \frac{\mu\pi}{2}$) $\mp 2u\,\text{coſ.}\, u^{r+1}$, le ſigne ſupérieur étant pour le cas où μ ſera de la forme $4\nu + 1$, & le ſigne inférieut pour le cas ou μ ſera de la forme $4\nu + 3$; & pour l'autre cas $Q = -2\,\text{coſ.}\, u^{r+1}\,[u\,\text{coſ.}\,(r+1)u$

$\mp l$

$+ l \cos. u \cdot \sin. (r + 1) u] \sqrt{-1} = \mp 2 u \cos. u^{r+1} . \sqrt{-1}$, le signe supérieur étant pour le cas où μ est de la forme 4ν, & le signe inférieur pour le cas où μ est de la forme $4 \nu + 2$; 3.° On aura, à cause de $T = H$,

$$\int T (h + k t)^r dt = \frac{H}{(r+1) k} (h + k t)^{r+1} + \text{const.};$$

donc $\theta = \frac{H}{(r+1) k} + (h + k t)^{-r-1} \times \text{const.}$

Donc on aura en général dans le premier cas

$$- k \frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u (r+1) \cos. u^{r+1}} + (h + k t)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Et dans le second cas

$$- k \frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u (r+1) \cos. u^{r+1} \sqrt{-1}} + (h + k t)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Ainsi substituant au lieu de $r + 1$ sa valeur $\frac{\mu \pi}{2 u}$, & mettant successivement au lieu de μ tous les nombres entiers positifs & négatifs, on aura tous les termes qui doivent entrer dans la valeur de y.

Il y a cependant un cas à excepter; c'est celui où $\mu = 0$, & par conséquent $r = -1$; dans ce cas on aura $\int T (h + k t)^r dt = \frac{H}{k} l (h + k t) + \text{const.}$, & par conséquent

$$- k \frac{\theta}{Q} = \frac{H}{2 u \sqrt{-1}} l (h + k t) + \text{const.}$$

Donc faisant pour abreger $\cos. u^{\frac{\pi}{2 \mu}} = p$, $(h + k t)^{\frac{\pi}{2 u}} = z$, & prenant des constantes arbitraires A, B, C &c. a, b, c &c., on aura pour l'équation

$$\Phi [t + (h + k t) \sqrt{-1}] + \Phi [t - (h + k t) \sqrt{-1}] = H,$$

$$\Phi t = A z + a z^{-1} + B z^3 + b z^{-3} + \&c. + \frac{H}{\pi} \left(p + \frac{1}{p} - \frac{1}{3} p^3 - \frac{1}{3 p^3} + \frac{1}{5} p^5 + \frac{1}{5 p^5} - \&c.\right) \times l$$

& pour l'équation

$$\Phi\,[t + (h + kt)\sqrt{-1}\,] - \Phi\,[t - (h + kt)\sqrt{-1}\,] = H,$$

$$\Phi t = \frac{H}{2u\sqrt{-1}}\, l\,(h + kt) + A\zeta^2 + a\zeta^{-2} + B\zeta^4 + b\zeta^{-4}$$
$$+ \text{\&c.} + \text{conſt.}$$

Or $p - \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{5}p^5 - \text{\&c.} = \text{arc. tang. } p$, & $\frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \text{\&c.} = \text{arc. cot. } p$; donc la ſomme de ces deux ſéries ſera $= \frac{\pi}{2}$; par conſéquent on aura pour la première équation

$$\Phi t = A\zeta + a\zeta^{-1} + B\zeta^3 + b\zeta^{-3} + \text{\&c.} + \frac{H}{2}.$$

Connoiſſant ainſi la nature de la fonction Φ, on trouvera par la différentiation la fonction φ, & par conſéquent les expreſſions des viteſſes p & q; & l'on déterminera enſuite les conſtantes arbitraires A, a, B, b &c. par les valeurs connues, & données de p & q, lorſque $t = 0$.

XXI. Si $k = 0$, de manière que le fluide ſe meuve dans un canal rectiligne, & dont la largeur ſoit par tout $= 2k$, on ſuppoſera k infiniment petite, & l'on aura d'abord $u = k$; faiſant enſuite $k = \alpha h$, α étant une quantité évanouiſſante, on aura $(h + kt)^{\frac{\pi}{2u}} = h^{\frac{\pi}{2u}}$ $(1 + \alpha t)^{\frac{\pi}{2\alpha b}} = h^{\frac{\pi}{2k}} \times e^{\frac{\pi t}{2k}}$; & $l(h + kt) = lh(1 + \alpha t)$ $= lh + \alpha t$; par conſéquent $\frac{H}{2u\sqrt{-1}}\, l\,(h + kt) =$ $\frac{Hlb}{2k\sqrt{-1}} + \frac{Ht}{2b\sqrt{-1}}$. Donc ſi on fait $\zeta = e^{\frac{\pi t}{2k}}$, on aura pour Φt les mêmes expreſſions que dans l'Article précé-

dent, excepté qu'au lieu de $\frac{H}{2u\sqrt{-1}}\, l\,(h + kt)$, il faudra mettre $\frac{Ht}{2h\sqrt{-1}}$.

XXII. Si on ne vouloit pas que le vase eut deux parties égales & semblables, alors nommant x les ordonnées qui répondent à l'une des parois, & x' celles qui répondent à l' autre, on aura les deux équations

$$\Phi\,(t + x\sqrt{-1}) - \Psi\,(t - x\sqrt{-1}) = M, \quad \&$$
$$\Phi\,(t + x'\sqrt{-1}) - \Psi\,(t - x'\sqrt{-1}) = N,$$

par le moyen desquelles on déterminera les fonctions Φ, & Ψ.

Si les deux parois sont des lignes droites, de sorte que $x = h + kt$, & $x' = h' + k't$, on en viendra à boût de la manière suivante. On supposera $h' = h + H$, $k' = k + K$, & la seconde équation deviendra, en faisant $H + Kt = X$,

$$\Phi\,(t + x\sqrt{-1} + X\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1} - X\sqrt{-1}) = N.$$

Soit maintenant $\Phi\,(t + x\sqrt{-1}) = y$, & $\Psi\,(t - x\sqrt{-1}) = y'$; on aura ces deux équations

$$y - y' = M, \quad \&$$
$$y + \frac{dy}{dt} X\sqrt{-1} + \frac{d^2y}{2\,dt^2}(X\sqrt{-1})^2 + \frac{d^3y}{2.3\,dt^3}(X\sqrt{-1})^3 + \&c.$$
$$- y' + \frac{dy'}{dt} X\sqrt{-1} - \frac{d^2y}{2dt^2}(X\sqrt{-1})^2 + \frac{d^3y}{2.3\,dt^3}(X\sqrt{-1})^3 - \&c. = N.$$

La première donne $y' = y - M$, $\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ &c.; donc la seconde deviendra $2\frac{dy}{dt} X\sqrt{-1} + 2\frac{d^3y}{2.3\,dt^3}(X\sqrt{-1})^3 + \&c. + M = N$, ou bien

$$2\sqrt{-1}\,(H + Kt)\frac{dy}{dt} + 2\frac{(\sqrt{-1})^3}{2.3}(H + Kt)^3\frac{d^3y}{dt^3}$$
$$+ 2\frac{(\sqrt{-1})^5}{2.3.4.5}(H + Ht)^5\frac{d^5y}{dt^5} - \&c. = N - M;$$

équation qui eſt dans le cas de la formule (S) de l'Article XVIII.; & l'on aura $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -\sqrt{-1}$; $h = H$, $k = K$; donc &c.

On trouvera ainſi la valeur de y en t, après quoi on aura celle de y' par l'équation $y' = y - M$.

XXIII. Les équations $p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1})$, $\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$ trouvées dans l'Art. XX. donnent

$$p \pm \frac{q}{\sqrt{-1}} = 2\,\varphi(t \pm x\sqrt{-1});$$

ou bien, en faiſant $P = \frac{p}{2}$, $Q = -\frac{q}{2}$,

$$\varphi(t + x\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1};$$

ainſi pour trouver les viteſſes p, & q, il ne s'agit que de réduire l'expreſſion $\varphi(t + x\sqrt{-1})$ à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P, & Q étant des quantités réelles.

Lorſque la fonction φ eſt donnée algébriquement, on peut trouver les valeurs de P, & Q par les méthodes connues; mais ſi la fonction φ eſt inconnue, alors il faut avoir recours aux ſéries, leſquelles donnent

$$P = \varphi t - \frac{x^2}{2}\varphi''t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV}t - \&c. \quad \&$$

$$Q = x\varphi't - \frac{x^3}{2.3}\varphi'''t + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{V}t - \&c.$$

Or je remarque 1.° que ces deux ſéries deviennent divergentes, lorſque x^2 eſt fort grande, 2.° qu'elles demandent qu'on connoiſſent les différences de la fonction φt, de ſorte qu'elles ne peuvent être d'uſage dans la pratique que lorſque la fonction φ eſt connue analitiquement, & nullement lorſque cette fonction n'eſt donnée que mécaniquement, c'eſt-à-dire par le moyen d'une courbe; ainſi je crois qu'il ne ſera pas inutile de faire voir, comment

on peut transformer ces mêmes séries en d'autres qui dépendent uniquement de la fonction φ.

Pour cet effet je prends la quantité

$$\frac{\varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1})}{2},$$

laquelle étant réduite en série devient

$$\varphi t - \frac{x^2}{2}\varphi''t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV}t - \frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{VI}t + \&c.$$

je prends de plus la quantité

$$\frac{\varphi(t + x) + \varphi(t - x)}{2},$$

laquelle se change de même en celle-ci

$$\varphi t + \frac{x^2}{2}\varphi''t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV}t + \frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{VI}t + \&c.$$

j'appelle la première de ces deux quantité y, & la seconde y; ensuite je suppose que Y, Y', Y'', Y''' &c. soient les valeurs de y, lorsque au lieu de x on y met o, $1x$, $2x$, $3x$ &c., & prenant des coéficiens arbitraires α, α', α'', α''' &c., j'aurai

$$\begin{aligned} &y - \alpha Y - \alpha' Y' - \alpha'' Y'' - \alpha''' Y''' - \&c. \\ &= (1 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \&c.)\varphi t \\ &- (1 + \alpha' + 4\alpha'' + 9\alpha''' + \&c.)\frac{x^2}{2}\varphi''t \\ &+ (1 - \alpha' - 2^4\alpha'' - 3^4\alpha''' - \&c.)\frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV}t \\ &- (1 + \alpha' + 2^6\alpha'' + 3^6\alpha''' + \&c.)\frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{VI}t \\ &\&c. \end{aligned}$$

Soit

$$\left.\begin{aligned} &1 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \&c. = 0 \\ &1 + \alpha' + 4\alpha'' + 9\alpha''' + \&c. = 0 \\ &1 - \alpha' - 2^4\alpha'' - 3^4\alpha''' - \&c. = 0 \\ &1 + \alpha' + 2^6\alpha'' + 3^6\alpha''' + \&c. = 0 \end{aligned}\right\} . (T)$$

& ainsi de suite, on aura

$y = \alpha Y + \alpha' Y' + \alpha'' Y'' + \alpha''' Y''' + \&c.$

Tout ſe réduira donc à tirer les valeurs de α', α'', α''' &c. des équations, (T). Pour y parvenir, je multiplie la ſeconde par β', la troiſiéme par β'', la quatriéme par β''' &c.; β', β'', β''' &c. étant des coéficiens indéterminés, après quoi je les ajoute toutes enſemble, ce qui me donne

$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. - \alpha - 1$
$(1 - \beta' + \beta'' - \beta''' + \&c.)\, \alpha' -$
$(1 - 4\beta' + 2^4\beta'' - 2^6\beta''' + \&c.)\, \alpha'' -$
$(1 - 9\beta' + 3^4\beta'' - 3^6\beta''' + \&c.)\, \alpha''' - \&c. = 0.$

A préſent pour avoir la valeur d' une α quelconque, comme α^m je fais égal à zero chacun des coéficiens des autres α; de cette manière j' ai d' abord

$$\alpha^m = \frac{1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. - \alpha}{1 - m^2 \beta' + m^4 \beta'' - m^6 \beta''' + \&c.},$$

& enſuite les équations de condition

$1 - \beta' + \beta'' - \beta''' + \&c. = 0$
$1 - 4\beta' + 2^4\beta'' - 2^6\beta''' + \&c. = 0$
&c.

c'eſt-à-dire l' équation

$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 + \&c. = 0,$

laquelle doit avoir lieu, en mettant au lieu de u tous les nombres entiers 1, 2, 3 &c. à l' infini, excepté m. Donc ſi on multiplie cette équation par $1 - \frac{u^2}{m^2}$, & qu'on ſuppoſe $u = \frac{z}{\pi}$, on aura

$$1 - \frac{\beta' + \frac{1}{m^2}}{\pi^2} z^2 + \frac{\beta'' + \frac{\beta'}{m^2}}{\pi^4} z^4 - \frac{\beta''' + \frac{\beta''}{m^2}}{\pi^6} z^6$$

$+ \&c. = 0$

équation, dont les racines feront π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ &c. à l' infini; donc comparant cette équation avec l'équation

$$\frac{\text{fin. } z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.7} + \&c. = 0,$$

dont les racines font auffi, comme l'on fait, π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ &c., on aura

$$\beta' + \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{2.3},$$

$$\beta'' + \frac{\beta'}{m^2} = \frac{\pi^4}{2.3.4.5},$$

$$\beta''' + \frac{\beta''}{m^2} = \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7},$$

&c.

par où l'on connoîtra les valeurs des quantités β; mais pour notre objet il fuffit de remarquer que

$$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 + \&c. = \frac{\text{fin. } \pi u}{\pi u \left(1 - \frac{u^2}{m^2}\right)}.$$

Car, faifant 1.° $u^2 = -1$, favoir $u = \sqrt{-1}$, on aura

$$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. = \frac{\text{fin. } (\pi \sqrt{-1})}{\pi \sqrt{-1} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}.$$

2.° Si on fuppofe $u = m$ on trouvera, en différentiant le numérateur & le dénominateur, à caufe que l'un & l'autre s'évanouiffent lorfque $u = m$,

$$1 - \beta' m^2 + \beta'' m^4 - \beta''' m^6 + \&c. = -\frac{\text{cof. } m\pi}{2} = \pm \frac{1}{2},$$

le figne fupérieur étant pour le cas où m eft impair, & le figne inférieur pour le cas où m eft pair; donc on aura

$$\alpha^m = \pm \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)} \mp 2\alpha,$$

ou bien, en faisant $\alpha = a \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$,

$$\alpha^n = \pm \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \frac{m^2(1-a) - a}{m^2 + 1};$$

donc enfin

$$y = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left\{ \frac{a}{2} Y + \frac{1-a-a}{1+1} Y' - \frac{4(1-a)-a}{4+1} Y'' + \frac{9(1-a)-a}{9+1} Y''' - \&c. \right\}.$$

Or puisque la quantité a est arbitraire, on la déterminera de manière que la série devienne la plus convergente qu'il est possible; c'est pourquoi on fera $1 - a = 0$, savoir $a = 1$; ce qui donnera

$$y = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left\{ \frac{Y}{2} - \frac{Y'}{1+1} + \frac{Y''}{4+1} - \frac{Y'''}{9+1} + \&c. \right\},$$

& par conséquent

$$\varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \left\{ \frac{1}{2}\varphi t - \frac{\varphi(t+x) + \varphi(t-x)}{1+1} + \frac{\varphi(t+2x) + \varphi(t-2x)}{4+1} - \frac{\varphi(t+3x) + \varphi(t-3x)}{9+1} + \&c. \right\}.$$

Qu'on différentie cette équation en faisant varier x, & qu'on l'intégre ensuite en faisant varier t, on aura

$$[\varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})]\sqrt{-1} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \left\{ \frac{\varphi(t+x) - \varphi(t-x)}{1+1} - 2\frac{\varphi(t+2x) - \varphi(t-2x)}{4+1} + 3\frac{\varphi(t+3x) - \varphi(t-3x)}{9+1} - \&c. \right\}.$$

Donc si on fait

$$P = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2}\varphi t - \frac{\varphi(t+x) + \varphi(t-x)}{1+1} \right.$$

+

$$+ \frac{\varphi(t+2x)+\varphi(t-2x)}{4+1} - \frac{\varphi(t+3x)+\varphi(t-3x)}{9+1} + \&c. \Big\} \ \&$$

$$Q = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} \Big\{ \frac{\varphi(t+x)-\varphi(t-x)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)}{4+1}$$

$$+ 3\,\frac{\varphi(t+3x)-\varphi(t-3x)}{9+1} - \&c. \Big\},$$

on aura

$$\varphi(t \pm x\sqrt{-1}) = P \pm Q\sqrt{-1};$$

& les quantités P & Q feront données, comme l'on voit, par des ſuites convergentes dont chaque terme pourra ſe déterminer mécaniquement ſans qu'il ſoit beſoin de connoître la nature de la fonction φ.

XXIV. Il eſt clair que l'intégrale de l'équation $\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{d^2p}{dx^2}$ (*Art. XX.*) eſt auſſi

$$p = \varphi(x + t\sqrt{-1}) + \psi(x - t\sqrt{-1})$$

ou ce qui revient au même

$$p = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

$$- \frac{\psi(x+t\sqrt{-1}) - \psi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

d'où l'on tire enſuite

$$q = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{\psi(x+t\sqrt{-1}) + \psi(x-t\sqrt{-1})}{2}.$$

Imaginons que le vaſe ſoit formé de deux parois droites & paralelles enſorte qu'il ait par tout la même largeur a; en prenant une de ces parois pour l'axe des t, il faudra que la viteſſe q ſoit nulle lorſque $x = 0$, & lorſque $x = a$, quel que ſoit t. Or en faiſant $t = 0$, on a $p = \varphi x$, & $q = \psi x$; ainſi, en décrivant ſur la portion de l'axe des x compriſe entre les parois

du vase, deux courbes qui soient les échelles des vitesses p & q que doivent avoir les particules du fluide dans cette section du vase, les appliquées de ces courbes répondantes à une abscisse quelconque x représenteront les fonctions φx & ψx.

Présentement on trouvera par l'Art. préc.

$$p = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \varphi x - \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{1+1} + \frac{\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t)}{4+1} - \&c. \right\} - \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$
$$\times \left\{ \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{4+1} - 2\frac{\psi(x+2t) - \psi(x-2t)}{4+1} + \&c. \right\}$$

$$\& \; q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{1+1} - 2\frac{\varphi(x+2t) - \varphi(x-2t)}{4+1} + \&c. \right\} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$
$$\times \left\{ \frac{1}{2} \psi x - \frac{\psi(x+t) + \psi(x-t)}{1+1} + \frac{\psi(x+2t) + \psi(x-2t)}{4+1} - \&c. \right\}$$

Donc puisque q doit être $= 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$, il faudra que l'on ait

$$\frac{\varphi t - \varphi - t}{1+1} - 2\frac{\varphi 2t - \varphi - 2t}{4+1} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2} \psi 0 - \frac{\psi t + \psi - t}{1+1} + \frac{\psi 2t + \psi - 2t}{4+1} - \&c. = 0$$
$$\frac{\varphi(a+t) - \varphi(a-t)}{1+1} - 2\frac{\varphi(a+2t) - \varphi(a-2t)}{4+1} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2} \psi a - \frac{\psi(a+t) + \psi(a-t)}{1+1} + \frac{\psi(a+2t) + \psi(a-2t)}{4+1}$$
$$- \&c. = 0,$$

ou bien, afin que les fonctions φ & ψ ne dépendent point l'une dans l'autre

$$\frac{\varphi t - \varphi - t}{1+1} - 2\frac{\varphi 2t - \varphi - 2t}{4+1} + \&c. = 0$$

$$\frac{\varphi(a+t) - \varphi(a-t)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(a+2t) - \varphi(a-2t)}{4+1} + \&c. = 0$$

$$\frac{1}{2}\psi 0 - \frac{\psi t + \psi - t}{1+1} + \frac{\psi 2t + \psi - 2t}{4+1} - \&c. = 0$$

$$\frac{1}{2}\psi a - \frac{\psi(a+t) + \psi(a-t)}{1+1} + \frac{\psi(a+2t) + \psi(a-2t)}{4+1} + \&c. = 0;$$

Pour satisfaire à ces quatre conditions, on supposera que les fonctions φ & ψ soient telles que l'on ait en général, quelle que soit la valeur de u,

$$\varphi u = \varphi - u,\ \varphi(a+u) = \varphi(a-u),$$
$$\psi u = -\psi - u,\ \psi(a+u) = -\psi(a-u);$$

ce qui servira à déterminer la continuation des deux échelles données pour les abscisses négatives & pour les abscisses plus grandes que a, laquelle devra par conséquent être telle que les ordonnées également distantes de part & d'autre des deux extrémités de l'axe a soient égales & de même signe dans la courbe des vitesses p, & de signes différens dans la courbe des vitesses q; d'où il s'ensuit que la première de ces courbes sera composée d'une infinité de branches égales & semblables, toutes du même côté de l'axe, & disposées alternativement en sens contraire, & que l'autre aura de même une infinité de branches égales & semblables, mais situées alternativement au dessus & au dessous de l'axe.

Ayant donc décrit ces deux courbes, on aura par les séries données ci-dessus les valeurs approchées des vitesses p & q de chaque particule du fluide; d'où l'on voit que le mouvement d'un fluide qui se meut dans un canal droit est déterminé par le mouvement que ce fluide a dans une section quelconque de ce même canal.

De plus il est clair par la nature des courbes qui représentent les fonctions φ & ψ qu'en augmentant, ou en diminuant la quantité t de $2a$, ou de $4a$, ou de $6a$ &c. les valeurs de p & de q demeurent les mêmes; d'où il

s'ensuit, que si on imagine le fluide divisé en portions égales par des droites perpendiculaires aux parois du canal, & placées à la distance $2a$ les unes des autres, chacune de ces portions du fluide aura nécessairement le même mouvement.

Si le fluide étoit terminé par une ligne droite perpendiculaire aux parois du vase, alors prenant cette même ligne pour l'axe des x il faudroit que $p = 0$ lorsque $t = 0$, donc $\varphi x = 0$, & par conséquent

$$p = -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left\{\frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+1} - 2\,\frac{\psi(x+2t) - \psi(x-2t)}{4+1} + \&c.\right\} \; \&$$

$$q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\psi x - \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+1} + \frac{\psi(x+2t) + \psi(x-2t)}{4+1} - \&c.\right\}$$

Or puisque la valeur de p est nulle lorsque $t = 0$ elle le sera aussi lorsque $t = 2a$, ou $= 4a$ &c.; ainsi le fluide aura dans ce cas le même mouvement que s'il étoit renfermé dans un vase de figure rectangulaire dont la longueur fût double, ou quadruple &c. de la largeur.

On pourra encore trouver le mouvement du fluide lorsque la longueur du vase sera égale à sa largeur, & en général toutes les fois que les deux dimensions du vase seront commensurables entr'elles; mais il faudra pour lors que les valeurs données de q forment une courbe qui ait un, ou plusieurs nœuds, de sorte que la fonction ψx demeure la même en augmentant ou en diminuant x d'une quantité égale à la longueur du vase. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire, lorsque les dimensions du vase seront incommensurables, on ne pourra déterminer le mouvement du fluide par la théorie précédente; & comme cette théorie est fondée sur la supposition que le mouvement du fluide

ſoit dans un état conſtant, enſorte que les particules du fluide décrivent des courbes invariables, ce ſera une marque que l' hypothéſe dont nous parlons n' aura point lieu; ſur quoi voyés les Art. XLII. & XLIII. de la Diſſertation citée ci-deſſus.

Solution d' une queſtion rélative à la théorie des cordes vibrantes.

XXV. La queſtion que je vais examiner ici conſiſte à ſavoir ſi toutes les courbes qui rendent la ſolution du problême des cordes vibrantes poſſible, ſuivant la théorie de M. D'Alembert, ſont renfermées ou non dans l' équation

$$y = \alpha \text{ ſin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ ſin. } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ ſin. } \frac{3\pi x}{a} + \&c.;$$

queſtion que ce grand Géomêtre a vivement agitée avec MM. Bernoulli & Euler dans le premier Mémoire de ſes Opuſcules Mathématiques.

Pour pouvoir réſoudre cètte queſtion d' une manière directe & convaincante, je prends l' équation générale de la courbe que forme la corde vibrante, laquelle eſt comme l' on ſait,

$$y = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2},$$

& j' examine quelle doit être la forme de la fonction φ pour que l' on ait en général quel que ſoit t,
$\varphi t + \varphi - t = 0$, & $\varphi(a+t) + \varphi(a-t) = 0$, conditions néceſſaires pour que les deux bouts de la corde ſoient fixes; or puiſque $\varphi t = -\varphi - t$ on aura $\varphi(a-t) = -\varphi - (a-t) = -\varphi(t-a)$; donc la ſeconde des deux conditions ſe réduira à celle-ci

$$\varphi(t+a) - \varphi(t-a) = 0.$$

Cette équation étant comparée avec la formule de l'Art. XIX., on aura $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $b = -a$, $T = 0$; donc $P = e^{-pa} - e^{pa}$; & faisant $p = -r\sqrt{-1}$, $P = 2 \sin. ra \times \sqrt{-1}$; donc l'équation $P = 0$ donnera $ra = \mu\pi$, μ étant un nombre entier positif, ou négatif; par conséquent on aura $r = \frac{\mu\pi}{a}$, & $p = -\frac{\mu\pi}{a}\sqrt{-1}$; or, T étant $= 0$, on aura $\int T e^{pt} dt =$ const.; donc $\frac{\theta}{q} = e^{\frac{\mu\pi t}{a}\sqrt{-1}} \times$ const.; donc, donnant successivement à μ toutes ses valeurs 1, -1, 2, -2 &c., & prenant des constantes arbitraires A, B, C &c., A', B', C', on aura

$$\varphi t = A e^{\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}} + A' e^{-\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}} + B e^{\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}} + B' e^{-\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}} + \&c.$$

équation qui revient à cette forme

$$\varphi t = \alpha \sin. \frac{\pi t}{a} + \alpha' \cos. \frac{\pi t}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi t}{a} + \beta' \cos. \frac{2\pi t}{a} + \&c.$$

α, α', β, β' &c. étant pareillement des constantes arbitraires.

Or par la première condition il faut que $\varphi t + \varphi - t = 0$, donc $\alpha' \cos. \frac{\pi t}{a} + \beta' \cos. \frac{2\pi t}{a} + \&c. = 0$, donc $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$ &c., donc

$$\varphi t = \alpha \sin. \frac{\pi t}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi t}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi t}{a} + \&c.$$

par conséquent l'équation de la figure initiale de la corde, lorsqu'elle en a une, ne peut être que de la forme

$$y = \alpha \sin. \frac{\pi x}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + ly' + m\frac{dy'}{dt}$$
$$+ n\frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda y'' + \mu\frac{dy''}{dt} + \nu\frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T,$$
$$L'y + M'\frac{dy}{dt} + N'\frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + l'y' + m'\frac{dy'}{dt}$$
$$+ n'\frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda'y'' + \mu'\frac{dy''}{dt} + \nu'\frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T',$$
$$L''y + M''\frac{dy}{dt} + N''\frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + l''y' + m''\frac{dy'}{dt}$$
$$+ n''\frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda''y'' + \mu''\frac{dy''}{dt^2} + \nu''\frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T'',$$
&c.

dans lesquelles L, M, N &c. l, m, n &c. &c. *sont des fonctions quelconques de* t.

XXVI. En suivant les mêmes principes que dans l'Art. I. on multipliera la première de ces équations par $z\,dt$, la seconde par $z'dt$, la troisiéme par $z''dt$, & ainsi de suite, z, z', z'' &c. étant de nouvelles indéterminées, & après les avoir ajoutées ensemble, on en prendra l'intégrale en faisant disparoitre par des intégrations par parties, les différences des variables y, y', y'' &c. de dessous le signe $\int$; de cette manière on aura une équation de la forme suivante

$$U + \int(Vy + V'y' + V''y'' + \&c.)\,dt$$
$$= \int(Tz + T'z' + T''z'' + \&c.)\,dt,$$

dans laquelle

$$U = y\,(Mz - \frac{d.Nz}{dt} + \&c. + M'z' - \frac{d.N'z'}{dt^2} + \&c.$$
$$+ M''z'' - \frac{d.N''z''}{dt} + \&c.)$$

$$+\frac{dy}{dt}(N\zeta - \&c. + N'\zeta' - \&c. + N''\zeta'' - \&c.) + \&c.$$

$$+y'(m\zeta - \frac{d.nz}{dt} + \&c. + m'\zeta' - \frac{d.n'z'}{dt^2} + \&c.$$

$$+ m''\zeta'' - \frac{d.n''z''}{dt} + \&c.)$$

$$+\frac{dy'}{dt}(n\zeta - \&c. + n'\zeta' - \&c. + n''\zeta'' - \&c.) + \&c.$$

$$+y''(\mu\zeta - \frac{d.\nu z}{dt} + \&c. + \mu'\zeta' - \frac{d.\nu'z'}{dt^2} + \&c.$$

$$+ \mu''\zeta'' - \frac{d.\nu''z''}{dt} + \&c.)$$

$$+\frac{dy''}{dt}(\nu\zeta - \&c. + \nu'\zeta' - \&c. + \nu''\zeta'' - \&c.) + \&c. \&c.$$

$$\& V = L\zeta - \frac{d.Mz}{dt} + \frac{d^2.Nz}{dt^2} - \&c.$$

$$+ L'\zeta' - \frac{d.M'z'}{dt} + \frac{d^2.N'z'}{dt} - \&c.$$

$$+ L''\zeta'' - \frac{d.M''z''}{dt} + \frac{d^2.N''z''}{dt^2} - \&c. \&c.$$

$$V' = l\zeta - \frac{d.mz}{dt} + \frac{d^2.nz}{dt^2} - \&c.$$

$$+ l'\zeta' - \frac{d.m'z'}{dt} + \frac{d^2.n'z'}{dt^2} - \&c.$$

$$+ l''\zeta'' - \frac{d.m''z''}{dt} + \frac{d^2.n''z''}{dt^2} - \&c. \&c.$$

$$V'' = \lambda\zeta - \frac{d.\mu z}{dt} + \frac{d^2.\nu z}{dt^2} - \&c.$$

$$+ \lambda'\zeta' - \frac{d.\mu'z'}{dt} + \frac{d^2.\nu'z'}{dt^2} - \&c.$$

$$+ \lambda''\zeta'' - \frac{d.\mu''z''}{dt} + \frac{d^2.\nu''z''}{dt^2} - \&c. \&c.$$

Suppoſant donc $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. on aura

$$U = \int (T\zeta + T'\zeta' + T''\zeta'' + \&c.)\, dt$$

équation, dans laquelle les plus hautes différences des variables y, y', y'' &c. se trouveront moins élevées d' une unité que dans les équations différentielles proposées.

On aura donc autant de pareilles intégrales, qu'on trouvera de valeurs particulières de chacune des quantités z, z', z'', &c. par le moyen des équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. Or soit m la somme des exposans des plus hautes différences de y, y', y'' &c. dans les équations proposées, il est clair que la quantité U contiendra autant d'inconnues comme y, y', y'' &c. $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$ &c. &c. qu'il y a d' unités dans le nombre m; donc si on a aussi m valeurs particuliéres de z, de z', de z'' &c., on trouvera facilement les valeurs générales & complétes de y, y', y'' &c.

Soient maintenant Y, Y', Y'' &c. les premiers membres des équations proposées, on aura

$$\int (Yz + Y'z' + Y''z'' + \text{\&c.})\, dt = U$$
$$+ \int (Vy + V'y' + V''y'' + \text{\&c.})\, dt \;.\;.\;.\; (U);$$

donc faisant $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c., on aura l' équation

$$U - \int (Yz + Y'z' + Y''z'' \text{ \&c.})\, dt = \text{const.},$$

laquelle aura nécessairement toutes les valeurs de z, z', z'' &c. communes avec les équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. Or l' équation (U) est identique, & par conséquent ne dépend point des valeurs de y, y', y'' &c.; donc on peut supposer ces valeurs telles que $Y = 0$, $Y' = 0$, $Y'' = 0$ &c.; & l' on aura par ce moyen l' équation $U = \text{const.}$, dans laquelle on regardera les quantités y, y', y'' &c. $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$ &c. &c. comme données, & les quantités z, z', z'' &c. $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$,

$\frac{dz''}{dt}$ &c. &c. comme indéterminées; or il eſt aiſé de voir que ces indéterminées ſeront auſſi au nombre de m; ſi donc on a m valeurs particuliéres de chacune des quantités y, y', y'' &c. dans les équations $Y = 0$, $Y' = 0$, $Y'' = 0$ &c., on aura auſſi, par la ſubſtitution ſucceſſive de ces valeurs dans l'équation $U =$ conſt., m équations particuliéres, d'où l'on tirera les valeurs de z, z', z'' &c., leſquelles contiendront néceſſairement m conſtantes arbitraires; de ſorte qu'en faiſant ſucceſſivement toutes ces conſtantes, hors une, égales à zéro, on aura m valeurs particuliéres de z, de z', de z'' &c. Donc &c.

XXVII. De là réſulte ce théorème.

Les équations propoſées ſeront intégrables algébriquement, ſi on peut trouver, dans le cas de $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$ &c., autant de valeurs particuliéres de chacune des quantités y, y', y'' &c. qu'il y a d'unités dans la ſomme des expoſans des plus hautes différences de ces variables.

Au reſte ce théorème n'eſt qu'une ſuite de celui de l'Art. VI. Car il eſt clair que les équations propoſées peuvent toujours réduire à ne contenir chacune qu'une ſeule variable; & il eſt facile de s'aſſurer par le calcul que les réduites ſeront néceſſairement de l'ordre m; donc &c.

XXVIII. Les équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. ſont intégrables en général lorſque

$L = A\,(h + kt)^p$, $M = B\,(h + kt)^{p+1}$, $N = C\,(h + kt)^{p+2}$ &c., $L' = A'\,(h + kt)^p$, $M' = B'\,(h + kt)^{p+1}$ &c. &c.,

& de même

$l = a\,(h + kt)^q$, $m = b\,(h + kt)^{q+1}$, $n = c\,(h + kt)^{q+2}$ &c., $l' = a'\,(h + kt)^q$, $m' = b'\,(h + kt)^{q+1}$ &c. &c.,

& ainſi des autres.

On fera dans ce cas
$z = R(h + kt)^r$, $z' = R'(h + kt)^r$,
$z'' = R''(h + kt)^r$ &c.
R, R', R'', &c. étant ainsi que r des constantes indéterminées; on substituera ces valeurs dans les équations dont il s'agit, & divisant ensuite la première par $(h + kt)^{p+r}$, la seconde par $(h + kt)^{q+r}$ &c. on aura des équations sans t, qui donneront les valeurs de r, R, R', R'' &c.

XXIX. Si les coéficiens L, M, N &c., L', M', N' &c. étoient constans, on feroit $k = 0$, $h = 1$, & $r = \frac{\rho}{k}$, ρ étant une quantité finie, & l'on auroit $(h + kt)^r = e^{\rho t}$; par conséquent il faudroit supposer
$z = Re^{\rho t}$, $z' = R'e^{\rho t}$, $z'' = R''e^{\rho t}$ &c.

Méthode générale pour déterminer le mouvement d'un sistéme quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre.

XXX. Soit n le nombre des corps qui composent le sistéme, & nommons y', y'', y''' &c. les espaces infinimens petits que ces corps décrivent dans leus oscillations pendant le tems t, on aura, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre & des ordres plus élevés, des équations de cette forme

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2y'}{dt^2} + A'y' + B'y'' + C'y''' + \&c. + N'y^n = 0,\\ \frac{d^2y''}{dt^2} + A''y' + B''y'' + C''y''' + \&c. + N''y^n = 0,\end{array}\right\} \quad (a)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2y'''}{dt^2}+A'''y'+B'''y''+C'''y'''+\&c.+N'''y^n=0\\ \&c.\\ \frac{d^2y^n}{dt^2}+A^ny'+B^ny''+C^ny'''+\&c.\ N^ny^n=0,\end{array}\right\}\ (a)$$

A', B', C' &c. A'', B'', C'' &c. &c. étant des constantes données par la nature du problême.

Pour intégrer ces équations suivant la méthode expliquée ci-dessus, on multipliera la première par $\lambda' e^{pt} dt$, la seconde par $\lambda'' e^{pt} dt$, la troisiéme par $\lambda''' e^{pt} dt$, & ainsi de suite, λ', λ'', λ''' &c. étant, ainsi que p, des constantes indéterminées; ensuite on les ajoutera ensemble, & on en prendra l'intégrale en faisant disparoitre de dessous le signe $\int$ les différences des variables y', y'', y''' &c.; après quoi on fera $=0$ les coéficiens des quantités $\int y' e^{pt} dt$, $\int y'' e^{pt} dt$, $\int y''' e^{pt} dt$ &c.; de cette manière on aura d'abord l'équation intégrale

$$\left\{\lambda'\left(\frac{dy'}{dt}-py'\right)+\lambda''\left(\frac{dy''}{dt}-py''\right)+\lambda'''\left(\frac{dy'''}{dt}-py'''\right)+\&c.+\lambda^n\left(\frac{dy^n}{dt}-py^n\right)\right\}e^{pt}=\text{const.}\ \ldots\ (b)$$

& ensuite les équations

$$\left.\begin{array}{l}p^2\lambda'+A'\lambda'+A''\lambda''+A'''\lambda'''+\&c.+A^n\lambda^n=0\\ p^2\lambda''+B'\lambda'+B''\lambda''+B'''\lambda'''+\&c.+B^n\lambda^n=0\\ p^2\lambda'''+C'\lambda'+C''\lambda''+C'''\lambda'''+\&c.+C^n\lambda^n=0\\ \&c.\\ p^2\lambda^n+N'\lambda'+N''\lambda''+N'''\lambda'''+\&c.+N^n\lambda^n=0\end{array}\right\}\ (c)$$

lesquelles serviront à déterminer les quantités p, λ', λ'', λ''' &c.

Soit, lorsque $t=0$, $y'=Y'$, $y''=Y''$, $y'''=Y'''$ &c. & $\frac{dy'}{dt}=V'$, $\frac{dy''}{dt}=V''$, $\frac{dy'''}{dt}=V'''$ &c., l'équation (b) deviendra en divisant par e^{pt}

$$\lambda'\frac{dy'}{dt}+\lambda''\frac{dy''}{dt}+\lambda'''\frac{dy'''}{dt}+\&c.+\lambda^n\frac{dy^n}{dt}$$
$$-\rho(\lambda'y'+\lambda''y''+\lambda'''y'''+\&c.+\lambda^ny^n)$$
$$=[\lambda'V'+\lambda''V''+\lambda'''V'''+\&c.+\lambda^nV^n$$
$$-\rho(\lambda'Y'+\lambda''Y''+\lambda'''Y'''+\&c.+\lambda^nY^n)]\,e^{-\rho t}$$

Or comme la quantité ρ ne se trouve dans les équations (c) que sous la forme quadratique ρ^2, il s'ensuit qu'elle peut avoir indifférement le signe $+$ & le signe $-$; donc on aura aussi

$$\lambda'\frac{dy'}{dt}+\lambda''\frac{dy''}{dt}+\lambda'''\frac{dy'''}{dt}+\&c.+\lambda^n\frac{dy^n}{dt}$$
$$+\rho(\lambda'y'+\lambda''y''+\lambda'''y'''+\&c.+\lambda^ny^n)$$
$$=[\lambda'V'+\lambda''V''+\lambda'''V'''+\&c.+\lambda^nV^n$$
$$+\rho(\lambda'Y'+\lambda''Y''+\lambda'''Y'''+\&c.+\lambda^nY^n)]\,e^{\rho t};$$

Donc retranchant ces deux équations l'une de l'autre, & divisant ensuite par 2ρ on aura

$$(d)\ \ldots\ldots\ \lambda'y'+\lambda''y''+\lambda'''y'''+\&c.+\lambda^ny^n$$
$$=(\lambda'Y'+\lambda''Y''+\lambda'''Y'''+\&c.+\lambda^nY^n)\frac{e^{\rho t}+e^{-\rho t}}{2}$$
$$+(\lambda'V'+\lambda''V''+\lambda'''V'''+\&c.+\lambda^nV^n)\frac{e^{\rho t}-e^{-\rho t}}{2\rho}.$$

Qu'on reprenne maintenant les équations (c), & qu'on substitue dans une quelconque de ces équations les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}$, $\frac{\lambda'''}{\lambda'}$, &c. $\frac{\lambda^n}{\lambda'}$ en ρ^2 tirées de $n-1$ autres, valeurs qui seront toujours données, comme l'on voit, par des équations linéaires, on aura une équation qui étant ordonnée par rapport à ρ^2 montera au dégré n, & aura par conséquent n racines. Donc ρ aura, indépendamment de l'ambiguité du signe dont nous avons déja tenu compte, n valeurs que nous dénoterons par $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), ensorte que $(\rho 1)^2$, $(\rho 2)^2$, $(\rho 3)^2$ soient les racines de l'équation dont il s'agit. Donc, si on fait pour abreger

$$\theta = (\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)\, \frac{e^{\rho x} + e^{-\rho x}}{2}$$

$$+ (\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \&c. + \lambda^n V^n)\, \frac{e^{\rho x} - e^{-\rho x}}{2\rho}.$$

& qu'on déſigne par $\lambda' 1$, $\lambda' 2$, $\lambda' 3$ &c. $(\lambda' n)$, $\lambda'' 1$, $\lambda'' 2$, $\lambda'' 2$, $\lambda'' 3$ &c. $(\lambda'' n)$ &c. les valeurs de λ', λ'' &c. qui réſultent de la ſubſtitution de $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn) au lieu de ρ, & que de même $\theta 1$, $\theta 2$, $\theta 3$ &c. (θn) ſoient les valeurs correſpondantes de θ, on aura lieu de l' équation (d) les n ſuivantes

$$\lambda' 1 y' + \lambda'' 1 y'' + \lambda''' 1 y''' + \&c. + \lambda^n 1 y^n = \theta 1$$
$$\lambda' 2 y' + \lambda'' 2 y'' + \lambda''' 2 y''' + \&c. + \lambda^n 2 y^n = \theta 2.$$
$$\lambda' 3 y' + \lambda'' 3 y'' + \lambda''' 3 y''' + \&c. + \lambda^n 3 y^n = \theta 3$$
&c.
$$(\lambda' n) y' + (\lambda'' n) y'' + (\lambda''' n) y''' + \&c. + (\lambda^n n) y^n = (\theta n)$$

par leſquelles il faudra déterminer les n inconnues y', y'', y''' &c. y^n; c' eſt à quoi ſe réduit maintenant toute la difficulté du problême.

Pour en venir à bout, je multiplie la premiere de ces équations par μ', la ſeconde par μ'', la troiſiéme par μ''', & ainſi de ſuite, μ', μ'', μ''' &c. étant des coéficiens indéterminés, puis je les ajoute enſemble, ce qui me donne, en ordonnant les termes par rapport à y', y'', y''' &c.

$$[\mu' \lambda' 1 + \mu'' \lambda' 2 + \mu''' \lambda' 3 + \&c. + \mu^n (\lambda' n)]\, y'$$
$$+ [\mu' \lambda'' 1 + \mu'' \lambda'' 2 + \mu''' \lambda'' 3 + \&c. + \mu^n (\lambda'' n)]\, y''$$
$$+ [\mu' \lambda''' 1 + \mu'' \lambda''' 2 + \mu''' \lambda''' 3 + \&c. + \mu^n (\lambda''' n)]\, y'''$$
&c.
$$+ [\mu' \lambda^n 1 + \mu'' \lambda^n 2 + \mu''' \lambda^n 3 + \&c. + \mu^n (\lambda^n n)]\, y^n$$
$$= \mu' \theta 1 + \mu'' \theta 2 + \mu''' \theta 3 + \&c. + \mu^n (\theta n);$$

d' où l' on tirera aiſément la valeur d' une y quelconque, comme y^s, en égalant à zero chacun des coéficiens des autres y; ainſi l' on aura

$$y^s = \frac{\mu' \theta 1 + \mu'' \theta 2 + \mu''' \theta 3 + \&c. + \mu^n (\theta n)}{\mu' \lambda^s 1 + \mu'' \lambda^s 2 + \mu''' \lambda^s 3 + \&c. + \mu^n (\lambda^s n)} \quad \ldots \quad (e)$$

& ensuite ces équations de condition

$$\left.\begin{array}{l} \mu'\lambda'1 + \mu''\lambda'2 + \mu'''\lambda'3 + \&c. + \mu^n(\lambda'n) = 0 \\ \mu'\lambda''1 + \mu''\lambda''2 + \mu'''\lambda''3 + \&c. + \mu^n(\lambda''n) = 0 \\ \text{\& ainsi de suite, jusqu'à} \\ \mu'\lambda^n 1 + \mu''\lambda^n 2 + \mu'''\lambda^n 3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = 0 \end{array}\right\} (f)$$

à l' exception seulement de celle qui répondroit à l' exposant s.

Supposons que l' on ait en général

$$\mu'\lambda'1 + \mu''\lambda'2 + \mu'''\lambda'3 + \&c. + \mu^n(\lambda'n) = \Delta'$$
$$\mu'\lambda''1 + \mu''\lambda''2 + \mu'''\lambda''3 + \&c. + \mu^n(\lambda''n) = \Delta''$$
$$\mu'\lambda'''1 + \mu''\lambda'''2 + \mu'''\lambda'''3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = \Delta'''$$
&c.
$$\mu'\lambda^n 1 + \mu''\lambda^n 2 + \mu'''\lambda^n 3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = \Delta^n,$$

& qu'il faille trouver la valeur d' une μ quelconque comme μ^m. On multipliera ces équations par des coéficiens indéterminés ν', ν'', ν''' &c. ν^n, & après les avoir ajoutées ensemble, on fera les coéficiens des quantités μ', μ'', μ''' &c. chacun égal à zero, excepté celui de la quantité μ^m; de cette manière on aura

$$\mu^m = \frac{\nu'\Delta' + \nu''\Delta'' + \nu'''\Delta''' + \&c. + \nu^n\Delta^n}{\nu'(\lambda' m) + \nu''(\lambda'' m) + \nu'''(\lambda''' m) + \&c. + \nu^n(\lambda^n m)} \quad . \; . \; (g)$$

& la détermination des quantités ν', ν'', ν''' &c. dépendra de cette condition que

$$\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \&c. + \nu^n\lambda^n = 0 \quad . \; . \; . \; (h)$$

lorsque $\rho = \rho 1, \rho 2, \rho 3$ &c. (ρn), excepté (ρm).

Or les équations (c) étant multipliées par ν', ν'', ν''' &c. & ajoutées ensemble donnent

$$(\rho^2\nu' + A'\nu' + B'\nu'' + C'\nu''' + \&c. + N'\nu^n)\lambda'$$
$$+ (\rho^2\nu'' + A''\nu' + B''\nu'' + C''\nu''' + \&c. + N''\nu^n)\lambda''$$
$$+ (\rho^2\nu''' + A'''\nu' + B'''\nu'' + C'''\nu''' + \&c. + N'''\nu^n)\lambda'''$$
&c.
$$+ (\rho^2\nu^n + A^n\nu' + B^n\nu'' + C^n\nu''' + \&c. + N^n\nu^n)\lambda^n$$
$$= 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (i)$$

Donc si on suppose que les quantités v', v'', v''' &c. v^n, ou plutôt leurs rapports soient tels que les coéficiens de λ', λ'', λ''' &c λ^{n-1} dans cette équation soient nuls chacun en particulier, celui de λ^n le sera aussi; de sorte que l'on aura les n équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \rho^2 v' + A'v' + B'v'' + C'v''' + \&c. + N'v^n = 0 \\ \rho^2 v'' + A''v' + B''v'' + C''v''' + \&c. + N''v^n = 0 \\ \rho^2 v''' + A'''v' + B'''v'' + C'''v''' + \&c. + N'''v^n = 0 \\ \&c. \\ \rho^2 v^n + A^n v' + B^n v'' + C^n v''' + \&c. + N^n v^n = 0 \end{array}\right\} . (k)$$

Et il est bon de remarquer, qu'en éliminant de ces équations les quantités v', v'', v''' &c. on aura une équation finale en ρ^2 qui sera nécessairement la même que celle qui résulte des équations (c) par l'évanouissement des quantités λ', λ'', λ''' &c.; ce qui peut se voir aisément à *priori*.

Faisons maintenant $\rho = (\rho m)$, nous aurons

$$\begin{array}{l} A'v' + B'v'' + C'v''' + \&c. + N'v^n = -(\rho m)^2 v' \\ A''v' + B''v'' + C''v''' + \&c. + N''v^n = -(\rho m)^2 v'' \\ A'''v' + B'''v'' + C'''v''' + \&c. + N'''v^n = -(\rho m)^2 v''' \\ \&c. \\ A^n v' + B^n v'' + C^n v''' + \&c. + N^n v^n = -(\rho m)^2 v^n; \end{array}$$

& l'équation (i) deviendra

$$[\rho^2 - (\rho m)^2] \times [v'\lambda' + v''\lambda'' + v'''\lambda''' + \&c. + v^n\lambda^n] = 0,$$

laquelle devant être vraie pour toutes les valeurs de ρ qui satisfont aux équations (c) d'où celle-ci est tirée, on aura en général

$$v'\lambda' + v''\lambda'' + v'''\lambda''' + \&c. + v^n\lambda^n = 0$$

lorsque $\rho = \rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), excepté (ρm), auquel cas l'équation se vérifie d'elle même, à cause du facteur $\rho^2 - (\rho m)^2$.

D'où l'on voit que les valeurs de v', v'', v''' &c. v^n qui satisfont à la condition (h) sont les mêmes que celles qui résultent des équations (k), en y faisant $\rho = (\rho m)$. Donc

Donc si on dénote ces valeurs par $(\nu' m)$, $(\nu'' m)$, $(\nu''' m)$ &c., & qu'on les substitue dans l'équation (g) on aura

$$\mu^{m} = \frac{(\nu' m)\Delta' + (\nu'' m)\Delta'' + (\nu''' m)\Delta''' + \&c. + (\nu^{n} m)\Delta^{n}}{(\nu' m)(\lambda' m) + (\nu'' m)(\lambda'' m) + (\nu''' m)(\lambda''' m) + \&c. + (\nu^{n} m)(\lambda^{n} m)}.$$

Mais les équations (f) demandent que les quantités Δ', Δ'', Δ''' &c. Δ^{n} soient toutes nulles à l'exception de Δ^{s}, donc si on fait pour abreger

$$\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \&c. + \nu^{n}\lambda^{n} = Q$$

& qu'on dénote en général par $(Q m)$, la valeur de Q lorsque $\rho = (\rho m)$, on aura pour notre cas

$$\mu^{m} = \frac{(\nu^{s} m)\Delta^{s}}{(Q m)},$$

& par conséquent

$$\mu' = \frac{(\nu^{s} 1)\Delta^{s}}{Q 1}, \ \mu'' = \frac{(\nu^{s} 2)\Delta^{s}}{Q 2} \ \&c.$$

Donc enfin substituant ces valeurs dans la formule (e); & faisant attention que

$$\Delta^{s} = \mu'\lambda^{s}1 + \mu''\lambda^{s}2 + \mu'''\lambda^{s}3 + \&c. + \mu^{n}(\lambda^{s} n)$$

on aura

$$y^{s} = \frac{\nu^{s} 1}{Q 1}\theta 1 + \frac{\nu^{s} 2}{Q 2}\theta 2 + \frac{\nu^{s} 3}{Q 3}\theta 3 + \&c. + \frac{(\nu^{s} n)}{(Q n)}(\theta n).$$

Ainsi le problême ne dépend plus que de la résolution des équations (c) & (k).

XXXI. Nous avons trouvé que la quantité $(\nu' m)\lambda' + (\nu'' m)\lambda'' + (\nu''' m)\lambda''' + \&c. + (\nu^{n} m)\lambda^{n}$ est nulle lorsque $\rho = \rho 1, \rho 2, \rho 3$ &c. (ρn), excepté (ρm); or il est facile de voir que les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}$, $\frac{\lambda'''}{\lambda'}$ &c. $\frac{\lambda^{n}}{\lambda'}$ tirées des équations (c) seront exprimées par des fractions telles que $\frac{q''}{q'}$, $\frac{q'''}{q'}$ &c. $\frac{q^{n}}{q'}$, les quantités q', q'', q''' &c. étant de la forme $a + b\rho^{2} + c\rho^{4} + \&c. + h\rho^{2(n-1)}$; de sorte que si on fait, ce qui est permis, $\lambda' = q'$, on

$$= 2\chi \frac{\omega}{\rho 1} \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 3)^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho n)^2}\right)$$

& de même

$$Q2 = -2\chi \frac{\omega}{\rho 1} \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 3)^2}\right) \cdot \cdot \cdot \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho n)^2}\right)$$

Donc si on fait $\frac{dQ}{d\rho} = R$, & qu'on dénote par $R\,1$ ce que devient R lorsque ρ devient $\rho\,1$, on aura $Q\,1 = -\frac{\omega}{(\rho 1)^2} R\,1$, & $Q\,2 = \frac{\omega}{(\rho 1)^2} R\,1$.

Or, en faisant $\rho\,2 = \rho\,1 + \omega$, on a $v^s 2\,\theta\,2 = v^s 1\,\theta\,1 + \frac{d.(v^s 1\,\theta\,1)}{d\rho 1}\,\omega$; donc

$$\frac{v^s 1\,\theta 1}{Q 1} + \frac{v^s 2\,\theta 2}{Q 2} = -\frac{(\rho 1)^2 v^s 1\,\theta 1}{\omega R 1} + \frac{(\rho 1)^2 v^s 1\,\theta 1}{\omega R 1}$$

$$+ \frac{(\rho 1)^2}{\omega R 1} \times \frac{d.(v^s 1\,\theta 1)}{d\rho 1}\,\omega = \frac{(\rho 1)^2}{R 1} \times \frac{d.(v^s 1\,\theta 1)}{d\rho 1}.$$

On résoudra de même le cas de trois racines égales, & ainsi des autres. Au reste il est évident que les termes de la valeur de y^s qui répondent aux racines égales contiendront toujours l'angle t, & de plus des exponentielles ordinaires, si ces racines sont positives, & des *sinus* & des *cosinus* si elles sont négatives.

Enfin s'il se trouvoit des racines imaginaires, on les réduiroit d'abord deux à deux à la forme $a + b\sqrt{-1}$, & $a - b\sqrt{-1}$, a & b étant des quantités réelles, de sorte que $(\rho\,1)^2 = a + b\sqrt{-1}$, $(\rho\,2)^2 = a - b\sqrt{-1}$, & ainsi de suite; ce qui donneroit $\rho\,1 = f + g\sqrt{-1}$, $\rho\,2 = f - g\sqrt{-1}$, & par conséquent $e^{\pm \rho 1 t} = e^{\pm f t} \times e^{\pm g t \sqrt{-1}} = e^{\pm f t}(\text{cos}.\,g\,t \pm \text{sin}.\,g\,t \times \sqrt{-1})$, & de même $e^{\pm \rho 2 t} = e^{\pm f t}(\text{cos}.\,g\,t \mp \text{sin}.\,g\,t \times \sqrt{-1})$. On rameneroit de même à la forme $p + q\sqrt{-1}$, & $p - q\sqrt{-1}$ les valeurs des quantités μ, ν, & Q répondantes à $\rho\,1$ & $\rho\,2$, & on trouveroit aprés les substi-

tutions & les réductions, que les imaginaires se détruiroient dans les deux termes $\frac{r'1}{Q1}\,\theta 1 + \frac{r'2}{Q2}\,\theta 2$, lesquels contiendroient alors des *sinus* & des *cosinus* multipliés par des exponentielles ordinaires.

XXXIII. Au reste quand on veut appliquer la solution précédente au mouvement d'un sistème quelconque de corps, on doit supposer, comme nous l'avons fait, que les quantités y', y'', y''' &c. soient asès petites pour qu'on puisse négliger, sans erreur sensible, dans les expressions des forces accélératrices des corps, les termes qui contiendroient les produits y'^2, $y'y''$ &c. Ainsi il faudra pour que la solution soit bonne *mécaniquement* 1.° que les valeurs initiales Y', Y'', Y''' &c. V', V'', V''' &c. soient infiniment petites. 2.° que les expressions de y', y'', y''' &c. ne contiennent aucun terme qui augmente à l'infini avec le tems t; par conséquent il faudra que les racines de l'équation $P = 0$ soient toutes réelles négatives & inégales, auquel cas la valeur de y' ne contiendra que des *sinus* & des *cosinus* (*Art. préc.*), ou au moins que les termes qui renfermeroient l'arc t disparoissent d'eux mêmes.

Donc 1.° si $(\rho 1)^2$ est une quantité positive, il faudra que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' 1\, Y' + \lambda'' 1\, Y'' + \lambda''' 1\, Y''' + \&c. + \lambda^{n} 1\, Y^{n} = 0 \\ \lambda' 1\, V' + \lambda'' 1\, V'' + \lambda''' 1\, V''' + \&c. + \lambda^{n} 1\, V^{n} = 0 \end{array}\right\} . (l)$$

ce qui fera évanouir le premier terme $\frac{r'1}{Q1}\,\theta 1$ de la valeur de y'.

De même si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient toutes deux positives, mais inégales, on auroit, outre les deux conditions précédentes, encore ces deux-ci

$$\lambda' 2\, Y' + \lambda'' 2\, Y'' + \lambda''' 2\, Y''' + \&c. + \lambda^{n} 2\, Y^{n} = 0$$
$$\lambda' 2\, V' + \lambda'' 2\, V'' + \lambda''' 2\, V''' + \&c. + \lambda^{n} 2\, V^{n} = 0,$$

& il faudroit effacer les deux premiers termes de y^s ; & ainsi de suite.

2.° Si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ sont égales & négatives, on aura les mêmes conditions (l), & les deux termes $\frac{\nu^s 1}{Q 1} \theta 1 + \frac{\nu^s 2}{Q 2} \theta 2$ deviendront, en faisant $\rho 1 = r 1 \sqrt{-1}$,

$$\frac{r 1}{2 R 1} \times \frac{d . \nu^s 1 (\lambda' 1 Y + \lambda'' 1 Y' + \lambda''' 1 Y'' + \&c. + \lambda^n 1 Y^n)}{d r 1} \text{ cos. } r 1 t$$

$$+ \frac{r 1}{2 R 1} \times \frac{d . \frac{\nu^s 1}{r 1} (\lambda' 1 V + \lambda'' 1 V' + \lambda''' 1 V'' + \&c. + \lambda^n 1 V^n)}{d r 1} \text{ sin. } r 1 t.$$

Mais si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient égales & positives, alors on auroit encore deux autres conditions à remplir, savoir

$$\frac{d . \nu^s 1 (\lambda' 1 Y + \lambda'' 1 Y' + \lambda''' 1 Y'' + \&c. \lambda^n 1 Y^n)}{d \rho 1} = 0$$

$$\frac{d . \frac{\nu^s 1}{\rho 1} (\lambda' 1 V + \lambda'' 1 V' + \lambda''' 1 V'' + \&c. + \lambda^n 1 V^n)}{d \rho 1} = 0;$$

& ainsi du reste.

Mais il y a ici une remarque importante à faire ; c'est que les équations (a) n'étant qu'approchées, l'équation $P = 0$ doit aussi être regardée comme telle, de *sorte* que lorsque on trouve des racines égales, on n'est pas en droit d'en conclure que les valeurs de ρ sont égales, mais seulement qu'elles ne différent que par des quantités infiniment petites ; d'où il s'ensuit qu'à la rigueur, l'égalité des racines de l'équation $P = 0$, ne suffit pas pour introduire des arcs de cercle dans les valeurs de y', y'', y''' &c. en tant que ces quantités représentent les espàces parcourus dans les oscillations des corps. Cependant comme la supposition de $\rho 2 = \rho 1 + \omega$, ω étant une quantité très-petite, rend aussi les quantités $Q 1$ & $Q 2$ très-petites du même ordre, comme on peut s'en assûrer par ce qui a été dit

dans l'Art. préc. sur le cas des racines égales, il est clair que les quantités $\frac{\theta 1}{Q1}$ & $\frac{\theta 2}{Q2}$ contiendront des termes finis, & qu'ainsi il faudra, pour que les valeurs de y', y'', y''' &c. soient toujours très-petites, que les termes dont il s'agit disparoissent entiérement de l'expression de y'; ce qui donnera, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre, les mêmes conditions & les mêmes résultats que ci-dessus. Il est clair que ce que nous venons de dire des racines égales, doit avoir lieu de même, lorsque elles ne différent que par des quantités très-petites.

3.° Si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient imaginaires, alors réduisant les quantités $\lambda' 1$, $\lambda'' 1$, $\lambda''' 1$ &c., & $\lambda' 2$, $\lambda'' 2$, $\lambda''' 2$ &c. à la forme $p' + q'\sqrt{-1}$, $p'' + q''\sqrt{-1}$, $p''' + q'''\sqrt{-1}$ &c., & $p' - q'\sqrt{-1}$, $p'' - q''\sqrt{-1}$, $p''' - q'''\sqrt{-1}$ &c. on auroit les conditions suivantes

$$p'Y' + p''Y'' + p'''Y''' + \&c. + p^nY^n = 0,$$
$$p'V' + p''V'' + p'''V''' + \&c. + p^nV^n = 0,$$
$$q'Y' + q''Y'' + q'''Y''' + \&c. + q^nY^n = 0, \&$$
$$q'V' + q''V'' + q'''V''' + \&c. + q^nV^n = 0.$$

On aura de pareilles conditions pour chaque paire de racines imaginaires.

XXXIV. De là on tire une méthode générale pour voir si l'état d'équilibre d'un sistème quelconque donné de corps est *stable*, c'est-à-dire, si les corps étant infiniment peu dérangés de cet état, ils y renviendront d'eux mêmes, ou au moins tendront à y revenir.

On supposera le sistème dans un état infiniment proche de celui d'équilibre, & on cherchera les expressions des forces accélératrices des corps pour se remettre à cette état, lesquelles seront, aux infinimens petits du second or-

dre & des ſuivans près, de cette forme $Ay' + By'' + Cy''' +$ &c., comme nous l' avons ſuppoſé dans les équations (a). On formera enſuite des équations telles que les équations (c), & on en tirera l' équation $P = 0$, dont ρ^2 ſera l' inconnue, & qui ſera néceſſairement d' un dégré égal à l' expoſant du nombre des corps. Cela poſé

1.° Si toutes les racines de cette équation ſont réelles négatives & inégales, l' état d' équilibre ſera *ſtable* en général quel que ſoit le dérangement initial du ſiſtème.

2.° Si ces racines ſont toutes réelles poſitives ou toutes imaginaires, ou en partie réelles poſitives, & en partie imaginaires, l' état d' équilibre n' aura aucune *ſtabilité*, & le ſiſtème une fois dérangé de cet état ne pourra le reprendre.

3.° Enfin ſi les racines ſont en partie réelles négatives & inégales, & en partie réelles négatives & égales, ou réelles & poſitives, ou imaginaires, l'état d'équilibre aura ſeulement une *ſtabilité rélative* & *conditionelle*, c'eſt-à-dire, que cet état ne ſe retablira, ou ne tendra à ſe retablir, que lorſque il y aura, entre les diſtances & les viteſſes initielles, les conditions marquées dans l' Art. préc.; dans tous les autres cas il ſera impoſſible que le ſiſtème revienne de lui même à ſon premier état.

XXXV. Lorſque toutes les racines de l'équation $P = 0$ ſont réelles inégales & négatives, il eſt clair, qu'en faiſant $\rho^2 = -r^2$, chaque terme de la valeur de y' ſe réduira à la forme α coſ. $rt + \beta$ ſin. rt, laquelle repréſente, comme l' on ſait, le mouvement d' un pendule ſimple de longueur $\frac{1}{r^2}$; d' où il eſt aiſé de conclure que le mouvement de chaque corps ſera compoſé de n mouvemens pareils à ceux de n pendules dont les longueurs ſeroient $\frac{1}{(r1)^2}$,

$\frac{1}{(r1)^2}$, $\frac{1}{(r2)^2}$, $\frac{1}{(r3)^2}$ &c. $\frac{1}{(rn)^2}$. C'est le théorème que M. Daniel Bernoulli a déduit, par induction, de la considération du mouvement d'une corde chargée de plusieurs poids.

Si on veut que les oscillations des corps deviennent simples & isochrones, on supposera que l'état initial du sistème soit tel que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n = 0 \;\&\\ \lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \&c. + \lambda^n V^n = 0 \end{array}\right\} (m)$$

pour toutes les valeurs de ρ^2, hors une quelconque à volonté comme $(\rho m)^2$; car alors les quantités $\theta 1$, $\theta 2$, $\theta 3$ &c. seront nulles, à l'exception de (θm); & par conséquent la valeur de y^s se réduira à $\frac{(\nu^s m)}{(Qm)}(\theta m)$. Mais les équations (m) étant absolument semblables à l'équation (h) de l'Art. XXX., il est clair qu'on aura pour la détermination des quantités Y', Y'', Y''' &c. V', V'', V''' &c. des équations analogues aux équations (k); d'où il s'ensuit que ces quantités seront en raison constante avec les quantités $(\nu' m)$, $(\nu'' m)$, $(\nu''' m)$ &c. $(\nu^n m)$; de sorte qu'on aura

$$\frac{(\lambda' m) Y' + (\lambda'' m) Y'' + (\lambda''' m) Y''' + \&c. + (\lambda^n m) Y^n}{Y^s}$$

$$= \frac{(\lambda' m) V' + (\lambda'' m) V'' + (\lambda''' m) V''' + \&c. + (\lambda^n m) V^n}{V^s}$$

$$= \frac{(\lambda' m)(\nu' m) + (\lambda'' m)(\nu'' m) + (\lambda''' m)(\nu''' m) + \&c. + (\lambda^n m)(\nu^n m)}{(\nu^s m)}$$

$$= \frac{(Qm)}{(\nu^s m)};\ \text{donc}$$

$$y^s = Y^s \operatorname{cos.} (rm) t + V^s \frac{\operatorname{sin.} (rm) t}{(rm)}.$$

Ainsi le mouvement des corps sera le même, dans ce cas, que s'ils étoient pesans, & qu'ils fussent suspendus

chacun à un fil de longueur $\frac{1}{(rm)^2}$, la gravité étant prise pour l' unité des forces accélératrices ; d'où l' on voit que le sistème est susceptible d' autant de différens mouvemens isochrones que l' équation $P = 0$ a des racines réelles négatives & inégales.

Des oscillations d' un fil fixe par une de ses extrémités, & chargé d' un nombre quelconque de poids.

XXXVI. Soit n le nombre des poids que nous supposerons, pour plus de simplicité, égaux entr'eux & également éloignés les uns des autres ; imaginons que le fil ne fasse que des oscillations infiniment petites & dans le même plan ; & soient nommées y', y'', y''' &c. y^n les distances des corps à la verticale à commencer par le plus bas, & a la distance d'un corps à l'autre, on aura, comme il est très-aisé de le voir par les principes de la Dinamique, & comme on peut le déduire des formules générales que j'ai données à la page 227. du Vol. préc.,

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} + \frac{y'' - y'''}{a} - \frac{y' - 2y'' + y'''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} + \frac{y''' - y^{IV}}{a} - 2\,\frac{y'' - 2y''' + y^{IV}}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y^{IV}}{dt^2} + \frac{y^{IV} - y^{V}}{a} - 3\,\frac{y''' - 2y^{IV} + y^{V}}{a} = 0$$

&c.

$$\frac{d^2y^n}{dt^2} + \frac{y^n}{a} - (n-1)\,\frac{y^{n-1} - 2y^n}{a} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} + \frac{-y' + 3y'' - 2y'''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} + \frac{-2y'' + 5y''' - 3y^{IV}}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y^{IV}}{dt^2} + \frac{-3y''' + 7y^{IV} - 4y^{V}}{a} = 0$$

&c.

$$\frac{d^2y^{n}}{dt^2} + \frac{-(n-1)y^{n-1} + (2n-1)y^{n}}{a} = 0.$$

Comparant ces équations avec les équations (a) de l'Art. XXX., on trouvera que les équations (c) du même Article deviennent celles-ci

$$p^2\lambda' + \frac{\lambda' - \lambda''}{a} = 0$$

$$p^2\lambda''' + \frac{-\lambda' + 3\lambda'' - 2\lambda'''}{a} = 0$$

$$p^2\lambda''' + \frac{-2\lambda'' + 5\lambda''' - 3\lambda^{IV}}{a} = 0$$

$$p^2\lambda^{IV} + \frac{-3\lambda''' + 7\lambda^{IV} - 4\lambda^{V}}{a} = 0$$

&c.

$$p^2\lambda^{n} + \frac{-(n-1)\lambda^{n-1} + (2n-1)\lambda^{n}}{a} = 0;$$

d' où l' on tire

$$\lambda'' = (1 + ap^2)\lambda'$$

$$\lambda''' = \frac{-\lambda' + (3 + ap^2)\lambda''}{2}$$

$$= \left(1 + 2ap^2 + \frac{a^2p^4}{2}\right)\lambda'$$

$$\lambda^{IV} = \left(1 + 3ap^2 + \frac{3a^2p^4}{2} + \frac{a^3p^6}{2.3}\right)\lambda'$$

$$\lambda^{v} = \left(1 + 4a\rho^2 + \frac{6a^2\rho^4}{2} + \frac{4a^3\rho^6}{2.3} + \frac{a^4\rho^8}{2.3.4}\right)\lambda',$$

& ainſi de ſuite ; de ſorte que l' on aura en général

$$\lambda^m = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \&c.\right]\lambda'.$$

Or il eſt viſible que, pour ſatisfaire à la dernière équation $\rho^2\lambda^n + \frac{-(n-1)\lambda^{n-1} + (2n-1)\lambda^n}{a} = 0$, il faut ſuppoſer $\lambda^{n+1} = 0$; ce qui donne

$$1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \&c. = 0$$

équation, d'où l'on tirera n valeurs de ρ^2, qu'on déſignera par $(\rho 1)^2$, $(\rho 2)^2$, $(\rho 3)^2$ &c. $(\rho n)^2$, & qu'on ſubſtituera ſucceſſivement dans l' expreſſion de λ^m pour avoir les valeurs de $\lambda^m 1$, $\lambda^m 2$, $\lambda^m 3$ &c.

A l'égard des quantités ν, on les trouvera de la même manière par le moyen des équations (k), leſquelles deviennent dans le cas préſent

$$\rho^2\nu' + \frac{\nu' - \nu''}{a} = 0$$

$$\rho^2\nu'' + \frac{-\nu' + 3\nu'' - 2\nu'''}{a} = 0$$

$$\rho^2\nu''' + \frac{-2\nu'' + 5\nu''' - 3\nu^{IV}}{a} = 0$$

&c.

$$\rho^2\nu^n + \frac{-(n-1)\nu^{n-1} + (2n-1)\nu^n}{a},$$

d' où l' on tire comme ci-deſſus

$$\nu^m = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \&c.\right]\nu',$$

ou bien, en suppoſant pour plus de ſimplicité $\lambda' = \nu' = 1$, $\nu^m = \lambda^m$; & par conſéquent $\nu^m 1 = \lambda^m 1$, $\nu^m 2 = \lambda^m 2$ &c.

On aura donc

$$Q = (\lambda')^2 + (\lambda'')^2 + (\lambda''')^2 + \&c. + (\lambda^n)^2$$
$$= 1 + (1 + a\rho^2)^2 + (1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4)^2 + \&c.$$
$$+ [1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \&c.]^2.$$

Mais on peut trouver une expreſſion plus ſimple de cette quantité par la méthode de l' Article XXXI. Car, on a d' abord

$$P = 1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \&c.$$

d' où l' on tire

$$\rho\frac{dP}{2d\rho} = na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{2}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.3}\rho^6 + \&c.$$

Or en faiſant $\rho = 0$, on a $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 1$ &c. donc

$$\chi = \nu' + \nu'' + \nu''' + \&c. + \nu^n$$
$$= 1$$
$$+ 1 + a\rho^2$$
$$+ 1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4$$
$$+ 1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2}{2}\rho^4 + \frac{a^3}{2.3}\rho^6$$
&c.
$$+ 1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9}\rho^6$$
$$+ \&c.$$
$$= n + \frac{n(n-1)a}{2}\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)a^2}{4.3}\rho^4$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9.4}\rho^6 + \&c.$$

Donc $Q = -\chi p \frac{dP}{2dp} = -ap^2\left(n + \frac{n(n-1)}{2}ap^2\right.$
$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{4\cdot 3}a^2p^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 9\cdot 4}a^3p^6 + \&c.\right)^2.$

Ces deux expressions de Q ne sont pas à la vérité indentiques ; mais elles deviennent égales lorsque $p = p1$, $p2$, $p3$ &c. ; ce qui suffit pour notre objet.

Faisant donc ces substitutions dans la dernière formule de l'Art. XXX., on aura l'expression générale des quantités y, & le probléme sera résolu.

Au reste quoique il soit difficile, peut être impossible, de déterminer en général les racines de l'équation $P = 0$, on peut cependant s'assûrer, par la nature même du problême, que ces racines sont nécessairement toutes réelles inégales & négatives ; car sans cela les valeurs de y', y'', y''' &c. pourroient croitre à l'infini, ce qui seroit absurde.

XXXVII. Si on cherche quelles doivent être les distances & les vitesses initiales des corps pour que chacun d'eux ne fasse que des vibrations isochrones & analogues à celles d'un pendule simple, on trouvera (*Art. XXXV.*) en prenant l pour la longueur de ce pendule,

$$Y^s = \left(1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4\cdot 9\, l^3} + \&c.\right)Y'$$

$$V^s = \left(1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4\cdot 9\, l^3} + \&c.\right)V'$$

& la valeur de l devra se déterminer par l'équation

$$1 - \frac{na}{l} + \frac{n(n-1)a^2}{4l^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{4\cdot 9 l^3} + \&c. = 0\,;$$

Des vibrations d'une corde tendue & chargée d'un nombre quelconque de poids.

XXXVIII. Quoique j' aie déja résolu ce problême dans mes *Recherches sur le Son* imprimées dans le premier Volume de ces Mémoires, je crois pouvoir le redonner ici, non seulement pour faire voir comment ma méthode générale s' y applique, mais encore parce qu' il me donnera lieu de faire de nouvelles reflexions sur les vibrations des cordes sonores, qui pourront être utiles à l'éclairciſſement de cette matière épineuse & délicate.

Supposons une corde chargée de n poids égaux qui la divisent en $n + 1$ parties égales que nous ferons chacune $= a$, & tendue par un poid qui soit à la somme de ceux dont la corde est chargée comme $c^2 : 1$; nommant y', y'', y''' &c. y^n les distances des poids à l' axe de la corde, & faisant pour abreger $\frac{nc^2}{a} = k^2$, on aura

$$\frac{d^2y'}{dt^2} - k^2(-2y' + y'') = 0$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} - k^2(y' - 2y'' + y''') = 0$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} - k^2(y'' - 2y''' + y^{\text{IV}}) = 0$$

&c.

$$\frac{d^2y^n}{dt^2} - k^2(y^{n-1} - 2y^n) = 0.$$

Donc, en comparant ces équations avec les équations générales de l'Art. XXX. on aura les équations suivantes en λ', λ'', λ''' &c.

$$\rho^2\lambda' - k^2(-2\lambda' + \lambda'') = 0$$

$$\rho^2\lambda'' - k^2(\lambda' - 2\lambda'' + \lambda''') = 0$$

$$\rho^2\lambda''' - k^2(\lambda'' - 2\lambda''' + \lambda^{\text{IV}}) = 0$$

&c.

$$\rho^2\lambda^n - k^2(\lambda^{n-1} - 2\lambda^n) = 0\,;$$

d'où l'on tire, en supposant $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cos.}\,\varphi$, $\lambda'' = \frac{\text{sin.}\,2\,\varphi}{\text{sin.}\,\varphi}\,\lambda'$, $\lambda''' = \frac{\text{sin.}\,3\,\varphi}{\text{sin.}\,\varphi}\,\lambda'$, &c., & en général

$$\lambda^m = \frac{\text{sin.}\,m\varphi}{\text{sin.}\,\varphi}\,\lambda'.$$

Et pour la détermination de l'angle φ, c'est-à-dire de la quantité ρ, on aura l'équation $\lambda^{n+1} = \frac{\text{sin.}\,(n+1)\,\varphi}{\text{sin.}\,\varphi}\,\lambda' = 0$; laquelle donne $\varphi = \frac{m\pi}{n+1}$, π exprimant l'angle de 180 dégrés, & m un nombre quelconque entier depuis 0 jusqu'à n inclusivement. De sorte qu'on aura $\rho = k\sqrt{(2\,\text{cos.}\,\varphi - 2)} = 2\,k\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,\varphi \cdot \sqrt{-1} = 2\,k\,\text{sin.}\,\frac{m\pi}{2(n+1)} \cdot \sqrt{-1}$; ce qui donnera toutes les valeurs de ρ que nous avons désignées par $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), en faisant successivement $m = 1, 2, 3$ &c. n.

On trouvera des équations entiérement semblables en ν', ν'', ν''' &c. d'où l'on tirera pareillement $\nu^m = \frac{\text{sin.}\,(n+1)\varphi}{\text{sin.}\,\varphi}\,\nu'$. De plus on aura

$$Q = \frac{\nu'\lambda'}{\text{sin.}\,\varphi^2}\left\{\text{sin.}\,\varphi^2 + \text{sin.}\,2\varphi^2 + \text{sin.}\,3\varphi^2 + \&c. + \text{sin.}\,n\varphi^2\right\}$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{sin.}\,\varphi^2}\left\{\frac{1}{2}\,n - \frac{1}{2}\,(\text{cos.}\,2\varphi + \text{cos.}\,4\varphi + \text{cos.}\,6\varphi + \&c. + \text{cos.}\,2n)\right\}$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{sin.}\,\varphi^2}\left\{\frac{1}{2}\,n - \frac{1}{2}\,\left(\frac{\text{cos.}\,2n\varphi - \text{cos.}\,2(n+1)\,\varphi}{2\,(1 - \text{cos.}\,2\,\varphi)} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{(n+1)}{2\,\text{sin.}\,\varphi^2}\,\nu'\lambda', \text{ à cause de } \varphi = \frac{m\pi}{n+1}.$$

On

On trouveroit la même valeur de Q la méthode de l'Art. XXXI.; mais le calcul seroit alors tant soit peu plus long. Cependant comme ce calcul peut servir à montrer la bonté de la méthode dont nous parlons, je n'ai pas cru devoir le supprimer, mais je l'ai renfermé entre deux crochets, afin que mes Lecteurs puissent le passer s'ils le jugent à propos.

[On aura d'abord $P = \frac{\text{sin.}\,(n+1)\,\varphi}{(n+1)\,\text{sin.}\,\varphi}$ (j'écris $P = \frac{\text{sin.}\,(n+1)\,\varphi}{(n+1)\,\text{sin.}\,\varphi}$, & non pas simplement $P = \frac{\text{sin.}\,(n+1)\,\varphi}{\text{sin.}\,\varphi}$, afin que, lorsque $\rho = 0$ c'est-à-dire $\varphi = 0$, on ait $P = 1$, comme nous l'avons supposé); d'où l'on tire par la différentiation $\frac{dP}{d\varphi} = \frac{\text{cos.}\,(n+1)\,\varphi}{\text{sin.}\,\varphi} - \frac{\text{sin.}\,(n+1)\,\varphi \times \text{cos.}\,\varphi}{(n+1)\,\text{sin.}\,\varphi^2}$ $=$ [à cause de sin. $(n+1)\,\varphi = 0$] $\frac{\text{cos.}\,(n+1)\,\varphi}{\text{sin.}\,\varphi}$; or l'équation $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cos.}\,\varphi$ donne $\frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cos.}\,\varphi - 1$, & prenant les différences logarithmiques $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\text{sin.}\,\varphi}{1-\text{cos.}\,\varphi}\,d\varphi$; donc $\rho\,\frac{dP}{2\,d\rho} = \frac{\text{cos.}\,(n+1)\,\varphi \times (1-\text{cos.}\,\varphi)}{2\,\text{sin.}\,\varphi^2} = \frac{\text{cos.}\,(n+1)\,\varphi}{2\,(1+\text{cos.}\,\varphi)}$.

Maintenant on a, lorsque $\rho = 0$, $\varphi = 0$, & par conséquent $\lambda'' = 2\lambda'$, $\lambda''' = 3\lambda'$ &c.; donc

$$\chi = \lambda'\,(r' + 2\,r'' + 3\,r''' + \&c. + n\,r^n)$$

$$= \frac{r'\lambda'}{\text{sin.}\,\varphi}\,(\text{sin.}\,\varphi + 2\,\text{sin.}\,2\varphi + 3\,\text{sin.}\,3\varphi + \&c. + n\,\text{sin.}\,n\varphi)$$

$$= \frac{r'\lambda'}{\text{sin.}\,\varphi} \times \frac{(n+1)\,\text{sin}\,n\varphi - n\,\text{sin.}\,(n+1)\,\varphi}{2\,(1-\text{cos.}\,\varphi)}$$

$=$ [à cause de sin. $(n+1)\,\varphi = 0$] $r'\lambda'\,\frac{(n+1)\,\text{sin.}\,n\varphi}{2\,\text{sin.}\,\varphi\,(1-\text{cos.}\,\varphi)}$;

donc $Q = -\chi p \frac{dP}{2dp} = -\frac{(n+1)\,\sin.\varphi\,.\,\cos.(n+1)\varphi}{4\,\sin.\varphi^3}\, y'\lambda'$

$= -\frac{(n+1)\,(\sin.(2n+1)\varphi - \sin.\varphi)}{4\,\sin.\varphi^3}\, y'\lambda' = \frac{n+1}{2\,\sin.\varphi^2}\, y'\lambda',$

à cause de $\sin.(2n+1)\varphi = -\sin.\varphi$].

Donc faisant ces substitutions dans l'expression de y^s (*Art. XXX.*), & supposant en général

$$(Ym) = Y'\sin.\frac{m\pi}{n+1} + Y''\sin.\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\sin.\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Y^n\sin.\frac{nm\pi}{n+1} \;\&$$

$$(Vm) = V'\sin.\frac{m\pi}{n+1} + V''\sin.\frac{2m\pi}{n+1} + V'''\sin.\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + V^n\sin.\frac{nm\pi}{n+1},$$

on aura

$$y^s = \frac{2\sin.\frac{s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y1\cos.(2tk\sin.\frac{\pi}{2(n+1)}) + \frac{V1}{2k\sin.\frac{\pi}{2(n+1)}}\sin.(2tk\sin.\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$+ \frac{2\sin.\frac{2s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y2\cos.(2tk\sin.\frac{2\pi}{2(n+1)}) + \frac{V2}{2k\sin.\frac{2\pi}{2(n+1)}}\sin.(2tk\sin.\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$+ \frac{2\sin.\frac{3s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y3\cos.(2tk\sin.\frac{3\pi}{2(n+1)}) + \frac{V3}{2k\sin.\frac{3\pi}{2(n+1)}}\sin.(2tk\sin.\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)$$

&c.

$$+ \frac{2\sin.\frac{ns\pi}{n+1}}{n+1}\left((Yn)\cos.(2tk\sin.\frac{n\pi}{2(n+1)}) + \frac{(Vn)}{2k\sin.\frac{n\pi}{2(n+1)}}\sin.(2tk\sin.\frac{n\pi}{2(n+1)}\right)$$

Application de la ſolution précédente aux cordes ſonores.

XXXIX. Je ſuppoſerai ici, pour plus de ſimplicité, que les viteſſes initiales V', V'', V'''&c. ſoient nulles, moyennant quoi la valeur de y^s ne contiendra plus que des termes de cette forme

$$\frac{2 \text{ ſin. } \frac{m s \pi}{n+1}}{n+1} (Y m) \text{ coſ. } (2 t k \text{ ſin. } \frac{m \pi}{2(n+1)}).$$

m étant ſucceſſivement 1, 2, 3 &c. n.

Cela poſé on ſait que

$\varphi = \text{ſin. } \varphi + \alpha \text{ ſin. } \varphi^3 + \beta \text{ ſin. } \varphi^5 + \gamma \text{ ſin. } \varphi^7 + \&c.$

en faiſant $\alpha = \frac{1.1}{2.3}$, $\beta = \frac{3.3}{4.5}$, $\gamma = \frac{5.5}{6.7} \beta$ &c.; donc $\text{ſin. } \varphi = \varphi - \alpha \text{ ſin. } \varphi^3 - \beta \text{ ſin. } \varphi^5 - \gamma \text{ ſin. } \varphi^7 - \&c.$; donc, ſuppoſant $\varphi = \frac{m \pi}{2(n+1)}$ & faiſant pour abreger $\text{ſin. } \frac{m \pi}{2(n+1)} = x$, on aura $\text{ſin. } \frac{m \pi}{2(n+1)} = \frac{m \pi}{2(n+1)} - a x^3 - \beta x^5 - \gamma x^7 - \&c.$, & par conſéquent

$\text{coſ. } (2 t k \text{ ſin. } \frac{m \pi}{2(n+1)}) = \text{coſ. } (\frac{m k t}{n+1} \pi - 2 \alpha k t x^3 - 2 \beta k t x^5 - 2 \gamma k t x^7 - \&c.)$

$= \text{coſ. } \frac{m k t}{n+1} \pi \times \text{coſ. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.)$

$+ \text{ſin. } \frac{m k t}{n+1} \pi \times \text{ſin. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.)$

Or $\text{coſ. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.) = 1 - 2 \alpha^2 k^2 t^2 x^6 - 2 \alpha \beta k^2 t^2 x^8 - 2 \beta^2 k^2 t^2 x^{10} - \&c.$

& $\text{ſin. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.) = 2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + 2 \gamma k t x^7 + (2 \delta k t - \frac{4 \alpha^3 k^3 t^3}{3}) x^9 + \&c.$

De plus $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6$ &c., & par conséquent $(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \&c.)\sqrt{(1-x^2)} = 1$; donc on aura auſſi

$$\sin.(2\alpha k t x^2 + 2\beta k t x^4 + \&c.) = \Big\{ 2\alpha k t x^2 + (\alpha + 2\beta) k t x^4 + (\tfrac{3\alpha}{4} + \beta + 2\gamma) k t x^6 + [(\tfrac{3.5\alpha}{4.6} + \tfrac{3\beta}{4} + \gamma + 2\delta) kt - \tfrac{4\alpha^3}{3} k^3 t^3] x^8 + \&c. \Big\} \times x\sqrt{(1-x^2)};$$

où l'on remarquera que $x\sqrt{(1-x^2)} = \sin.\frac{m\pi}{2(n+1)} \times \cos.\frac{m\pi}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\sin.\frac{m\pi}{n+1}$.

Maintenant $(Ym) = Y'\sin.\frac{m\pi}{n+1} + Y''\sin.\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\sin.\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Y^n\sin.\frac{nm\pi}{n+1}$ (*Artic. préc.*); donc ſi on multiplie cette quantité par x^2, c'eſt-à-dire par $(\sin.\frac{m\pi}{2(n+1)})^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos.\frac{m\pi}{n+1})$, & qu'on dévelope les produits des *ſinus* & des *coſinus*, on aura

$$(Ym)x^2 = \frac{1}{4}\Big\{ Y'(2\sin.\frac{m\pi}{n+1} - \sin.\frac{2m\pi}{n+1})$$

$$+ Y''(2\sin.\frac{2m\pi}{n+1} - \sin.\frac{3m\pi}{n+1} - \sin.\frac{m\pi}{n+1})$$

$$+ Y'''(2\sin.\frac{3m\pi}{n+1} - \sin.\frac{4m\pi}{n+1} - \sin.\frac{2m\pi}{n+1})$$

&c.

$$+ Y^n(2\sin.\frac{nm\pi}{n+1} - \sin.\frac{(n+1)m\pi}{n+1} - \sin.\frac{(n-1)m\pi}{n+1})\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\Big\{ (Y'' - 2Y')\sin.\frac{m\pi}{n+1} + (Y''' - 2Y'' + Y')$$

$\sin. \frac{2m\pi}{n+1} + (Y^{iv} - 2Y''' + Y'') \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c.$

$+ (-2Y^n + Y^{n-1}) \sin. \frac{nm\pi}{n+1} \Big\}$,

à cause de $\sin. \frac{(n+1)m\pi}{n+1} = \sin. m\pi = 0$.

Qu'on dénote par $\Delta^2 Y$ les différences secondes des quantités Y dans la suite Y', Y'', Y''' &c. Y^n, de sorte que l'on ait en général $\Delta^2 Y^s = Y^{s+1} - 2Y^s + Y^{s-1}$, & supposant $Y^0 = 0$ & $Y^{n+1} = 0$, (ce qui est permis, à cause que les quantités Y', Y'', Y''' &c. Y^n sont les seules données) afin que $\Delta^2 Y' = Y'' - 2Y'$ & $\Delta^2 Y^n = -2Y^n + Y^{n-1}$, on aura

$$(Y^m) x^2 = -\frac{1}{4} (\Delta^2 Y' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^2 Y'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1}$$
$$+ \Delta^2 Y''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^2 Y^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1}).$$

Si on fait de même $\Delta^4 Y^s = \Delta^2 Y^{s+1} - 2\Delta^2 Y^s + \Delta^2 Y^{s-1} = Y^{s+2} - 4Y^{s+1} + 6Y^s - 4Y^{s-1} + Y^{s-2}$, & qu'on suppose ensuite $\Delta^2 Y^0 = 0$ & $\Delta^2 Y^{n+1} = 0$, on trouvera

$$(Ym) x^4 = \frac{1}{16} (\Delta^4 Y' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^4 Y'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} +$$
$$\Delta^4 Y''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^4 Y^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1}).$$

En général ou aura

$$(Ym) x^{2r} = \pm \frac{1}{2^r} (\Delta^{2r} Y' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y'' \sin.$$
$$\frac{2m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^{2r} Y^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1}),$$

(le signe supérieur étant pour le cas de r pair, & l'inférieur pour celui de r impair) pourvu qu'on suppose $Y^0 = 0$, $\Delta^2 Y^0 = 0$, $\Delta^4 Y^0 = 0$ &c. $Y^{n+1} = 0$, $\Delta^2 Y^{n+1} = 0$, $\Delta^4 Y^{n+1} = 0$ &c.; conditions auxquelles on peut

ſatisfaire, en imaginant la ſuite des Y continuée de part & d'autre à l'infini, de maniére que les termes Y^0 & Y^{n+1} ſoient nuls, & que les termes également diſtans de ceux-ci ſoient égaux & de ſignes contraires.

Donc ſi on fait ces ſubſtitutions, & qu'on faſſe pour abreger

$$\frac{2\alpha^2 k^2 t^2}{2^6}\Delta^6 Y^s - \frac{2\alpha\beta k^2 t^2}{2^8}\Delta^8 Y^s + \&c. = P^s,$$

$$-\frac{\alpha k t}{2^2}\Delta^2 Y^s + \frac{1}{2}(\alpha + 2\beta)\frac{kt}{2^4}\Delta^4 Y^s - \frac{1}{2}\left(\frac{3\alpha}{4} + \beta + 2\gamma\right)\frac{kt}{2^6}\Delta^6 Y^s + \&c. = Q^s,$$

& de plus

$$P' \text{ſin.} \frac{m\pi}{n+1} + P'' \text{ſin.} \frac{2m\pi}{n+1} + P''' \text{ſin.} \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + P^n \text{ſin.} \frac{nm\pi}{n+1} = (Pm),$$

$$Q' \text{ſin.} \frac{m\pi}{n+1} + Q'' \text{ſin.} \frac{2m\pi}{n+1} + Q''' \text{ſin.} \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Q^n \text{ſin.} \frac{nm\pi}{n+1} = (Qm),$$

on aura

$$\frac{2 \text{ ſin.} \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}(Ym) \text{ coſ.} \left(2tk \text{ ſin.} \frac{m\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$= \frac{2 \text{ ſin.} \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}[(Ym) + (Pm)] \text{ coſ.} \frac{mkt}{n+1}\pi$$

$$+ \frac{2 \text{ ſin.} \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}(Qm) \text{ ſin.} \frac{m\pi}{n+1} \times \text{ſin.} \frac{mkt}{n+1}\pi$$

$$= \frac{(Ym) + (Pm)}{n+1}\left[\text{ſin.} \frac{m(s+kt)}{n+1}\pi + \text{ſin.} \frac{m(s-kt)}{n+1}\pi\right]$$

$$+\frac{(Qm)}{2(n+1)}\Big[\text{sin.}\,\frac{m(s+1+kt)}{n+1}\pi - \text{sin.}\,\frac{m(s-1+kt)}{n+1}\pi$$

$$-\ \text{sin.}\,\frac{m(s+1-kt)}{n+1}\pi + \text{sin.}\,\frac{m(s-1-kt)}{n+1}\pi\Big].$$

Donc si on fait successivement $m = 1, 2, 3$ &c. n, & qu'on suppose en général

$$\varphi x = 2\,\frac{T1 + P1}{n+1}\,\text{sin.}\,x\pi + 2\,\frac{T2 + P2}{n+1}\,\text{sin.}\,2x\pi$$

$$+\ 2\,\frac{T3 + P3}{n+1}\,\text{sin.}\,3x\pi + \&c. + 2\,\frac{(Tn) + (Pn)}{n+1}\,\text{sin.}\,nx\pi,$$

$$\psi x = 2\,\frac{Q1}{n+1}\,\text{sin.}\,x\pi + 2\,\frac{Q2}{n+1}\,\text{sin.}\,2x\pi + 2\,\frac{Q3}{n+1}\,\text{sin.}\,3x\pi$$

$$+\ \&c. + 2\,\frac{(Qn)}{n+1}\,\text{sin.}\,nx\pi,$$

φ, & ψ dénotant des fonctions, on aura (*Art. préc.*)

$$y' = \frac{1}{2}\left(\varphi\,\frac{s+kt}{n+1} + \varphi\,\frac{s-kt}{n+1}\right)$$

$$+\ \frac{1}{4}\left(\psi\,\frac{s+1+kt}{n+1} - \psi\,\frac{s-1+kt}{n+1}\right.$$

$$\left.-\ \psi\,\frac{s+1-kt}{n+1} + \psi\,\frac{s-1-kt}{n+1}\right).$$

D'où l'on voit que pour avoir la valeur d'une y quelconque, comme y', après un tems quelconque t, il n'y aura qu'à tracer deux courbes, dont les ordonnées répondantes aux abscisses x soient φx & ψx, & prendre ensuite dans la première de ces courbes $\frac{1}{2}$ ord. abs. $\frac{s+kt}{n+1}$ $+\ \frac{1}{2}$ ord. abs. $\frac{s-kt}{n+1}$, & dans la seconde $\frac{1}{4}$ ord. abs. $\frac{s+1+kt}{n+1} - \frac{1}{4}$ ord. abs. $\frac{s-1+kt}{n+1} - \frac{1}{4}$ ord. abs. $\frac{s+1-kt}{n+1}$ $+\ \frac{1}{4}$ ord. abs. $\frac{s-1-kt}{n+1}$.

Substituons maintenant dans les expressions de φx & de ψx les valeurs de $Y1$, $Y2$, $Y3$ &c. (Yn), $P1$, $P2$, $P3$ &c. (Pn), & $Q1$, $Q2$, $Q3$ &c. (Qn), & supposant en général

$\chi\,(u, x) = \text{sin.}\, u\pi \times \text{sin.}\, x\pi + \text{sin.}\, 2u\pi \times \text{sin.}\, 2x\pi + \text{sin.}\, 3u\pi \times \text{sin.}\, 3x\pi + \text{\&c.} + \text{sin.}\, nu\pi \times \text{sin.}\, nx\pi$, nous aurons

$$\varphi x = 2\,\frac{Y'+P'}{n+1}\,\chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2\,\frac{Y''+P''}{n+1}\,\chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right)$$
$$+ 2\,\frac{Y'''+P'''}{n+1}\,\chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \text{\&c.}$$
$$+ 2\,\frac{Y^n+P^n}{n+1}\,\chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right),\ \&$$
$$\psi x = 2\,\frac{Q'}{n+1}\,\chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2\,\frac{Q''}{n+1}\,\chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right)$$
$$+ 2\,\frac{Q'''}{n+1}\,\chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \text{\&c.}$$
$$+ 2\,\frac{Q^n}{n+1}\,\chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right).$$

Or $2\,\text{cos.}\, u\pi \times \chi\,(u, x) = 2\,\text{cos.}\, u\pi \times \text{sin.}\, u\pi \times \text{sin.}\, x\pi + 2\,\text{cos.}\, u\pi \times \text{sin.}\, 2u\pi \times \text{sin.}\, 2x\pi + 2\,\text{cos.}\, u\pi \times \text{sin.}\, 3u\pi \times \text{sin.}\, 3x\pi + \text{\&c.} + 2\,\text{cos.}\, u\pi \times \text{sin.}\, nu\pi \times \text{sin.}\, nx\pi$

$$= \text{sin.}\, 2u\pi \times \text{sin.}\, x\pi + (\text{sin.}\, u\pi + \text{sin.}\, 3u\pi)\,\text{sin.}\, 2x\pi + (\text{sin.}\, 2u\pi + \text{sin.}\, 4u\pi)\,\text{sin.}\, 3x\pi + \text{\&c.}$$
$$+ [\text{sin.}\,(n-1)\,u\pi + \text{sin.}\,(n+1)\,u\pi]\,\text{sin.}\, nx\pi$$
$$= \text{sin.}\, 2x\pi \times \text{sin.}\, u\pi + (\text{sin.}\, x\pi + \text{sin.}\, 3x\pi)\,\text{sin.}\, 2u\pi + (\text{sin.}\, 2x\pi + \text{sin.}\, 4x\pi)\,\text{sin.}\, 3u\pi + \text{\&c.}$$
$$+ [\text{sin.}\,(n-1)\,x\pi + \text{sin.}\,(n+1)\,x\pi]\,\text{sin.}\, nu\pi + \text{sin.}\,(n+1)\,u\pi \times \text{sin.}\, nx\pi - \text{sin.}\,(n+1)\,x\pi \times \text{sin.}\, nu\pi$$
$$= 2\,\text{cos.}\, x\pi \times \chi\,(u, x) + \text{sin.}\,(n+1)\,u\pi \times \text{sin.}\, nx\pi - \text{sin.}\,(n+1)\,x\pi \times \text{sin.}\, nu\pi.$$

Donc

$\chi\,(u, x)$

$$\chi(u,x) = \frac{\text{fin.}(n+1)u\pi.\text{fin.}nx\pi - \text{fin.}(n+1)x\pi.\text{fin.}nu\pi}{2(\text{cof.}u\pi - \text{cof.}x\pi)}.$$

Soit $u = \frac{m}{n+1}$, & $x = \frac{s}{n+1}$, m & s étant des nombres entiers, on aura fin. $(n+1)u\pi = \text{fin.}\, m\pi = o$; & fin. $(n+1)x\pi = \text{fin.}\, s\pi = o$; par conféquent $\chi\left(\frac{m}{n+1}, \frac{s}{n+1}\right) = o$.

Il en faut excepter le cas où $s = m$; car alors le numérateur & le dénominateur de la formule deviennent égaux chacun à zéro. Pour trouver la valeur de $\chi(u, x)$ dans ce cas, on fera $x = u + \omega$, ω étant une quantité évanouiffante, & l'on aura en effaçant ce qui fe détruit,

$$\chi(u,x) = \frac{n\,\text{fin.}(n+1)u\pi \times \text{cof.}\,nu\pi}{2\,\text{fin.}\,u\pi} - \frac{(n+1)\,\text{cof.}(n+1)u\pi \times \text{fin.}\,nu\pi}{2\,\text{fin.}\,u\pi}.$$

Donc, faifant $u = x = \frac{m}{n+1}$,

$$\chi\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}\right) = -\frac{(n+1)\,\text{cof.}\,m\pi \times \text{fin.}\frac{nm\pi}{n+1}}{2\,\text{fin.}\frac{m\pi}{n+1}}.$$

Or cof. $m\pi \times \text{fin.}\frac{nm}{n+1}\pi = \frac{1}{2}\,\text{fin.}\frac{2n+1}{n+1}m\pi - \frac{1}{2}$ fin. $\frac{m}{n+1}\pi$, & fin. $\frac{2n+1}{n+1}m\pi = \text{fin.}\left(2m - \frac{m}{n+1}\right)\pi$ = (a caufe que m eft un nombre entier) $- \text{fin.}\frac{m}{n+1}\pi$; donc cof. $m\pi \times \text{fin.}\frac{nm}{n+1}\pi = -\text{fin.}\frac{m}{n+1}\pi$; & par conféquent

$$\chi\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2}.$$

On aura donc

$$\phi \frac{s}{n+1} = Y^s + P^s, \ \& \ \psi \frac{s}{n+1} = Q^s;$$

c'est-à-dire que les deux courbes qui représentent les fonctions ϕx & ψx, doivent être telles que les ordonnées répondantes aux abscisses $\frac{s}{n+1}$ soient $Y^s + P^s$ & Q^s.

Ayant donc divisé l'axe de la corde, que je suppose $= 1$, en $n + 1$ parties égales, on appliquera à chaque abscisse $\frac{s}{n+1}$ deux ordonnées, l'une $= Y^s + P^s$, & l'autre $= Q^s$, & l'on fera passer par les extrémités de chacune de ces deux suites d'ordonnées deux courbes représentées par l'équation

$y = \alpha$ sin. $x\pi + \beta$ sin. $2x\pi + \gamma$ sin. $3x\pi$ + &c. $+ \omega$ sin. $nx\pi$,

y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse x, & α, β, γ &c. ω des coéficiens arbitraires; on aura de cette manière les courbes qui serviront à déterminer, pour un tems quelconque t, la figure du poligone vibrant, comme nous l'avons enseigné plus haut.

A l'égard de la continuation de ces courbes, il est clair qu'elles s'étendront de part & d'autre à l'infini, & seront composées de branches égales, semblables & alternativement situées au dessus & au dessous de l'axe, de sorte qu'il ne faudra que tracer les branches qui répondent à l'axe 1, & les transporter ensuite alternativement au dessus & au dessous de l'axe prolongé à l'infini de part & d'autre.

XL. Supposons présentement que le nombre a des corps soit très-grand, & que par conséquent la distance a d'un corps à l'autre soit très-petite, la longueur de toute la corde étant $= 1$; il est clair que les différences $\Delta^2 Y$, $\Delta^4 Y$ &c. deviendront très-petites du second ordre, du quatrième &c.; donc puisque $k = \sqrt{(\frac{nc^2}{a})}$ (à cause de

$n = \frac{1}{a}$) $\frac{t}{a}$, les quantités $k\Delta^2 Y$, $k\Delta^4 Y$, $k^2\Delta^6 Y$ &c. seront très-petites du premier ordre, du troisiéme, du quatriéme &c., & par conséquent les quantités P & Q pourront être regardées & traitées comme nulles sans erreur sensible.

Ainsi dans cette hypothèse, on aura à très peu près le mouvement de la corde, en faisant passer par les sommets des ordonnées très-proches Y', Y'', Y''' &c., lesquelles représentent la figure initiale du poligone vibrant, une courbe dont l'équation soit $y = \alpha$ sin. $\pi x + \beta$ sin. $2\pi x + \gamma$ sin. $3\pi x +$ &c. $+ \omega$ sin. $n\pi x$, & que j'appellerai *génératrice*, & prenant ensuite pour l'ordonnée du poligone vibrant, qui répond à une abscisse quelconque $\frac{s}{n+1} = x$, la demi somme de deux ordonnées de cette courbe, desquelles l'une réponde à l'abscisse $\frac{s+kt}{n+1} = x + ct$, & l'autre réponde à l'abscisse $\frac{s-kt}{n+1} = x - ct$; & cette détermination sera toujours d'autant plus exacte que le nombre n sera plus grand. Or il est évident que plus le nombre des poids est grand, plus la poligone initial doit s'approcher de la courbe circonscrite; d'où il s'ensuit qu'en supposant le nombre des poids infini, ce qui est le cas de la corde vibrante, on pourra regarder la figure initiale même de la corde comme une branche de la courbe *génératrice*, & qu'ainsi pour avoir cette courbe il n'y aura que transporter la courbe initiale alternativement au dessus & au dessous de l'axe à l'infini (*Art. préc.*).

XLI. On pourroit douter s'il ne faut pas que la courbe initiale de la corde soit aussi comprise dans la même équation $y = \alpha$ sin. $\pi x + \beta$ sin. $2\pi x +$ &c.

Il eſt certain que ſi on veut que la courbe génératrice ſoit la même *géométriquement* que la courbe initiale, il faut que celle-ci ſoit renfermée dans l'équation $y = \alpha$ ſin. $\pi x + \beta$ ſin. $2 \pi x$ + &c. Je dis *la même géométriquement*, car il ſuffit que la différence de ces deux courbes ſoit moindre qu'aucune grandeur donnée, pour qu'elles puiſſent être priſes pour les mêmes. Or il eſt clair que, quelle que ſoit la courbe initiale, on peut toujours faire paſſer, par une infinité de points infiniment proches de cette courbe, une autre courbe de la forme $y = \alpha$ ſin. $\pi x + \beta$ ſin. $2 \pi x$ + &c., de manière que la différence entre les deux courbes ſoit auſſi petite qu'on voudra, quoique cette différence ne puiſſe devenir abſolument nulle que dans le cas où la courbe initiale ſera auſſi de la même forme; dans tous les autres cas cette courbe initiale ne ſera qu'une eſpéce d'aſſymptôte dont la courbe génératrice pourra s'approcher à l'infini, ſans qu'elles puiſſent jamais coincider entièrement.

Pour confirmer ce que je viens de dire, je vais faire voir comment on peut trouver une infinité de telles courbes, qui coincident avec une courbe donnée en un nombre quelconque de points auſſi près les uns des autres qu'on voudra. Pour cela je prends l'équation

$$y = \frac{2 Y 1}{n+1} \text{ſin. } x \pi + \frac{2 Y 2}{n+1} \text{ſin. } 2 x \pi + \frac{2 Y 3}{n+1} \text{ſin. } 3 x \pi + \&c. + \frac{2 (Y n)}{n+1} \text{ſin. } n x \pi,$$

dans laquelle

$$(Y m) = Y' \text{ſin.} \frac{m \pi}{n+1} + Y'' \text{ſin.} \frac{2 m \pi}{n+1} + Y''' \text{ſin.} \frac{3 m \pi}{n+1} + \&c. + Y^n \text{ſin.} \frac{n m \pi}{n+1},$$

& par ce que j'ai démontré dans l'Art. XXXIX. j'aurai, lorſque $x = \frac{s}{n+1}$, $y = Y^s$.

Soit maintenant $n+1=\frac{1}{dX}$ & $\frac{s}{n+1}=X$, on aura $(Ym)=\int Y$ fin. $mX\pi=(n+1)\int Y$ fin. $mX\pi dX$, cette intégrale étant prise depuis $X=0$ jusqu'à $X=1$; par conséquent

$$y=2\int Y \text{ fin. } X\pi dX \times \text{ fin. } x\pi+2\int Y \text{ fin. } 2X\pi dX \times \text{ fin. } 2x\pi+2\int Y \text{ fin. } 3X\pi dX \times \text{ fin. } 3x\pi+\&c. +2\int Y \text{ fin. } nX\pi dX \times \text{ fin. } nx\pi,$$

de sorte que, lorsque $x=X$, on aura $y=Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X.

Or soit Z une fonction quelconque de X, & z une pareille fonction de x, il est clair qu'en mettant dans l'équation précédente YZ au lieu de Y & yz au lieu de y, on aura aussi, lorsque $X=x$, $yz=YZ$, c'est à dire, à cause de $z=Z$ dans ce cas, $y=Y$. D'où il s'ensuit que si l'on a une courbe quelconque rapportée à un axe $=1$, & dont les coordonnées soient X & Y, & qu'on décrive sur le même axe une autre courbe dont l'équation, en prenant x & y pour les coordonnées, soit

$$y=\frac{2}{z}\int ZY \text{ fin. } X\pi dX+\frac{2}{z}\int ZY \text{ fin. } 2X\pi dX$$
$$+\frac{2}{z}\int ZY \text{ fin. } 3X\pi dX+\&c.$$
$$+\frac{2}{z}\int ZY \text{ fin. } nX\pi dX,$$

ces deux courbes coincideront dans tous les points qui répondent aux abscisses $x=X=\frac{s}{n+1}$, s & n étant des nombres entiers, quelle que soit d'ailleurs la fonction Z; or on peut rendre n & s si grands que les points de coincidance soient aussi près les uns des autres qu'on voudra.

Au reste il ne faut pas manquer d'observer que la construction donnée ci-dessus, pour représenter le mouvement de la corde vibrante, n'est exacte qu'autant qu'il est permis

de négliger les quantités P & Q comme nous l' avons fait (*Art. XL.*). Or il est clair que ces quantités seront toujours nulles d' elles-mêmes, si $\frac{d^m y}{dx^m}$ ne fait de saut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives ; ainsi pourvu que cette condition soit observée, on pourra toujours déterminer le mouvement de la corde quelle que soit d' ailleurs la nature de la courbe initiale.

Nouvelle manière d' intégrer par approximation l' équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMy^2 + i^2Ny^3 + \&c. = 0 \quad (A)$$

dans laquelle K, L, M, N *&c. sont des constantes quelconques, & i marque un coéficient très-petit.*

XLII. On sait que l' intégrale de l' équation $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + a \operatorname{cos.} \alpha t + b \operatorname{cos.} \beta t + \&c. = 0$, est

$$y = f \operatorname{cos.} Kt + \frac{g}{K} \operatorname{sin.} Kt + \frac{L}{K^2} (\operatorname{cos.} Kt - 1)$$
$$+ \frac{a}{K^2 - \alpha^2} (\operatorname{cos.} Kt - \operatorname{cos.} \alpha t) + \frac{b}{K^2 - \beta^2} (\operatorname{cos.} Kt - \operatorname{cos.} \beta t)$$
$$+ \&c.$$

f & g étant deux constantes arbitraires, dont l'une exprime la valeur de y, & l' autre celle de $\frac{dy}{dt}$, lorsque $t = 0$.

Si $\alpha = K$ on trouvera (en faisant $\alpha = K + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouissante) que les termes $\frac{a}{K^2 - \alpha^2} (\operatorname{cos.} Kt - \operatorname{cos.} \alpha t)$ se réduisent à celui-ci $- \frac{a}{2K} t \operatorname{sin.} Kt$.

XLIII. Cela posé, pour intégrer l'équation (A), suivant la méthode ordinaire d'approximation, on négligera d'abord les termes affectés de i, & l'on aura pour première équation approchée $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L = 0$, & par conséquent

$$y = f \operatorname{cof.} Kt + \frac{g}{K} \operatorname{fin.} Kt + \frac{L}{K^2} (\operatorname{cof.} Kt - 1).$$

On substituera ensuite cette première valeur de y dans le terme iMy^2, en négligeant le terme suivant i^2Ny^3, & faisant pour plus de simplicité $g = 0$ & $f + \frac{L}{K^2} = F$, on aura la nouvelle équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iM\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4}\right) - 2i\frac{MLF}{K} \operatorname{cof.} Kt$$
$$+ i\frac{MF^2}{2} \operatorname{cof.} 2Kt = 0,$$

dont l'intégrale sera, en supposant $g = 0$ & $L + iM \left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4}\right) = L'$,

$$y = f \operatorname{cof.} Kt + \frac{L'}{K^2} (\operatorname{cof.} Kt - 1) + i\frac{MLF}{K^3} t \operatorname{fin.} Kt$$
$$- i\frac{MF^2}{2.3K^2} (\operatorname{cof.} Kt - \operatorname{cof.} 2Kt).$$

XLIII. Mais voici une difficulté. L'expression de y qu'on vient de trouver renferme un terme multiplié par t, & si on continuoit le calcul de la même manière on trouveroit encore des termes multipliés par t^2, t^3 &c.; cependant il est certain que la valeur de y ne doit point contenir de pareils termes. Pour le démontrer je reprends l'équation (A), & j'en tire, en multipliant par $2dy$, & intégrant,

$$\frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 + \frac{i^2N}{2} y^4 \&c. = 0 \text{ (B)}$$

H étant une conſtante qu'on déterminera par les valeurs données de y & de $\frac{dy}{dt}$ lorſque $t = 0$; de ſorte qu'on aura en général

$$H = -g^2 - K^2 f^2 - 2Lf - \frac{2iM}{2} f^3 - \frac{i^2 N}{2} f^4 \text{ \&c.}$$

Je fais $\frac{dy}{dt} = x$, j'ai

$$x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 + \frac{i^2 N}{2} y^4 \text{ \&c.} = 0 ;$$

équation qui peut être regardée comme appartenant à une courbe dont x & y ſoient les coordonnées. Or puiſque i eſt une quantité. très-petite, il eſt clair qu'on aura à peu près $x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H = 0$, d'où l'on tire

$$y = \frac{-L + \sqrt{(L^2 - K^2 H - K^2 x^2)}}{K^2}.$$

Ces deux racines donnent comme l'on voit une *ovale* dans laquelle la valeur de y eſt contenue entre ces deux limites

$$y = \frac{-L + \sqrt{(L^2 - K^2 H)}}{K^2} \text{ \& } y = \frac{-L - \sqrt{(L^2 - K^2 H)}}{K^2}.$$

Pour trouver les autres racines on ſuppoſera $y = \frac{z}{i}$, & après avoir fait diſparoitre les puiſſances de i qui ſe trouveront au dénominateur, on cherchera les valeurs de z par les régles ordinaires d'approximation. De cette manière on aura en ne conſidérant d'abord que l'équation $x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 = 0$, & pouſſant la préciſion juſqu'aux i^2, $z = -\frac{3K^2}{2M} + \frac{2iL}{K} - \frac{8i^2 L^2 M}{3K^6} - \frac{2i^2 M(H + x^2)}{3K^4}$, & par conſéquent

y.

$$y = -\frac{3K^4}{2iM} + \frac{2L}{K^2} - \frac{8iL^2M}{3K^6} - \frac{2iM(H+\alpha^2)}{3K^4}.$$

ce qui donne une branche parabolique infiniment éloignée de l' axe. On tirera de même de l' équation

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 + \frac{i^2N}{2}y^4 = 0,$$

$$y = \frac{\alpha}{i} + \beta + i(\gamma + \delta x^2),\ \text{où}$$

$$\alpha = \frac{-\frac{2M}{3} \pm \surd\left(\frac{4M^2}{9} - 2K^2\right)}{N}$$

$$\beta = -\frac{4L\alpha}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}.$$

$$\gamma = -\frac{(6N^2\alpha^2 + 4M\alpha + 2K^2)\beta^2 + 4L\beta + 2C}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

$$\delta = -\frac{2}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

ce qui donnera, à cause de l' ambiguité du radical $\surd\left(\frac{4M^2}{9} - 2K^2\right)$, deux branches paraboliques éloignées à l' infini de l' axe; & ainsi de suite.

De là il est aisé de conclure que la valeur de y ne peût jamais passer du fini à l'infini. Donc puisque t peut devenir infinie, ce qui est évident par la nature même de l'équation (A), il s'ensuit que la valeur de y en t ne doit point contenir de termes qui croissent avec t; donc &c.

XLV. Voyons donc comment on pourroit faire disparoître de l' expression de y les termes qui contiendroient des puissances de t, & qui rendroient cette expression très-fautive.

Qu'on suppose, dans l'équation (A), $y = y' + \lambda + i\mu + i^2\nu$ + &c., λ, μ, ν &c. étant des constantes indéterminées & y' une nouvelle variable, & négligeant les termes qui

feroient affectés de i^3 &c. on aura une équation de cette forme

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A + i(B + My'^2) + i^2(C + 3N\lambda y'^2 + Ny'^3) + \&c. = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

dans laquelle $R^2 = K^2 + 2iM\lambda + i^2(2M\mu + 3N\lambda^2)$, $A = L + K^2\lambda$, $B = K^2\mu + M\lambda^2$, & $C = K^2\nu + 2M\mu\lambda + N\lambda^3$; ce qui donnera pour première équation approchée $\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A = 0$; d'où, en fuppofant $y' = f'$ & $\frac{dy'}{dt} = 0$ lorfque $t = 0$, on aura

$$y' = f' \text{ cof. } Rt + \frac{A}{R^2}(\text{cof. } Rt - 1).$$

Subftituant enfuite cette première valeur de y' dans le terme iMy'^2 de l'équation (C), & négligeant les termes affectés de i^2 on aura

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A + i\left[B + M\frac{A^2}{R^4} + \frac{M}{2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)^2\right] - 2iM\frac{A}{R^2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)\text{cof.} Rt + i\frac{M}{2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)^2 \text{cof.} 2Rt = 0.$$

On fera $A = 0$, moyennant quoi le terme qui contient cof. Rt difparoitra, & l'équation fe réduira à celle-ci

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + i\left(B + \frac{Mf'^2}{2}\right) + i\frac{Mf'^2}{2}\text{cof.} 2Rt = 0,$$

dont l'intégrale fera

$$y' = f' \text{ cof. } Rt + i\left(\frac{B}{R^2} + \frac{Mf'^2}{2R^2}\right)(\text{cof. } Rt - 1) - i\frac{Mf'^2}{2.3R^2}(\text{cof. } Rt - \text{cof. } 2Rt).$$

Si on veut fe contenter de cette approximation on négligera dans la valeur de R les termes de l'ordre de i^2, & l'on aura $R^2 = K^2 + 2iM\lambda$; or la fuppofition de

$A = 0$ donne $\lambda = -\frac{L}{K^2}$, donc on aura $R^2 = K^2 - 2i\frac{LM}{K^2}$. A l'égard de la quantité μ qui entre dans la valeur de B, on pourra la suppoſer $= 0$, de ſorte qu'on aura $B = M\lambda^2 = \frac{L^2 M}{K^4}$. Ainſi la valeur de y ſera, aux quantité de l'ordre de i^2 près, $-\frac{L}{K^2} + y'$.

Mais ſi on vouloit pouſſer le calcul plus loin il faudroit ſubſtituer l'expreſſion précédente de y' dans les termes iMy'^2, $3i^2N\lambda y'^2$ & $i^2Ny'^3$ de l'équation (C), en négligeant les quantités qui ſe trouveroient affectés de i^3, & faire diſparoitre enſuite le terme qui contiendroit coſ. Rt, en ſuppoſant égal à zéro ſon coéficient $i^2 [-2Mf' (\frac{B}{R^2} + \frac{Mf'^2}{2R^2}) + \frac{M^2 f'^3}{2.3 R^2} + \frac{3Nf'^3}{4}]$, ce qui donneroit $B = -\frac{5Mf'^2}{12} + \frac{3NR^2f'^2}{8M}$. De cette manière on auroit une nouvelle valeur de y' qui ne contiendroit, comme la précédente, que des *coſinus* d'angles; & ainſi de ſuite.

La valeur de B qu'on vient de trouver donnera, à cauſe de $B = K^2\mu + M\lambda^2$, $\mu = (\frac{3NR^2}{8MK^2} - \frac{5M}{12K^2}) f'^2 - \frac{ML^2}{K^6} =$ [en mettant au lieu de R^2 ſa valeur approchée K^2] $(\frac{3N}{8M} - \frac{5M}{12K^2}) f'^2 - \frac{ML^2}{K^6}$; d'où l'on aura

$$R^2 = K^2 + 2iM\lambda + i^2(2M\mu + 3N\lambda^2)$$
$$= K^2 - 2i\frac{ML}{K^2} + i^2[(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}) f'^2 + \frac{3NL^2}{K^4} - \frac{2M^2L^2}{K^6}];$$

c'eſt la valeur de R^2 aux quantités de l'ordre de i^3 près.

XLVI. Je vais présentement donner une méthode particulière pour intégrer ces sortes d'équations différentielles aussi exactement qu'on voudra par approximation, méthode qui aura sur la précédente l'avantage de donner directement, & sans aucune supposition précaire la vraie forme de l'intégrale.

Je supposerai ici pour plus de simplicité qu'on ne veuille avoir égard qu'aux quantités de l'ordre de i & de i^2; mais on verra aisément que la méthode aura lieu quelque loin qu'on veuille pousser l'approximation.

Soit $y^2 = u$, & $y^3 = v$; l'équation proposée (A) deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMu + i^2Nv = 0 \quad . \quad . \quad (D)$$

Or $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{2yd^2y}{dt^2} + \frac{2dy^2}{dt^2}$; donc si on multiplie l'équation (A) par $2y$, & l'équation (B) de l'Art. XLIV, par 2, & qu'ensuite on les ajoute ensemble on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2y^2 + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}y^3 + 6i^2Ny^4 = 0.$$

Mais comme la quantité u est déja multipliée par i dans l'équation (D), il est clair que pour ne pas introduire dans la valeur de y des termes de l'ordre de i^3, il faut rejetter dans la valeur de u, & par conséquent aussi de dans celle de $\frac{d^2u}{dt^2}$, les termes de l'ordre de i^2; effaçant donc le terme $6i^2Ny^4$, & mettant dans les autres u à la place de y^2 & v à la place de y^3, on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v = 0.$$

On a de même $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{3y^2d^2y}{dt^2} + \frac{6ydy^2}{dt^2}$; donc multipliant l'équation (A) par $3y^2$, & l'équation (B) par $6y$, & les ajoutant ensemble on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2y^3 + 15Ly^2 + 6Hy + 7iMy^4 + \&c. = 0.$$

Or v étant multipliée par i^2 dans l'équation (D), on rejettera dans la valeur de $\frac{d^2v}{dt^2}$ tous les termes affectés de i, de sorte qu'on aura, en mettant u au lieu de y^2 & v au lieu de y^3,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy = 0.$$

Nous avons donc entre les trois variables y, u, v, ces trois équations du second ordre

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMu + i^2Nv = 0 \\ &\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v = 0 \\ &\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy = 0 \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

lesquelles sont intégrables par la méthode de l'Art. XXVI.

Suivant cette méthode je multiplie la première par $\lambda e^{\rho t}dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t}dt$, la troisiéme par $\nu e^{\rho t}dt$ (*Art.* XXIX.), λ, μ, ν & ρ étant des constantes indéterminées, ensuite je les ajoute ensemble, & j'en prends l'intégrale en faisant disparoitre, par des intégrations par parties, les différences des variables y, u, v de dessous le signe $\int$; j'aurai donc

$$\left\{\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} - (\lambda y + \mu u + \nu v)\rho + \frac{\lambda L + 2\mu H}{\rho}\right\}e^{\rho t} +$$

$$\int\left\{\begin{aligned} &(\lambda\rho^2 + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H)y \\ &+ (i\lambda M + \mu\rho^2 + 4\mu K^2 + 15\nu L)u \\ &+ \left(i^2\lambda N + \frac{10i}{3}\mu M + \nu\rho^2 + 9\nu K^2\right)v \end{aligned}\right\}e^{\rho t}dt$$

$= \text{const.}$

J'égale à zéro les coéficiens des variables y, u, v, qui sont sous les signes $\int$, ce qui me donne ces trois équations

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\rho^2 + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H = 0 \\ i\lambda M + \mu\rho^2 + 4\mu K^2 + 15\nu L = 0 \\ i^2\lambda N + \frac{10i}{3}\mu M + \nu\rho^2 + 9\nu K^2 = 0 \end{array}\right\} \ldots (F)$$

par le moyen desquelles je détermine les quantités λ, μ, ν, & ρ.

De cette manière j'ai

$$\left\{\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} - (\lambda y + \mu u + \nu v)\rho + \frac{\lambda L + 2\mu H}{\rho}\right\} e^{\rho t} = \text{const.} \quad \ldots\ldots (G)$$

Or pour peu qu'on examine les équations (F), il est aisé de reconnoitre que la quantité μ doit être de l'ordre de i, & celle de ν de l'ordre de i^2.

Soit donc $\mu = i\lambda\alpha$ & $\nu = i^2\lambda\beta$, on aura, en divisant la première équation par λ, la seconde par $i\lambda$, & la troisiéme par $i^2\lambda$, les trois suivantes

$$\rho^2 + K^2 + 6i\alpha L + 6i^2\beta H = 0$$
$$M + \alpha(\rho^2 + 4K^2) + 15i\beta L = 0$$
$$N + \frac{10}{3}\alpha M + \beta(\rho^2 + 9K^2) = 0.$$

La première donne $\rho^2 = -K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H$, & mettant cette valeur de ρ^2 dans les deux autres on aura

$$M + \alpha(3K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H) + 15i\beta L = 0$$
$$N + \frac{10}{3}\alpha M + \beta(8K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H) = 0.$$

Négligeons d'abord les termes affectés de i, & nous aurons $M + 3\alpha K^2 = 0$, & $N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2 = 0$; d'où l'on tire $\alpha = -\frac{M}{3K^2}$ & $\beta = -\frac{N}{8K^2} - \frac{10\alpha M}{3.8K^2} = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}$.

Substituant ensuite ces valeurs dans les termes de l' ordre de i, & négligeant ceux de l' ordre de i^2, on aura

$$M + 3\alpha K^2 - 6iL\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + 15iL\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0$$

$$N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2 - 6iL\left(-\frac{M}{3K^2}\right)\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0$$

d' où l' on tirera de nouvelles valeurs plus exactes de α & de β, lesquelles seront $\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{6iL}{3K^2}\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 - \frac{15iL}{3K^2}\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right)$, $\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{8.9K^4} + \frac{10.6iLM}{9.8K^4}\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + \frac{15iLM}{9.8K^4}\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) + \frac{6iL}{8K^2}\left(-\frac{M}{3K^2}\right)\times\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right)$, & ainsi de suite; mais comme $\mu = i\lambda\alpha$ & $\nu = i^2\lambda\beta$, il est clair que pour notre objet il suffira d' avoir la valeur de α aux quantités de l'ordre de i^2 près, & celle de β aux quantités de l'ordre de i près; de sorte qu'on pourra se contenter de prendre

$$\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{iL}{K^4}\left(\frac{5N}{8} - \frac{17M^2}{36K^2}\right) \text{ \&}$$

$$\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}.$$

Ayant trouvé les valeurs de α & de β, l'on les substituera dans l' équation $\rho^2 = -K^2 - 6.i\alpha L - 6i^2\beta H$, & l' on aura, en ordonnant les termes par rapport à i,

$$\rho^2 = -K^2 + \frac{2iLM}{K^2} - \frac{i^2L^2}{K^4}\left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) + \frac{i^2H}{K^2}\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}\right).$$

Soit $\rho = R\sqrt{-1}$, ensorte que $\rho^2 = -R^2$, & l'on aura

$$R^2 = K^2 - \frac{2iLM}{K^2} + \frac{i^2L^2}{K^4}\left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) - \frac{i^2H}{K^2}$$
$$\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}\right);$$ d'où

$$R = K - i\frac{LM}{K^3} + i^2\frac{L^2}{K^5}\left(\frac{15N}{8} - \frac{10M^2}{3K^2}\right) - i^2\frac{H}{K^3}$$
$$\left(\frac{3N}{8} - \frac{15M^2}{12K^2}\right).$$

Reprenons maintenant l'équation (G), & substituons-y $R\sqrt{-1}$ au lieu de ρ, $i\lambda\alpha$ au lieu de μ, $i^2\lambda\beta$ au lieu de ν, y^2 au lieu de u, & y^3 au lieu de v, nous aurons, en prenant C pour la constante,

$$\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}\left\{(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} - (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2})R\sqrt{-1}\right\} = C.$$

Or soit, lorsque $t = 0$, $y = f$ & $\frac{dy}{dt} = g$, on aura $C = \lambda(1 + 2i\alpha f + 3i^2\beta f^2)g - \lambda(f + i\alpha f^2 + i^2\beta f^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2})R\sqrt{-1}$. Donc si on fait

$$F = f + i\alpha f^2 + i^2\beta f^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2},$$ &

$$G = (1 - 2i\alpha f + 3i^2\beta f^2)g,$$

& qu'on divise toute l'équation par $\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}$, on aura

$$(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} - (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2})R\sqrt{-1} = (G - FR\sqrt{-1})e^{-Rt\sqrt{-1}}$$
$$= G\,\text{cof.}\,Rt - FR\,\text{fin.}\,Rt - (FR\,\text{cof.}\,Rt + G\,\text{fin.}\,Rt)\sqrt{-1};$$

& prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$,

$$(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} + (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3$$

+

$+ \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}) R \sqrt{-1} = G$ cos. $Rt - FR$ sin. Rt
$+ (FR$ cos. $Rt + G$ sin. $Rt) \sqrt{-1}$;
donc retranchant la première de ces équations de la seconde, & divisant ensuite par $2 R \sqrt{-1}$, on aura

$$y + i \alpha y^2 + i^2 \beta y^3 + \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}$$
$$= F \text{ cos. } Rt + \frac{G}{R} \text{ sin. } Rt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

C'est l'intégrale de l'équation (A), en n'ayant égard qu'aux quantités de l'ordre de i & de i^2.

Si l'on veut avoir la valeur de y, on n'aura qu'à résoudre l'équation (H) par approximation, en observant de négliger dans cette opération les quantités qui se trouveroient multipliées par des puissances de i plus hautes que la seconde.

Pour y parvenir plus aisément on fera $y = T + iT' + i^2 T''$, & substituant cette valeur dans l'équation (H) on égalera à zéro les termes homogénes, c'est-à-dire ceux qui sont affectés de la même puissance de i; ce qui donnera $T = F$ cos. $Rt + \frac{G}{R}$ sin. $Rt - \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}$, $T' = -\alpha T^2$, $T'' = -2 \alpha T T' - \beta T^3$; d'où il est clair que la valeur de y ne contiendra que des *sinus* & des *cosinus* d'angles multiples de t.

En supposant $g = 0$ on verra que la valeur de R^2 trouvée ci-dessus s'accorde entiérement avec celle de l'Art. XLV.; il n'y aura, pour s'en convaincre, qu'à mettre, au lieu de H & de f', leurs valeurs approchées $-(K^2 f + 2 L f)$ & $f + \frac{L}{K^2}$ (*Artt.* XLIV. & XLV.).

Du mouvement d'un corps qui décrit une orbite à peu près circulaire, en vertu d'une force centrale proportionelle à une fonction quelconque de la distance.

XLVII. Soit r le rayon vecteur de l'orbite, t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, φ l'angle parcouru par le rayon r durant le tems t, Δr la fonction de la distance r qui exprime la force centrale, a la distance initiale, c la vitesse de projection, & b l'angle de la ligne de projection avec le rayon vecteur; on aura en prenant dt constant ces deux équations

$$d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} = 0 \ \& \ \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r d\varphi^2}{dt^2} + \Delta r = 0.$$

(Voyés l'Art. IV. du Mém. qui a pour titre *Application de la méthode précédente &c.* imprimé dans le Vol. préc.).

La première étant intégrée donne $\frac{r^2 d\varphi}{dt} =$ à une constante, mais lorsque $t = 0$ on a $r = a$ & $\frac{r d\varphi}{dt} = c \sin. b$; donc $\frac{r^2 d\varphi}{dt} = ac \sin. b$ & $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ac \sin. b}{r^2}$; substituant donc cette valeur dans l'autre équation, on aura pour les équations générales du mouvemens du corps

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{a^2 c^2 \sin. b^2}{r^3} + \Delta r = 0, \ \frac{d\varphi}{dt} - \frac{ac \sin. b}{r^2} = 0.$$

Maintenant, puisque on suppose que l'orbite différé peu d'un cercle, il est clair que r doit être presque égal à a, & que par conséquent on peut faire $r = a + iy$, i étant un coéficient très-petit & y une nouvelle variable; ce qui donnera $\frac{d^2 r}{dt^2} = i \frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(a + iy)^3} = \frac{1}{a^3} -$

$3i\frac{y}{a^4} + 6i^2\frac{y^2}{a^5} - 10i^3\frac{y^3}{a^6} +$ &c., $\Delta r = \Delta(a+iy) =$ (en supposant $\frac{d.\Delta r}{dr} = \Delta' r$, $\frac{d.\Delta' r}{dr} = \Delta'' r$ &c.) $\Delta a + i\Delta' a y + i^2\frac{\Delta'' a}{2}y^2 + i^3\frac{\Delta''' a}{2.3}y^3 +$ &c.; donc la première équation deviendra $i\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{c^2 \sin. b^2}{a^2}(1 - 3i\frac{y}{a} + 6i^2\frac{y^2}{a^2} - 10i^3\frac{y^3}{a^3} +$ &c.$) + \Delta a + i\Delta' a y + i^2\frac{\Delta'' a}{2}y^2 + i^3\frac{\Delta''' a}{2.3}y^3 +$ &c. $= 0$; d'où l'on voit que $\Delta a - \frac{c^2 \sin. b^2}{a}$ doit être nécessairement une quantité très-petite de l'ordre de i; de sorte qu'on peut supposer $\Delta a - \frac{c^2 \sin. b^2}{a} = iL$, moyennant quoi l'équation sera divisible par i, & deviendra après la division

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\Delta' a + \frac{3c^2 \sin. b^2}{a^2})y + L + i(\frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6c^2 \sin. b^2}{a^3})y^2 + i^2(\frac{\Delta''' a}{2.3} + \frac{10c^2 \sin. b^2}{a^4})y^3 + \&c. = 0,$$

équation qui se réduit à la formule (A) de l'Art. XLII., en supposant $\Delta' a + \frac{3c^2 \sin. b^2}{a^2} = K^2$, $\frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6c^2 \sin. b^2}{a^3} = M$, $\frac{\Delta''' a}{2.3} + \frac{10c^2 \sin. b^2}{a^4} = N$ &c.;

Ainsi l'on aura la valeur de y, & par conséquent celle de r en t; il faudra seulement observer que, quand $t = 0$, $r = a$ & $\frac{dr}{dt} = -c \operatorname{cos}. b$, c'est-à-dire $y = 0$ & $i\frac{dy}{dt} = -c \operatorname{cos}. b$, par conséquent $f = 0$ & $ig = -c \operatorname{cos}. b$; d'où l'on voit que cos. b doit être très-petit, & par conséquent l'angle de projection b presque droit;

ce qui est d'ailleurs évident, à cause que l'orbite est supposée peu différente d'un cercle.

L'autre équation donnera, après la substitution de $a + iy$ au lieu de r,

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{c\ \text{sin.}\ b}{a} + 2i\frac{c\ \text{sin.}\ b}{a^2}y - 3i^2\frac{c\ \text{sin.}\ b}{a^3}y^2 + 4i^3\frac{c\ \text{sin.}\ b}{a^4}y^3$$
$$- \&c. = 0.$$

Je substitue dans cette équation u au lieu de y^2 & v au lieu de y^3, ensuite j'y ajoute les trois équations (E) de l'Art. XLVI. multipliées la première par λ, la seconde par μ, la troisiéme par ν (λ, μ, ν étant des coéficiens indéterminés), ce qui me donne, en ordonnant les termes,

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{d^2u}{dt^2} + \nu\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{c\ \text{sin.}\ b}{a} + \lambda L + 2\mu H$$
$$+ \left(\frac{2ic\ \text{sin.}\ b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H\right)y + \left(-\frac{3i^2c\ \text{sin.}\ b}{a^3}\right.$$
$$\left. + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L\right)u + \left(\frac{4i^3c\ \text{sin.}\ b}{a^4} + i^2\lambda N +\right.$$
$$\left.\frac{10i\mu M}{3} + 9\nu K^2\right)v = 0.$$

Je suppose à présent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2ic\ \text{sin.}\ b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H = 0 \\ &-\frac{3i^2c\ \text{sin.}\ b}{a^3} + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L = 0 \\ &\frac{4i^3c\ \text{sin.}\ b}{a^4} + i^2\lambda N + \frac{10i\mu M}{3} + 9\nu K^2 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\text{I})$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{d^2u}{dt^2} + \nu\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{c\ \text{sin.}\ b}{a} + \lambda L + 2\mu H = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\varphi + \lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} - \left(\frac{c\ \text{sin.}\ b}{a} - \lambda L - 2\mu H\right)t$$
$$= \text{const.}$$

c'est-à-dire, en remettant y^2 au lieu de μ, y^3 au lieu de ν, & faisant attention que lorsque $t = 0$, on a $\varphi = 0$, $y = 0$ & $\frac{dy}{dt} = g$,

$$\varphi + (\lambda + 2\mu y + 3\nu y^2)\frac{dy}{dt} - (\frac{c\,\text{sin.}\,b}{a} - \lambda L - 2\mu H)t = \lambda g.$$

Et il ne s'agira plus que de tirer les valeurs de λ, μ, ν des équations (I); or si on fait $\lambda = i\gamma$, $\mu = i^2\delta$, $\nu = i^3\varepsilon$, & qu'on divise la première équation par i, la seconde par i^2, la troisiéme par i^3, on aura

$$\frac{2c\,\text{sin.}\,b}{a^2} + \gamma K^2 + 6i\delta L + 6i^2\varepsilon H = 0$$

$$-\frac{3c\,\text{sin.}\,b}{a^3} + \gamma M + 4\delta K^2 + 15i\varepsilon L = 0$$

$$\frac{4c\,\text{sin.}\,b}{a^4} + \gamma N + \frac{10}{3}\delta M + 9\varepsilon K^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$\gamma = -\frac{2c\,\text{sin.}\,b}{a^2K^2} + \frac{6iL}{K^2}\delta - \frac{6i^2H}{K^2}\varepsilon,$$

$$\delta = \frac{c\,\text{sin.}\,b}{a^2K^2}(\frac{3}{4a} + \frac{M}{2K^2} + \frac{9iLM}{8aK^4} + \frac{3iLM^2}{4K^6}) - \frac{15iL}{4K^2}\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{c\,\text{sin.}\,b}{a^2K^2}(-\frac{4}{9a^2} + \frac{2N}{9K^2} - \frac{5M}{18aK^2} - \frac{5M^2}{27K^4}).$$

Donc si on fait pour abreger

$$S = \frac{c\,\text{sin.}\,b}{a} - i\gamma L - 2i^2\delta H$$

on aura

$$\varphi = St + i\gamma g + i(\gamma + 2i\delta y + 3i^2\varepsilon y^2)\frac{dy}{dt} \quad (K)$$

Or y est déja connu en t, donc on connoitra aussi φ en t.

Il est à remarquer que $St + i\gamma g$ represénte l'angle du mouvement moyen; de sorte que si on nomme cet angle θ, & qu'on substitue dans les équations (H) & (K)

$\frac{\theta - i\gamma g}{S}$ au lieu de t, on aura les formules qui feront trouver le lieu vrai du corps, son lieu moyen étant donné.

Il est visible que les apsides de l'orbite se trouveront aux points, où $dy = 0$; or si on différentie l'équation (H) & qu'on fasse ensuite $dy = 0$ on aura $-RF$ sin. $Rt + G$ cos. $Rt = 0$, c'est-à-dire tang. $Rt = \frac{G}{RF}$. Soit h le plus petit angle qui répond à la tangente $\frac{G}{RF}$, & l'on aura $Rt = h + \mu\pi$, π dénotant l'angle de 180° dégrés, & μ un nombre quelconque entier; maintenant l'équation (K) donnera, lorsque $dy = 0$, $\varphi = St + i\gamma g$; donc mettant au lieu de t sa valeur $\frac{h + \mu\pi}{R}$ on aura pour les lieux des apsides

$$\varphi = i\gamma g + \frac{S}{R}(h + \mu\pi);$$

d'où l'on voit que la distance d'une apside à l'autre sera égale à l'angle $\frac{S}{R}\pi$, & que par conséquent le mouvement des apsides sera de $(\frac{S}{R} - 1)\,360°$ à chaque révolution.

XLVIII. Si on veut connoître la figure de l'orbite décrite par les corps, il faudra éliminer t des équations (H) & (K) pour avoir une équation entre y & φ, mais il sera beaucoup plus simple de substituer d'abord dans l'équation $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\,d\varphi^2}{dt^2} + \Delta r = 0$ au lieu de dt sa valeur $\frac{r^2\,d\varphi}{a\,c\,\text{sin.}\,b}$, ce qui donnera, en faisant $\frac{1}{r} = s$ & prenant $d\varphi$ constant, $\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s - \frac{\Delta\frac{1}{s}}{s^3 a^2 c^2 \text{ sin.}\,b^2} = 0$, & d'in-

tégrer ensuite cette dernière équation par la méthode de l'Art. XLVI.

En effet puisque r est à peu près égale à a (hyp.) s sera à peu près égale à $\frac{1}{a}$, & par conséquent on pourra supposer $s = \frac{1}{a} + iy$, ce qui donnera, en faisant

$\frac{\Delta \frac{1}{s}}{s^2 a^2 c^2 \text{ fin. } b^2} = \Gamma s$, & $\frac{1}{a} - \Gamma \frac{1}{a} = L$, $1 - \Gamma' \frac{1}{a} = K^2$, $-\frac{1}{2} \Gamma'' \frac{1}{a} = M$, $-\frac{1}{2.3} \Gamma''' \frac{1}{a} = N$ &c.,

$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + K^2 y + H + iMy^2 + i^2 Ny^3 + \&c. = 0$,

dont l'intégrale sera (*Art. cité*)

$y + i\alpha y^2 + i^2 \beta y^3 = -\frac{L - 2i\alpha H}{R^2} + F \text{ cof. } R\varphi$,

$+ \frac{G}{R} \text{ fin. } R\varphi$.

Ainsi l'on aura y en φ; il faudra seulement observer que la quantité g n'exprimera plus ici la valeur de $\frac{dy}{dt}$ lorsque $t = 0$, mais celle de $\frac{dy}{d\varphi}$ c'est-à-dire $\frac{dr}{id\varphi}$, de sorte qu'on aura $ig = -$ cot. b.

Le coéficient R donnera la distance d'une apside à l'autre de $\frac{180^\circ}{R}$, & l'on verra, après en avoir fait le calcul, que cette valeur s'accorde avec celle que nous avons trouvée ci-dessus.

Soit $\Delta r = Ar^{m-1}$, on aura $\Gamma s = \frac{A}{a^2 c^2 \text{ fin. } b^2} s^{-m}$, donc $\Gamma \frac{1}{a} = \frac{Aa^{m-2}}{c^2 \text{ fin. } b^2}$, $\Gamma' \frac{1}{a} = -m \frac{Aa^{m-1}}{c^2 \text{ fin. } b^2}$, $\Gamma'' \frac{1}{a}$

$= m\,(m+1)\,\frac{A a^{m}}{c^2 \sin.\, b^2}$, $= -m\,(m+1)\,(m+2)$
$\frac{A a^{m+1}}{c^2 \sin.\, b^2}$ &c.; on aura donc $\frac{1}{a} - \frac{A a^{m-2}}{c^2 \sin.\, b^2} = i\,L$,

$1 + m\,\frac{A a^{m-1}}{c^2 \sin.\, b^2} = K^2,\; -\frac{m\,(m+1)}{2} \times \frac{A a^{m}}{c^2 \sin.\, b^2} = M$,

$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{2.3} \times \frac{A a^{m+1}}{c^2 \sin.\, b^2} = N$ &c.; donc, puisque
$\frac{A a^{m-2}}{c^2 \sin.\, b^2} = \frac{1}{a} - i\,L$, on aura

$$K^2 = 1 + m\,(1 - i a L),\; M = -\frac{m(m+1)a}{2}\,(1 - i a L),$$
$$N = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,a^2}{2.3}\,(1 - i a L)\ \&c.;$$

faisant donc ces substitutions dans la valeur de R^2 de l'Art. XLVI., & rejettant tous les termes qui contiendroient des puissances de i plus hautes que la seconde, on aura

$$R^2 = 1 + m\,(1 - i a L) + i\,m\,(m+1)\,a\,L\,\frac{1 - i a L}{1 + m\,(1 - i a L)}$$
$$+ \frac{i^2 a^2 L^2}{(1+m)^2}\left(\frac{5\,m\,(m+1)\,(m+2)}{8} - \frac{17\,m^2\,(m+1)}{24}\right)$$
$$- \frac{i^2 a^2 H}{1+m}\left(\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{8} - \frac{5\,m^2\,(m+1)}{24}\right)$$
$$= 1 + m + \frac{i^2 m\,(3-m)\,a^2}{12\,(1+m)}\,[L^2 - (1+m)\,H],$$

d'où l'on tire

$$R = \sqrt{(1+m)} + \frac{i^2 m\,(3-m)\,a^2}{24\,(1+m)^{\frac{1}{2}}}\,[L^2 - (1+m)\,H]$$

ce qui donnera pour la distance d'une apside à l'autre

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{(1+m)}} - \frac{i^2 m\,(3-m)\,a^2}{24\,(1+m)^{\frac{3}{2}}}\,[L^2 - (1+m)\,H]\right\} 180^\circ.$$

XLIX. Supposons maintenant que l' on ait à intégrer l' équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + i\left(My^2 + M'\frac{dy^2}{dt^2}\right) + i^2\left(Ny^3 + N'y\frac{dy^2}{dt^2}\right) + \&c. = 0$$

on pourra faire disparoitre la quantité $\frac{dy^2}{dt^2}$ de la maniére suivante.

Qu'on multiplie l'équation par $2\,dy$, & qu'on en prenne l'intégrale, en négligeant les termes affectés de i^2, on aura

$$\frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + i\left(\frac{2M}{3}y^3 + 2M'\int\frac{dy^2}{dt^2}dy\right) = 0.$$

Or $\int\frac{dy^2}{dt^2}dy = y\frac{dy^2}{dt^2} - 2\int y\,dy\frac{d^2y}{dt^2}$ = (en mettant au lieu de $\frac{dy^2}{dt^2}$ & de $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-K^2y^2 - 2Ly - H$, & $-K^2y - L$) $-\frac{K^2}{3}y^3 - Ly^2 - Hy$; donc on aura

$$\frac{dy^2}{dt^2} + (K^2 - 2iLM')y^2 + (2L - 2iHM')y + H + i\left(\frac{2M}{3} - \frac{2K^2M'}{3}\right)y^3 = 0.$$

Substituant donc cette valeur de $\frac{dy^2}{dt^2}$ dans l'équation proposée, elle deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [K^2 - 2iLM' + i^2H(2M'^2 - N')]y + L - iHM' + i(M - K^2M' + 2iLM'^2)y^2 + i^2\left(N - K^2N' - \frac{2MM'}{3} + \frac{2K^2M'^2}{3}\right)y^3 = 0,$$

laquelle est, comme l'on voit, dans le cas de l' équation (A).

Par cette méthode on pourra faire disparoître toutes les puissances paires de $\frac{dy}{dt}$ qui se trouveront dans l'équation proposée. A l'égard des puissances impaires de $\frac{dy}{dt}$, il est facile de voir qu'elles donneront dans la valeur de y des arcs de cercle; d'où il s'ensuit que la solution ne pourra avoir lieu que tant que t ne sera pas fort grande, & qu'ainsi il sera permis de se servir de telle méthode d'approximation qu'on voudra. Cependant comme il peut être quelquefois important de connoitre la vraie forme de la valeur de y, qu'on chercheroit vainement par les méthodes ordinaires, je vais donner le moyen d'y parvenir.

L. Soit en général l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + K'\frac{dy}{dt} + L + i\left(My^2 + M'y\frac{dy}{dt} + M''\frac{dy^2}{dt^2}\right) + i^2\left(Ny^3 + N'y^2\frac{dy}{dt} + N''y\frac{dy^2}{dt^2} + N'''\frac{dy^3}{dt^3}\right) + \&c. = 0.$$

On fera $\frac{dy}{dt} = z$, & l'on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + K'z + L + i(My^2 + M'yz + M''z^2) + i^2(Ny^3 + N'y^2z + N''yz^2 + N'''z^3) + \&c. = 0.$$

On différentiera cette équation, & l'on substituera ensuite, au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, au lieu $\frac{dy}{dt}$, z, & à lieu de $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ou plutôt sa valeur en y & z; de cette manière on aura une nouvelle équation en z de la forme suivante

$$\frac{d^2z}{dt^2} + kz + k'y + l + i(my^2 + m'yz + m''z^2) + i^2(ny^3 + n'y^2z + n''yz^2 + n'''z^3) + \&c. = 0.$$

Toute la difficulté se réduira donc à intégrer ces deux équations ; sur quoi voyés ci-après l' Art. LII.

LI. Si l' équation proposée étoit du quatriéme ordre ; on la réduiroit à deux du second, en faisant $\frac{d^2y}{dt^2} - z = 0$, & substituant ensuite z au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dz}{dt}$ au lieu de $\frac{d^3y}{dt^3}$, & $\frac{d^2z}{dt^2}$ au lieu de $\frac{d^4y}{dt^4}$.

Mais si la proposée étoit du troisiéme ordre, alors il faudroit la réduire d' abord au quatriéme par la différentiation, & ensuite à deux du second par la supposition de $\frac{d^2y}{dt^2} - z = 0$; & ainsi du reste.

De l' intégration des équations.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F + Gy + Hz + i(Ky^2 + Lyz + Mz^2) + i^2(Ny^3 + Py^2z + Qyz^2 + Rz^3) + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad (L)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f + gy + hz + i(ky^2 + lyz + mz^2) + i^2(ny^3 + py^2z + qyz^2 + rz^3) + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

LII. Nous commencerons par chercher la valeur des quantités $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$, & $\frac{dydz}{dt^2}$ qui entrent dans les différentielles secondes de y^2, z^2, yz &c. ; or, comme nous nous proposons seulement de pousser l' approximation jusqu'aux quantités de l' ordre de i^2, il suffira d' avoir égard, dans les valeurs dont il s'agit, aux termes de l'ordre de i, parce-que les quantités y^2, z^2, yz &c. sont déja elles mémes multipliées par i dans les équations proposées.

Je multiplie d' abord l' équation (L) par $2\,dy$, & j'en prends l'intégrale ; j'ai en négligeant les termes affectés de i^2,

$$\frac{dy^2}{dt^2} + A + 2Fy + Gy^2 + 2H\int z\,dy + i\left(\frac{2K}{3}y^3 + 2L\int yz\,dy + 2M\int z^2 dy\right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; (N)$$

Je multiplie de même l'équation (M) par $2\,dz$ & j'ai, aprés l'intégration,

$$\frac{dz^2}{dt^2} + B + 2fz + 2g\int y\,dz + hz^2 + i\left(2k\int y^2 dz + 2l\int yz\,dz + \frac{2m}{3}z^3\right) = 0,$$

ou bien, en mettant $yz - \int z\,dy$ au lieu de $\int y\,dz$, $y^2 z - 2\int yz\,dy$ au lieu de $\int y^2 dz$, & $\frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{2}\int z^2 dy$ au lieu de $\int yz\,dz$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + B + 2fz + 2gyz + hz^2 - 2g\int z\,dy + i\left(2ky^2 z + lyz^2 + \frac{2m}{3}z^3 - 4k\int yz\,dy - l\int z^2 dy\right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; (O)$$

Enfin multipliant l'équation (L) par dz & l'équation (M) par dy, les ajoutant ensemble, & intégrant on aura

$$\frac{dy\,dz}{dt^2} + C + fy + Fz + \frac{g}{2}y^2 + Gyz + \frac{H}{2}z^2 + (h - G)\int z\,dy + i\left(\frac{k}{3}y^3 + Ky^2 z + \frac{L}{2}yz^2 + \frac{M}{3}z^3 + (l - 2K)\int yz\,dy + \left(m - \frac{L}{2}\right)\int z^2 dy\right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; (P)$$

Pour déterminer les constantes A, B, C, on supposera que, quand $t = 0$, on ait $y = \gamma$, $z = \delta$, $\frac{dy}{dt} = \varepsilon$, $\frac{dz}{dt} = \eta$, $\int z\,dy = \Gamma$, $\int yz\,dy = \Delta$, & $\int z^2 dy = \Lambda$, & l'on aura

$$A = -\varepsilon^2 - 2F\gamma - G\gamma^2 - 2H\Gamma - i\left(\frac{2K}{3}\gamma^3 + 2L\Delta + 2M\Lambda\right),$$

$B = -\eta^2 - 2f\delta - 2g\gamma\delta - h\delta^2 + 2g\Gamma - i(2k\gamma^2\delta$
$+ l\gamma\delta^2 + \frac{2m}{3}\delta^3 - 4k\Delta - l\Lambda)$, &

$C = -\varepsilon\eta - f\gamma - F\delta - \frac{g}{2}\gamma^2 - G\gamma\delta - \frac{H}{2}\delta^2 -$
$(h - G)\Gamma - i[\frac{k}{3}\gamma^3 + K\gamma^2\delta + \frac{L}{2}\gamma\delta^2 + \frac{M}{3}\delta^3 +$
$(l - 2K)\Delta + (m - \frac{L}{2})\Delta]$.

Cela poſé, je fais

$$y^2 = u,\ y\zeta = u1,\ \zeta^2 = u2,\ \int \zeta dy = u3,$$
$$y^3 = v,\ y^2\zeta = v1,\ y\zeta^2 = v2,\ \zeta^3 = v3,$$
$$\int y\zeta dy = v4,\ \int \zeta^2 dy = v5,\ y\int\zeta dy = v6,\ \zeta\int\zeta dy = v7;$$

j'aurai, au lieu des équations (L) & (M), ces deux-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F + Gy + H\zeta + i(Ku + Lu1 + Mu2) +$$
$$i^2(Nv + Pv1 + Qv2 + Rv3) = 0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + f + gy + h\zeta + i(ku + lu1 + mu2) +$$
$$i^2(nv + pv1 + qv2 + rv3) = 0 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Maintenant on a 1.° $\frac{d^2u}{dt^2} = 2y\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy^2}{dt^2}$; donc $2y$ (L) + 2 (N) donnera, en négligeant les termes de l'ordre de i,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2A + 6Fy + 4Gy^2 + 2Hy\zeta + 4H\int\zeta dy$$
$$+ i(\frac{10K}{3}y^3 + 2Ly^2\zeta + 2My\zeta^2 + 4L\int y\zeta dy +$$
$$4M\int\zeta^2 dy) = 0,$$

& en faiſant les ſubſtitutions précédentes,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2A + 6Fy + 4Gu + 2Hu1 + 4Hu3$$
$$+ i(\frac{10K}{3}v + 2Lv1 + 2Mv2 + 4Lv4 + 4Mv5)$$
$$= 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

2.° $\frac{d^2 u_1}{dt^2} = z \frac{d^2 y}{dt^2} + y \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dy\,dz}{dt^2}$; donc z (L) $+ y$ (M) $+ 2$ (P) donnera

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2C + 3fy + 3Fz + 2gu + (3G + h)u_1 + 2Hu_2 + 2(h - G)u_3 + i\left\{\frac{5k}{3}v + (3K + l)v_1 + (2L + m)v_2 + \frac{5M}{3}v_3 + (2l - 4K)v_4 + (2m - L)v_5\right\} = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

3.° $\frac{d^2 u_2}{dt^2} = 2z \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dz^2}{dt^2}$; donc $2z$ (M) $+ 2$ (O) donnera

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + 2B + 6fz + 6gu_1 + 4hu_2 - 4gu_3 + i\left(6kv_1 + 4lv_2 + \frac{10m}{3}v_3 - 8Kv_4 - 2lv_5\right) = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

4.° $\frac{d^2 u_3}{dt^2} = z \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy\,dz}{dt^2}$, donc z (L) $+$ (P) donnera

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} + C + fy + 2Fz + \frac{g}{2}u + 2Gu_1 + \frac{3H}{2}u_2 + (h - G)u_3 + i\left\{\frac{k}{3}v + 2Kv_1 + \frac{3L}{2}v_2 + \frac{4M}{3}v_3 + (l - 2K)v_4 + \left(m - \frac{L}{2}\right)v_5\right\} = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

5.° $\frac{d^2 v}{dt^2} = 3y^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6y \frac{dy^2}{dt^2}$, donc $3y^2$ (L) $+ 6y$ (N) donnera, en rejettant les termes affectés de i, à cause que la variable v est déja elle même multipliée par i^2 dans les équations (1) & (2),

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 6Ay + 15Fu + gGv + 3Hv_1 + 12Hv_6 = 0 \quad \ldots \quad (7).$$

6.° $\frac{d^2v1}{dt^2} = 2yz\frac{d^2y}{dt^2} + y^2\frac{d^2z}{dt^2} + 2z\frac{dy^2}{dt^2} + 4y\frac{dydz}{dt^2}$;
donc $2yz$ (L) $+ y^2$ (M) $+ 2z$ (N) $+ 4y$ (P) donnera, en négligeant par la même raison que ci-devant les termes de l'ordre de i,

$$\frac{d^2v1}{dt^2} + 4Cy + 2Az + 5fu + 10Fu1 + 3gv + (8G + h)v1 + 4Hv2 + 4(h - G)v6 + 4Hv7 = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

7.° $\frac{d^2v2}{dt^2} = z^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2yz\frac{d^2z}{dt^2} + 2y\frac{dz^2}{dt^2} + 4z\frac{dydz}{dt^2}$,
donc z^2 (L) $+ 2yz$ (M) $+ 2y$ (O) $+ 4z$ (P) donnera

$$\frac{d^2v2}{dt^2} + 2By + 4Cz + 10fu1 + 5Fu2 + 8gv1 + (5G + 4h)v2 + 3Hv3 - 4gv6 + 4(h - G)v7 = 0 \quad \ldots \quad (9)$$

8.° $\frac{d^2v3}{dt^2} = 3z^2\frac{d^2z}{dt^2} + 6z\frac{dz^2}{dt^2}$, donc $3z^2$ (M) $+ 6z$ (O) donnera

$$\frac{d^2v3}{dt^2} + 6Bz + 15fu2 + 15gv2 + ghv3 - 12gv7 = 0 \quad \ldots \quad (10)$$

9.° $\frac{d^2v4}{dt^2} = yz\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{dy^2}{dt^2} + y\frac{dydz}{dt^2}$, donc yz (L) $+$ z (N) $+ y$ (P) donnera

$$\frac{d^2v4}{dt^2} + Cy + Az + fu + 4Fu1 + \frac{g}{2}v + 3Gv1 + \frac{3H}{2}v2 + (h - G)v6 + 2Hv7 = 0 \quad \ldots \quad (11)$$

10.° $\frac{d^2v5}{dt^2} = z^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2z\frac{dydz}{dt^2}$; donc z^2 (L) $+ 2z$ (P) donnera

$$\frac{d^2v5}{dt^2} + 2Cz + 2fu1 + 3Fu2 + gv1 + 3Gv2 + 2Hv3 + 2(h - G)v7 = 0 \quad \ldots \quad (12)$$

11.° $\frac{d^2 v6}{dt^2} = (y z + \int z\, dy) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 z \frac{dy^2}{dt^2} + y \frac{dy\, dz}{dt^2}$; donc $(y z + \int z\, dy) \times (L) + 2 z (N) + y (P)$ donnera

$$\frac{d^2 v6}{dt^2} + Cy + 2 A z + f u + 6 F u1 + F u3 + \frac{g}{2} v + 4 G v1 + \frac{3H}{2} v2 + h v6 + 5 H v7 = 0 \quad . \ (13)$$

12.° $\frac{d^2 v7}{dt^2} = z^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} \int z\, dy + 3 z \frac{dy\, dz}{dt^2}$; donc $z^2 (L) + (M) \int z\, dy + 3 z (P)$ donnera

$$\frac{d^2 v7}{dt^2} + 3 C z + 3 f u1 + 4 F u2 + f u3 + \frac{3g}{2} v1 + 4 G v2 + \frac{5H}{2} v3 + g v6 + (4h - 3G) = 0 \quad . \ (14)$$

Ayant ainsi autant d'équations que de variables, l'intégration qui doit donner la valeur de y & de z est facile par la méthode de l'Art. XXVI.; de sorte que si on multiplie l'équation (1) par e^{pt}, l'équation (2) par λe^{pt}, l'équation (3) par $i \mu e^{pt}$, l'équation (4) par $i \mu 1 e^{pt}$, l'équation (5) par $i \mu 2 e^{pt}$, l'équation (6) par $i \mu 3 e^{pt}$, l'équation (7) par $i^2 \nu e^{pt}$, l'équation (8) par $i^2 \nu 1 e^{pt}$, l'équation (9) par $i^2 \nu 2 e^{pt}$, l'équation (10) par $i^2 \nu 3 e^{pt}$, l'équation (11) par $i^2 \nu 4 e^{pt}$, l'équation (12) par $i^2 \nu 5 e^{pt}$, l'équation (13) par $i^2 \nu 6 e^{pt}$, & l'équation (14) par $i^2 \nu 7 e^{pt}$, & qu'on achéve le reste comme dans l'Art. XLVI. on aura, en faisant pour abreger

$$\theta = y + \lambda z + i(\mu u + \mu 1 u1 + \mu 2 u2 + \mu 3 u3) + i^2 (\nu v + \nu 1 v1 + \nu 2 v2 + \nu 3 v3 + \nu 4 v4 + \nu 5 v5 + \nu 6 v6 + \nu 7 v7)$$ &

$$x = F + \lambda f + i (2 \mu A + 2 \mu 1 C + 2 \mu 2 B + \mu 3 C)$$

on aura dis-je

$$\left(\frac{d\theta}{dt} - p\theta + \frac{x}{p}\right) e^{pt} = \text{const.} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (Q)$$

& ensuite

p^2 +

$$\rho^2 + G + g\lambda + i(6F\mu + 3f\mu_1 + f\mu_3) + i^2(6A\nu + 4C\nu_1 + 2B\nu_2 + C\nu_4 + C\nu_6) = 0$$

$$H + (\rho^2 + h)\lambda + i(3F\mu_1 + 6f\mu_2 + 2F\mu_3) + i^2(2A\nu_1 + 4C\nu_2 + 6B\nu_3 + A\nu_4 + 2C\nu_5 + 2A\nu_6 + 3C\nu_7) = 0$$

$$K + k\lambda + (\rho^2 + 4G)\mu + 2g\mu_1 + \frac{g}{2}\mu_3 + i(15F\nu + 5f\nu_1 + f\nu_4 + f\nu_6) = 0$$

$$L + l\lambda + 2H\mu + (\rho^2 + 3G + h)\mu_1 + 6g\mu_2 + 2G\mu_3 + i(10F\nu_1 + 10f\nu_2 + 4F\nu_4 + 2f\nu_5 + 6F\nu_6 + 3f\nu_7) = 0$$

$$M + m\lambda + 2H\mu_1 + (\rho^2 + 4h)\mu_2 + \frac{3H}{2}\mu_3 + i(5F\nu_2 + 15f\nu_3 + 3F\nu_5 + 4F\nu_7) = 0$$

$$4H\mu + 2(h - G)\mu_1 - 4g\mu_2 + (\rho^2 + h - G)\mu_3 + i(F\nu_6 + f\nu_7) = 0$$

$$N + n\lambda + \frac{10K}{3}\mu + \frac{5k}{3}\mu_1 + \frac{k}{3}\mu_3 + (\rho^2 + 9G)\nu + 3g\nu_1 + \frac{g}{2}\nu_4 + \frac{g}{2}\nu_6 = 0$$

$$P + p\lambda + 2L\mu + (3K + l)\mu_1 + 6k\mu_2 + 2K\mu_3 + 3H\nu + (\rho^2 + 8G + h)\nu_1 + 8g\nu_2 + 3G\nu_4 + g\nu_5 + 4G\nu_6 + \frac{3g}{2}\nu_7 = 0$$

$$Q + q\lambda + 2M\mu + (2L + m)\mu_1 + 4l\mu_2 + \frac{3L}{2}\mu_3 + 4H\nu_1 + (\rho^2 + 5G + 4h)\nu_2 + 15g\nu_3 + \frac{3H}{2}\nu_4 + 3G\nu_5 + \frac{3H}{2}\nu_6 + 4G\nu_7 = 0$$

$$R + r\lambda + \frac{5M}{3}\mu_1 + \frac{10m}{3}\mu_2 + \frac{4M}{3}\mu_3 + 3H\nu_2 + (\rho^2 + 9h)\nu_3 + 2H\nu_5 + \frac{3H}{2}\nu_7 = 0$$

$4L\mu + (2l - 4K)\mu_1 - 8k\mu_2 + (l - 2K)\mu_3$
$+ \rho^2\nu_4 = 0$

$4M\mu + (2m - L)\mu_1 - 2l\mu_2 + (m - \frac{L}{2})\mu_3$
$+ \rho^2\nu_5 = 0$

$12H\nu + 4(h - G)\nu_1 - 4g\nu_2 + (h - G)\nu_4$
$+ (\rho^2 + h)\nu_6 + g\nu_7 = 0$

$4H\nu_1 + 4(h - G)\nu_2 - 12g\nu_3 + 2H\nu_4 + 2(h - G)\nu_5$
$+ h\nu_6 + (\rho^2 + 4h - 3G)\nu_7 = 0,$

équations par lesquelles on déterminera les 14 inconnues $\rho, \lambda, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$, en ayant attention de pousser les valeurs des deux premières jusqu'aux quantités de l' ordre de i^2, celles des quatre suivantes jusqu'aux quantités de l' ordre de i seulement, & enfin de rejetter dans les valeurs des sept dernières toutes les quantités affectés de i.

Or je remarque 1.° que la quantité ρ ne paroissant que sous la forme quadrative, elle aura nécessairement deux valeurs, l'une positive & l' autre négative; de sorte que si on suppose que ρ désigne la racine positive, on pourra écrire partout indifféremment $+ \rho$, & $- \rho$: 2.° que si on représente les deux premières équations par

$\rho^2 + G + g\lambda + i\alpha = 0$ & $H + (\rho^2 + h)\lambda + i\beta = 0,$

on aura, en éliminant λ,

$$\rho^4 + (G + h + i\alpha)\rho^2 + Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g) = 0 \quad (R)$$

d' où l'on tirera deux valeurs de ρ^2.

Soit maintenant lorsque $t = 0$, $\theta = D$, & $\frac{d\theta}{dt} = E$; c' est-à-dire

$D = \gamma + \lambda\delta + i(\mu\gamma^2 + \mu_1\gamma\delta + \mu_2\delta^2 + \mu_3\Gamma)$
$+ i^2(\nu\gamma^3 + \nu_1\gamma^2\delta + \nu_2\gamma\delta^2 + \nu_3\delta^3 + \nu_4\Delta +$
$\nu_5\Lambda + \nu_6\gamma\Gamma + \nu_7\delta\Gamma)$ &

$E = \varepsilon + \lambda\eta + i(2\mu\gamma\varepsilon + \mu_1(\delta\varepsilon + \gamma\eta) + 2\mu_2\delta\eta$

$+ \mu 3 \delta \varepsilon] + i^2 [3 \nu \gamma^2 \delta + \nu 1 (2 \gamma \delta \varepsilon + \gamma^2 \eta) + \nu 2 (\delta^2 \varepsilon + 2 \gamma \delta \eta) + 3 \nu 3 \delta^2 \eta + \nu 4 \gamma \delta \varepsilon + \nu 5 \delta^2 \varepsilon + \nu 6 (\Gamma \varepsilon + \gamma^2 \delta \varepsilon) + \nu 7 (\Gamma \eta + \gamma \delta^2 \varepsilon)$;
l'équation (Q) donnera, en divisant par $e^{\rho t}$,

$$\frac{d\theta}{dt} - \rho\theta + \frac{\varkappa}{\rho} = \left(E - \rho D + \frac{\varkappa}{\rho}\right) e^{-\rho t},$$

& prenant la quantité ρ en —,

$$\frac{d\theta}{dt} + \rho\theta - \frac{\varkappa}{\rho} = \left(E + \rho D - \frac{\varkappa}{\rho}\right) e^{\rho t},$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{\varkappa}{\rho^2} + \left(D - \frac{\varkappa}{\rho^2}\right) \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2} + E \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$$

ou bien

$$\theta = \frac{\varkappa}{\rho^2} + \left(D - \frac{\varkappa}{\rho^2}\right) \text{cos. } t\sqrt{-\rho^2} + \frac{E}{\sqrt{-\rho^2}} \text{sin. } t\sqrt{-\rho^2}.$$

Soient maintenant ρ'^2 & ρ''^2 les deux racines de l'équation (R), & θ', θ'', λ', λ'', μ', μ'' &c. les valeurs correspondantes de θ, λ, μ &c.; on aura, en remettant au lieu de u, $u 1$, $u 2$ &c. leurs valeurs y^2, yz, z^2 &c., ces deux équations

$$y + \lambda' z + i(\mu' y^2 + \mu' 1 yz + \mu' 2 z^2 + \mu' 3 \textstyle\int z dy) + i^2 (\nu' y^3 + \nu' 1 y^2 z + \nu' 2 y z^2 + \nu' 3 z^3 + \nu' 4 \int y z dy + \nu' 5 \int z^2 dy + \nu' 6 y \int z dy + \nu' 7 z \int z dy) = \theta',$$

$$y + \lambda'' z + i(\mu'' y^2 + \mu'' 1 yz + \mu'' 2 z^2 + \mu'' 3 \textstyle\int z dy) + i^2 (\nu'' y^3 + \nu'' 1 y^2 z + \nu'' 2 y z^2 + \nu'' 3 z^3 + \nu'' 4 \int y z dy + \nu'' 5 \int z^2 dy + \nu'' 6 y \int z dy + \nu'' 7 z \int z dy) = \theta'',$$

d'où l'on tirera par approximation les valeurs de y & de z.

Il est évident que pour que les valeurs de y & de z ne contiennent que des *sinus* & des *cosinus*, il faut que les racines de l'équation (R) soient toutes deux réelles & négatives; par conséquent il faut 1° que $(G + h + i\alpha)^2 > 4[Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g)]$, 2° que $G + h + i\alpha > 0$, & $Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g) > 0$. Si ces trois conditions n'ont point lieu à la fois, alors les

valeurs de y & de z contiendront des exponentielles réelles, & par conséquent la solution ne sera bonne que tant que t ne sera pas fort grande.

On pourroit ajouter que les expressions de y & de z renfermeroient l'angle t, si les deux valeurs de ρ^2 étoient égales; car alors, supposant $\rho'' = \rho' + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouissante, on trouveroit que la seconde des deux équations ci-dessus se réduiroit à celle-ci

$$\frac{d\lambda'}{d\rho'} z + i\left\{\frac{d\mu'}{d\rho'} y^2 + \frac{d\mu'1}{d\rho'} yz + \frac{d\mu'2}{d\rho'} z^2 + \frac{d\mu'3}{d\rho'} \int z dy\right\}$$
$$+ i^2 \left\{\frac{d\nu'}{d\rho'} y^3 + \frac{d\nu'1}{d\rho'} y^2 z + \frac{d\nu'2}{d\rho'} yz^2 + \frac{d\nu'3}{d\rho'} z^3 + \right.$$
$$\left. \frac{d\nu'4}{d\rho'} \int yz dy + \frac{d\nu'5}{d\rho'} \int z^2 dy + \frac{d\nu'6}{d\rho'} y\int z dy + \frac{d\nu'7}{d\rho'} z\int dy \right\}$$
$$= \frac{d\theta'}{d\rho'},$$

dans laquelle la quantité $\frac{d\theta'}{d\rho'}$ contient nécessairement des termes multipliées par l' angle t. Mais comme l'équation (R) n'est qu'approchée, quand il arriveroit que $(G + h + i\alpha)^2 = 4[Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g)]$, ce qui est la condition des racines égales, on n' en pourroit conclure autre chose, si non que les deux valeurs de ρ^2 seroient égales aux quantités de l'ordre de i^2 près, & que par conséquent il faudroit pousser l' approximation jusqu'aux quantités de ce même ordre. Ce ne seroit qu'après avoir poussé l' approximation fort loin & avoir reconnu que les valeurs de ρ sont toujours égales, qu'on pourroit à la rigueur faire usage de l' équation que nous venons de donner.

LIII. On voit aisément que la méthode précédente est générale pour tel nombre d' équations qu' on voudra, pourvû que ces équations soient analogues aux équations (L) & (M) c' est-à-dire que les produits de deux di-

mensions soient affectés de i, ceux de trois soient affectés de i^2, & ainsi de suite.

Cette méthode seroit surtout utile pour déterminer aussi près qu'on voudroit le mouvement d'un sistème quelconque de corps qui agiroient les uns sur les autres, & qui ne feroient que des très-petites oscillations autour de leurs points d'équilibre. Car nommant iy, iz &c. les espaces parcourus par ces corps dans leurs oscillations, on trouveroit des équations de la forme de celles dont je viens de parler; au reste nous avons déja donné (*Art. XXX.*) la solution générale de ce problême pour le cas des oscillations infiniment petites.

LIV. Si les équations proposées contenoient des termes de la forme $i\int z\,dy$, $i^2\int yz\,dy$, $i^2\int z^2\,dy$, $i^2 y\int z\,dy$, $i^2 z\int z\,dy$, l'intégration n'auroit aucune difficulté de plus; il faudroit seulement avoir attention de changer les expressions $\int dy\int z\,dy$ & $\int dz\int z\,dy$ qui se trouveroient dans les équations (N), (O), (P) en leurs équivalentes $y\int z\,dy - \int yz\,dy$, & $z\int z\,dy - \int z^2 dy$.

LV. Si elles contenoient des termes de la forme $i\frac{dy^2}{dt^2}$, $i\frac{dy\,dz}{dt^2}$, $i\frac{dz^2}{dt^2}$, $i^2 y\frac{dy^2}{dt^2}$, $i^2 y\frac{dy\,dz}{dt^2}$ &c. on les feroit disparoître par des procédés semblables à ceux que nous avons suivis dans l'Art. XLIX. Il en seroit de même de tous les termes qui contiendroient des produits de $\frac{dy}{dt}$ & $\frac{dz}{dt}$ de dimensions paires; mais s'il se trouvoit des produits de dimensions impaires de ces mêmes quantités, alors on feroit chacune d'elles égale à une nouvelle variable, & on acheveroit le reste comme dans l'Art. L.

LVI. Enfin si l'on avoit des équations du troisiéme ordre & au delà, on les réduiroit toujours au second par la méthode de l'Art. LI.

De l' intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i(My\,cos.\,Ht + N\frac{dy}{dt}\,fin.\,Ht) = T \quad (S)$$

dans laquelle T *eſt une fonction quelconque de* t.

LVII. Je remarque d' abord que ſi T étoit $= 0$, l'équation ſeroit dans le cas de l' Art. LV., car il n' y auroit qu'à faire coſ. $Ht = z$, ce qui donneroit ſin. $Ht = -\frac{dz}{Hdt}$ & $\frac{d^2z}{dt^2} + H^2z = 0$. Or puiſque l'indéterminée y ne n' y paſſe pas le premier dégré, il eſt clair qu'on pourra faire diſparoitre le terme tout connu T par la méthode de l' Art. I. En effet ſi on multiplie l'équation propoſée par $z\,dt$, & qu'on pratique les autres opérations que préſcrit cette méthode, on aura les deux équations ſuivantes

$$\frac{d^2z}{dt^2} + K^2z + i[(M\,\text{coſ.}\,Ht - \frac{d.N\,\text{ſin.}\,Ht}{dt})z - N\,\text{ſin.}\,Ht\frac{dz}{dt}] = 0, \;\&\; \frac{dy}{dt}z - y\frac{dz}{dt} = \int Tz\,dt,$$

dont la première eſt réductible au cas de l'Art. LV., & dont l'autre étant intégrée donnera $y = \int \frac{dt}{z^2}\int Tz\,dt$.

Au reſte ces ſortes d' équations peuvent encore s' intégrer par une méthode particulière & fort ſimple que je vais expoſer.

Je fais y coſ. $Ht = u$, y coſ. $2Ht = v$ &c. & y ſin. $Ht = U$, y ſin. $2Ht = V$ &c.;

ce qui me donne

$$\frac{dy}{dt}\,\text{coſ.}\,Ht = \frac{du}{dt} + HU,\; \frac{dy}{dt}\,\text{coſ.}\,2Ht = \frac{dv}{dt} + 2HV \;\&c.$$

$$\frac{dy}{dt}\,\text{ſin.}\,Ht = \frac{dU}{dt} - Hu,\; \frac{dy}{dt}\,\text{ſin.}\,2Ht = \frac{dV}{dt} - 2Hv \;\&c.$$

& ensuite

$$\frac{d^2y}{dt^2}\ \text{cos}.\ Ht = \frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} - H^2u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\ \text{cos}.\ 2Ht = \frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} - 4H^2v$$

&c.

$$\frac{d^2y}{dt^2}\ \text{sin}.\ Ht = \frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} - H^2U$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\ \text{sin}.\ 2Ht = \frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} - 4H^2V$$

&c.

Cela posé, j'aurai d'abord au lieu de l'équation (S) celle-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i[(M - HN)u + N\frac{dU}{dt}] = T \ (1)$$

De plus la même équation (S) étant multipliée successivement par cos. Ht & par sin. Ht donnera

$$\frac{d^2y}{dt^2}\ \text{cos}.\ Ht + K^2y\ \text{cos}.\ Ht + i[My(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \text{cos}.\ Ht)$$
$$+ \frac{1}{2}N\frac{dy}{dt}\ \text{sin}.\ 2Ht] = T\ \text{cos}.\ Ht,\ \&$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\ \text{sin}.\ Ht + K^2y\ \text{sin}.\ Ht + i[\frac{1}{2}My\ \text{sin}.\ 2Ht +$$
$$N\frac{dy}{dt}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \text{cos}.\ 2Ht] = T\ \text{sin}.\ Ht,$$

c'est-à-dire, en faisant les substitutions ci-dessus

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2)u + i[\frac{M}{2}y + (\frac{M}{2} - NH)v$$
$$+ \frac{N}{2} \times \frac{dV}{dt}] = T\ \text{cos}.\ Ht \ \ldots\ldots\ldots \ (2)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} + (K^2 - H^2)U + i[(\frac{M}{2} - NH)V -$$
$$\frac{N}{2} \times \frac{dv}{dt}] = T\ \text{sin}.\ Ht \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (3)$$

Si on vouloit n'avoir égard, dans la valeur de y, qu'aux quantité de l' ordre de i, on négligeroit dans les valeurs de u & de U, & par conséquent aussi dans les équations (2) & (3) tous les termes affectés de i, moyennant quoi ces équations ne contiendroient plus que les trois variables y, u & U, de sorte qu'avec l' équation (1) elles suffiroient pour résoudre le problême; mais si on veut pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l' ordre de i^2, comme nous l' avons fait dans les problêmes précédens, alors on conservera tous les termes des équations (2) & (3), & on multipliera de nouveau l' équation (S) par cos. $2Ht$, & par sin. $2Ht$; ce qui donnera, après les substitutions, deux équations en v & en V, dans lesquelles on pourra négliger les termes affectés de i, parceque les quantités v & V sont déja elles-mêmes multipliées par i dans les équations (2) & (3); ainsi l' on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} + (K^2 - 4H^2)v = T \text{ cos. } 2Ht \quad (4)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} + (K^2 - 4H^2)V = T \text{ sin. } 2Ht \quad (5)$$

& l'intégration de l'équation proposée sera réduite à celle de cinq équations (1), (2), (3), (4), & (5), lesquelles sont, comme l' on voit, dans le cas de l' Art. XXIX.

Ayant donc multiplié la première de ces équations par $\lambda e^{\rho t} dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t} dt$, la troisiéme par $\mathrm{M} e^{\rho t} dt$, la quatriéme par $\nu e^{\rho t} dt$, & la cinquiéme par $\mathrm{N} e^{\rho t} dt$, on les ajoutera ensemble, & on en prendra l' intégrale, en faisant disparoitre de dessous le signe $\int$ les différences des variables y, u, U &c.; après-quoi on chassera les expressions intégrales $\int y e^{\rho t} dt$, $\int u e^{\rho t} dt$, $\int U e^{\rho t} dt$ &c. en égalant à zéro leurs coéficiens, ce qui donnera

$$(\rho^2 + K^2)\lambda + i\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}\mathrm{M}\rho\right) = 0$$

$i(M$

$i(M - NH)\lambda + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mu + 2HM\rho = 0$

$- iN\lambda\rho - 2H\mu\rho + (\rho^2 + K^2 - H^2)M = 0$

$i(\frac{M}{2} - NH)\mu + \frac{iN}{2}M\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)\nu + 4HN\rho = 0$

$- \frac{iN}{2}\mu\rho + i(\frac{M}{2} - NH)M - 4H\nu\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)N = 0.$

De cette manière on aura l' équation intégrale

$\left\{\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + M\frac{dU}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} + N\frac{dV}{dt} + (-\lambda\rho + \frac{iN}{2}M)y + (-\mu\rho - 2HM)u + (iN\lambda + 2H\mu - M\rho)U + (-\frac{iN}{2}M - \nu\rho - 4HN)\nu + (\frac{iN}{2}\mu + 4H\nu - N\rho)V\right\}e^{\rho t} = \int T(\lambda + \mu \text{ cof. } Ht + M \text{ fin. } Ht + \nu \text{ cof. } 2Ht + N \text{ fin. } 2Ht)e^{\rho t}dt.$

Soit $\rho^2 = -R^2$, de forte que $\rho = R\sqrt{-1}$, & $\mu = i\alpha\lambda$, $\nu = i^2\beta\lambda$, $M = iA\rho\lambda$, $N = i^2B\rho\lambda$, & l' on aura premiérement

$- R^2 + K^2 + i^2(\frac{M}{2}\alpha + \frac{N}{2}R^2\alpha) = 0$

$M - NH + (-R^2 + K^2 - H^2)\alpha - 2HR^2A = 0$

$- N - 2H\alpha + (-R^2 + K^2 - H^2)A = 0$

$(\frac{M}{2} - NH)\alpha - \frac{N}{2}R^2A + (-R^2 + K^2 - 4H^2)\beta - 4HR^2B = 0$

$- \frac{N}{2}\alpha + (\frac{M}{2} - NH)A - 4H\beta + (-R^2 + K^2 - 4H^2)B = 0,$

d' où l' on tire

$$R^2 = \frac{K^2 + \frac{1}{2} i^2 M \alpha}{1 - \frac{1}{2} i^2 N \mathrm{A}}.$$

$$\alpha = \frac{(M - NH)(R^2 - K^2 + H^2) + 2NHR^2}{(R^2 - K^2 + H^2)^2 - 4H^2R^2}$$

$$\mathrm{A} = \frac{N(R^2 - K^2 + H^2) + 2(M - NH)H}{(R^2 - K^2 + H^2)^2 - 4H^2R^2}$$

$$\beta = \frac{(\frac{1}{2}M - NH)(R^2 - K^2 + 4H^2) + 2NHR^4}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2}\,\alpha$$

$$- \frac{\frac{1}{2}N(R^2 - K^2 + 4H^2)R^2 + 4(\frac{1}{2}M - NH)HR}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2}\,\mathrm{A}$$

$$\mathrm{B} = \frac{(\frac{1}{2}M - NH)(R^2 - K^2 + 4H^2) + 2NHR^2}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2}\,\mathrm{A}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}N(R^2 - K^2 + 4H^2) + 4(\frac{1}{2}M - NH)H}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2}\,\alpha$$

Et enſuite

$$\Big\{ \frac{dy}{dt} + i\alpha \frac{du}{dt} + i(N + 2H\alpha + R^2\mathrm{A})U$$

$$+ i^2\beta \frac{dv}{dt} + i^2(\frac{N}{2}\alpha + 4H\beta + R^2\mathrm{B})V$$

$$- [(1 - \frac{iN}{2}\mathrm{A})y + i(\alpha + 2H\mathrm{A})u - i\mathrm{A}\frac{dU}{dt}$$

$$+ i^2(\frac{N}{2}\mathrm{A} + \beta + 4H\mathrm{B})v - i^2\mathrm{B}\frac{dV}{dt}] R\sqrt{-1} \Big\} e^{Rt\sqrt{-1}}$$

$$= \int T [1 + i\alpha \operatorname{cof.} Ht + i^2\beta \operatorname{cof.} 2Ht + (i\mathrm{A} \operatorname{fin.} Ht$$

$$+ i^2\mathrm{B} \operatorname{fin.} 2Ht) R\sqrt{-1}] e^{Rt\sqrt{-1}} dt;$$

ou diviſant par $e^{Rt\sqrt{-1}}$, & changeant les exponentielles imaginaires en *ſinus* & *coſinus*,

$$\frac{dy}{dt} + i\alpha\frac{du}{dt} + i(N + 2H\alpha + R^2 \mathrm{A})U$$

$$+ i^2\beta\frac{dv}{dt} + i^2(\frac{N}{2}\alpha + 4H\beta + R^2 \mathrm{B})V$$

$$-[(1 - \frac{iN}{2}\mathrm{A})y + i(\alpha + 2H\mathrm{A})u - i\mathrm{A}\frac{dU}{dt}$$

$$+ i^2(\frac{N}{2}\mathrm{A} + \beta + 4H\mathrm{B})v - i^2\mathrm{B}\frac{dV}{dt}]R\sqrt{-1}$$

$= \text{cof.}\, Rt \int T [(1 + i\alpha \,\text{cof.}\, Ht + i^2\beta \,\text{cof.}\, 2Ht) \,\text{cof.}\, Rt$
$- i(\mathrm{A}\,\text{fin.}\, Ht + i\mathrm{B}\,\text{fin.}\, 2Ht) R\,\text{fin.}\, Rt]\, dt$
$+ \text{fin.}\, Rt \int T [(1 + i\alpha \,\text{cof.}\, Ht + i^2\beta \,\text{cof.}\, 2Ht) \,\text{fin.}\, Rt$
$+ i(\mathrm{A}\,\text{fin.}\, Ht + i\mathrm{B}\,\text{fin.}\, 2Ht) R\,\text{cof.}\, Rt]\, dt$
$- \text{fin.}\, Rt \int T [(1 + i\alpha \,\text{cof.}\, Ht + i^2\beta \,\text{cof.}\, 2Ht) \,\text{cof.}\, Rt$
$- i(\mathrm{A}\,\text{fin.}\, Ht + i\mathrm{B}\,\text{fin.}\, 2Ht) R\,\text{fin.}\, Rt]\, dt \cdot \sqrt{-1}$
$+ \text{cof.}\, Rt \int T [(1 + i\alpha \,\text{cof.}\, Ht + i^2\beta \,\text{cof.}\, 2Ht) \,\text{fin.}\, Rt$
$+ i(\mathrm{A}\,\text{fin.}\, Ht + i\mathrm{B}\,\text{fin.}\, 2Ht) R\,\text{cof.}\, Rt]\, dt \cdot \sqrt{-1}$.

Donc si on remet pour u, U, v, & V leurs valeurs, & qu'on compare les imaginaires avec les imaginaires, & les réelles avec les réelles, on aura

$$(1 - \frac{iN}{2}\mathrm{A} + i(\alpha + H\mathrm{A}) \,\text{cof.}\, Ht + i^2(\frac{N}{2}\mathrm{A} + \beta + 2H\mathrm{B}) \,\text{cof.}\, 2Ht]y - i(\mathrm{A}\,\text{fin.}\, Ht + i\mathrm{B}\,\text{fin.}\, 2Ht)\frac{dy}{dt}$$

$= \text{fin.}\, Rt \int T [(1 + i\alpha \,\text{cof.}\, Ht + i^2\beta \,\text{cof.}\, 2Ht) \frac{\text{cof.}\, Rt}{R}$
$- i(\mathrm{A}\,\text{fin.}\, Ht + i\mathrm{B}\,\text{fin.}\, 2Ht) \,\text{fin.}\, Rt]\, dt$
$- \text{cof.}\, Rt \int T [(1 + i\alpha \,\text{cof.}\, Ht + i^2\beta \,\text{cof.}\, Ht) \frac{\text{fin.}\, Rt}{R}$
$+ i(\mathrm{A}\,\text{fin.}\, Ht + i\mathrm{B}\,\text{fin.}\, 2Ht) \,\text{cof.}\, Rt]\, dt$,

& $(1 + i\alpha \,\text{cof.}\, Ht + i^2\beta \,\text{cof.}\, 2Ht) \frac{dy}{dt} + i[(N + H\alpha + R^2\mathrm{A}) \,\text{fin.}\, Ht + (\frac{N}{2}\alpha + 2H\beta + R^2\mathrm{B}) \,\text{fin.}\, 2Ht]y$

$= \text{cos.}\, Rt \int T [(1 + i\alpha \,\text{cos.}\, Ht + i^2 \beta\, \text{cos.}\, 2Ht)\, \text{cos.}\, Rt$
$- i\,(A\, \text{sin.}\, Ht + i\, B\, \text{sin.}\, 2Ht)\, R\, \text{sin.}\, Rt]\, dt$
$+ \text{sin.}\, Rt \int T [(1 + i\alpha\, \text{cos.}\, Ht + i^2\beta\, \text{cos.}\, 2Ht)\, \text{sin.}\, Rt$
$+ i\,(A\, \text{sin.}\, Ht + i B\, \text{sin.}\, 2Ht)\, R\, \text{cos.}\, Rt]\, dt.$

Deux équations, à l'aide desquelles on éliminera $\frac{dy}{dt}$.

De l'intégration des équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y + i\,(My' \,\textit{cos.}\, Ht + N \frac{dy'}{dt} \textit{sin.}\, Ht) = T \quad . \text{(T)}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2 y' + i\,(M'y\, \textit{cos.}\, Ht - N' \frac{dy}{dt} \textit{sin.}\, Ht) = T' \quad . \text{(U)}$$

LVIII. Soit fait, comme dans l'Art. préc.,
y cos. $Ht = u$, y sin. $Ht = U$, y cos. $2Ht = v$;
y sin. $2Ht = V$ &c.
& de même
y' cos. $Ht = u'$, y' sin. $Ht = U'$, y' cos. $2Ht = v'$,
y' sin. $2Ht = V'$ &c.
on aura

$$\frac{dy}{dt}\, \text{cos.}\, Ht = \frac{du}{dt} + HU, \quad \frac{dy}{dt}\, \text{cos.}\, 2Ht = \frac{dv}{dt} + 2HV,$$

$$\frac{dy}{dt}\, \text{sin.}\, Ht = \frac{dU}{dt} - Hu, \quad \frac{dy}{dt}\, \text{sin.}\, 2Ht = \frac{dV}{dt} - 2Hv;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{cos.}\, Ht = \frac{d^2u}{dt^2} + 2H \frac{dU}{dt} - H^2 u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{cos.}\, 2Ht = \frac{d^2v}{dt^2} + 4H \frac{dV}{dt} - 4H^2 v$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{sin.}\, Ht = \frac{d^2U}{dt^2} - 2H \frac{du}{dt} - H^2 U$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{sin.}\, 2Ht = \frac{d^2V}{dt^2} - 4H \frac{dv}{dt} - 4H^2 V$$

& pareillement

$$\frac{dy'}{dt}\text{ coſ. } Ht = \frac{du'}{dt} + HU', \quad \frac{dy'}{dt}\text{ coſ. } 2Ht = \frac{dv'}{dt} + 2HV',$$

$$\frac{dy'}{dt}\text{ ſin. } Ht = \frac{dU'}{dt} - Hu', \quad \frac{dy'}{dt}\text{ ſin. } 2Ht = \frac{dV'}{dt} - 2Hv';$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}\text{ coſ. } Ht = \frac{d^2u'}{dt^2} + 2H\frac{dU'}{dt} - H^2u'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}\text{ coſ. } 2Ht = \frac{d^2v'}{dt^2} + 4H\frac{dV'}{dt} - 4H^2v'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}\text{ ſin. } Ht = \frac{d^2U'}{dt^2} - 2H\frac{du'}{dt} - H^2U'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}\text{ ſin. } 2Ht = \frac{d^2V'}{dt^2} - 4H\frac{dv'}{dt} - 4H^2V'.$$

Cela poſé, on aura d'abord, au lieu des équations (T) & (U), ces deux-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i[(M - HN)u' + N\frac{dU'}{dt}] = T \quad (1)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2y' + i[(M' - HN')u - N'\frac{dU}{dt}] = T' \quad (2)$$

Enſuite les mêmes équations (T) & (U) étant multipliées ſucceſſivement par coſ. Ht & par ſin. Ht donneront (après les ſubſtitutions) ces quatre autres équations

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2)u + i[\frac{M}{2}y' + (\frac{M}{2} - NH)v' + \frac{N}{2}\cdot\frac{dV'}{dt}] = T\text{ coſ. } Ht \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} + (K^2 - H^2)U + i[(\frac{M}{2} - NH)V' + \frac{N}{2}\cdot\frac{dy'}{dt} - \frac{N}{2}\cdot\frac{dv'}{dt}] = T\text{ ſin. } Ht \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{d^2u'}{dt^2} + 2H\frac{dU'}{dt} + (K'^2 - H^2)u' + i[(\frac{M'}{2}y + (\frac{M'}{2} + N'H)v - \frac{N'}{2}\cdot\frac{dV}{dt}] = T'\text{ coſ. } Ht \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{d^2U'}{dt^2} - 2H\frac{du'}{dt} + (K'^2 - H^2)U' + i[(\frac{M'}{2} + N'H)V - \frac{N'}{2}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$+ \frac{N'}{2}\cdot\frac{dv}{dt}] = T' \text{ fin. } Ht \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Enfin multipliant encore l'une & l'autre des équations (T) & (U) par cof. $2Ht$ & par fin. $2Ht$, & négligeant les termes affectés de i, on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} + (K^2 - 4H^2)v = T \text{ cof. } 2Ht \quad . \quad . \quad (7)$$
$$\frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} + (K^2 - 4H^2)V = T \text{ fin. } 2Ht \quad . \quad . \quad (8)$$
$$\frac{d^2v'}{dt^2} + 4H\frac{dV'}{dt} + (K'^2 - 4H^2)v' = T' \text{ cof. } 2Ht \quad . \quad . \quad (9)$$
$$\frac{d^2V'}{dt^2} - 4H\frac{dv'}{dt} + (K'^2 - 4H^2)V' = T' \text{ fin. } 2Ht \quad . \quad (10)$$

On aura donc en tout dix inconnues & dix équations, & le problême ne dépendra plus que de l'intégration de ces équations.

En fuivant notre méthode on multipliera l'équation (1) par λ, l'équation (2) par λ', l'équation (3) par μ, l'équation (4) par M, l'équation (5) par μ', l'équation (6) par M', l'équation (7) par ν, l'équation (8) par N, l'équation (9) par ν', l'équation (10) par N'; & après les avoir ajoutées enfemble on multipliera la fomme par $e^{\rho t}dt$, & on en prendra l'intégrale; ce qui donnera (en faifant difparoitre de deffous le figne $\int$ les différences des variables y, u, V, u' &c. & égalant enfuite à zéro les coéficiens des termes où ces mêmes variables fe trouveront fous le figne)

$$\left.\begin{array}{l}(\rho^2 + K^2)\lambda + i(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}\text{M}'\rho) = 0 \\ (\rho^2 + K'^2)\lambda' + i(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}\text{M}\rho) = 0\end{array}\right\} . \ (V)$$

$$\left.\begin{array}{l}
i(M'+N'H)\lambda'+(\rho^2+K^2-H^2)\mu+2HM\rho=0\\
iN'\lambda'\rho-2H\mu\rho+(\rho^2+K^2-H^2)M=0\\
i(M-NH)\lambda+(\rho^2+K'^2-H^2)\mu'+2HM'\rho=0\\
-iN\lambda\rho-2H\mu'\rho+(\rho^2+K'^2-H^2)M'=0\\
i(\frac{M'}{2}+N'H)\mu'-\frac{iN'}{2}M'\rho+(\rho^2+K^2-4H^2)\nu\\
+4HN\rho=0\\
\frac{iN'}{2}\mu'\rho+i(\frac{M'}{2}+N'H)M'-4H\nu\rho+(\rho^2+K^2\\
-4H^2)N=0\\
i(\frac{M}{2}-NH)\mu+\frac{iN}{2}M\rho+(\rho^2+K'^2-4H^2)\nu'\\
+4HN'\rho=0\\
-\frac{iN}{2}\mu\rho+i(\frac{M}{2}-NH)M-4H\nu'\rho+(\rho^2+K'^2\\
-4H^2)N'=0.
\end{array}\right\}\ (V)$$

Et $\Big\{\lambda\frac{dy}{dt}+\lambda'\frac{dy'}{dt}+\mu\frac{du}{dt}+M\frac{dU}{dt}+\mu'\frac{du'}{dt}$

$+M'\frac{dU'}{dt}+\nu\frac{dv}{dt}+N\frac{dV}{dt}+\nu'\frac{dv'}{dt}+N'\frac{dV'}{dt}$

$+(-\lambda\rho-\frac{iN'}{2}M')y+(-\lambda'\rho+\frac{iN}{2}M)y'$

$+(-\mu\rho-2HM)u+(-iN'\lambda'+2H\mu-M\rho)U$

$+(-\mu'\rho-2HM')u'+(iN\lambda+2H\mu'-M'\rho)U'$

$+(\frac{iN'}{2}M'-\nu\rho-4HN)v+(-\frac{iN'}{2}\mu'+4H\nu-N\rho)V$

$+(-\frac{iN}{2}M-\nu'\rho-4HN')v'+(\frac{iN}{2}\mu+4H\nu'-N'\rho)V'\Big\}e^{\rho t}$

$=\int[T(\lambda+\mu\,\text{cof.}\,Ht+M\,\text{fin.}\,Ht+\nu\,\text{cof.}\,2Ht+N\,\text{fin.}\,2Ht)+T'(\lambda'+\mu'\,\text{cof.}\,Ht+M'\,\text{fin.}\,Ht+\nu'\,\text{cof.}\,2Ht+N'\,\text{fin.}\,2Ht)]e^{\rho t}dt$ . . . . . . (X)

LIX. Qu'on multiplie la quatriéme, la fixiéme, la huitiéme, & la dixiéme des équations (V) par $\pm\sqrt{-1}$,

& qu'on les ajoute ensuite chacune à sa précédente, on aura, au lieu des dix équations (V), les six suivantes

$$(\rho^2 + K^2)\lambda + i\left(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho\right) = 0,$$

$$(\rho^2 + K'^2)\lambda' + i\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho\right) = 0$$

$$i[M' + N'(H + \rho\sqrt{-1})]\lambda'$$
$$+ (K^2 - [H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu \pm M\sqrt{-1}) = 0$$

$$i[M - N(H + \rho\sqrt{-1})]\lambda$$
$$+ (K'^2 - [H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu' + M'\sqrt{-1}) = 0$$

$$i(M' + N'[2H + \rho\sqrt{-1}])(\mu' + M'\sqrt{-1})$$
$$+ 2(K^2 - [2H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\nu \pm N\sqrt{-1}) = 0$$

$$i(M - N[2H + \rho\sqrt{-1}])(\mu + M\sqrt{-1})$$
$$+ 2(K'^2 - [2H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\nu' \pm N'\sqrt{-1}) = 0.$$

Les deux premières donnent, ou bien

$$-\rho^2 = K^2 + \frac{i}{\lambda}\left(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Y)$$

& $\lambda' = -i\,\dfrac{M\mu - NM\rho}{2(\rho^2 + K^2)}$, ou bien

$$-\rho^2 = K'^2 + \frac{i}{\lambda'}\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho\right)$$

& $\lambda = -i\,\dfrac{M'\mu' + NM'\rho}{2(\rho^2 + K^2)}$.

Dans le premier cas, la troisiéme équation deviendra, en substituant la valeur de λ',

$$(K^2 - [H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu \pm M\sqrt{-1})$$
$$- i^2[M' + N'(H \pm \rho\sqrt{-1})]\,\frac{M'\mu' + N'M'\rho}{2(\rho^2 + K^2)} = 0,$$

laquelle donnera séparément, à cause de l'ambiguité du signe, $\mu = 0$, & $M = 0$; de sorte qu'on aura aussi $\lambda' = 0$, $\nu' = 0$, & $N' = 0$; & l'on aura ensuite pour la détermination des quantités μ', M', ν, & N,

$$\left.\begin{aligned} \mu' \pm M'\sqrt{-1} &= -i\,\frac{M - N(H \pm \rho\sqrt{-1})}{K'^2 - (H \pm \rho\sqrt{-1})^2}\,\lambda \\ \nu \pm N\sqrt{-1} &= -i\,\frac{M' + N'(2H \pm \rho\sqrt{-1})}{2\,(K'^2 - (2H \pm \rho\sqrt{-1})^2)}\,(\mu' \pm M'\sqrt{-1}) \end{aligned}\right\}(Z)$$

d'où l'on voit que les quantités μ' & M' seront de l'ordre de i, & les quantités ν & N de celui de i^2.

Dans le second cas on trouvera d'abord $\mu' = 0$, $M' = 0$, & par conséquent $\lambda = 0$, $\nu = 0$, & $N = 0$; ensuite on aura

$$\mu \pm M\sqrt{-1} = -i\,\frac{M' + N'(H \pm \rho\sqrt{-1})}{K^2 - (H \pm \rho\sqrt{-1})^2}\,\lambda' \quad \&$$

$$\nu' \pm N'\sqrt{-1} = -i\,\frac{M - N(2H \pm \rho\sqrt{-1})}{2(K'^2 - (2H \pm \rho\sqrt{-1})^2)}\,(\mu \pm M\sqrt{-1}),$$

d'où l'on tirera, μ, M, ν', & N'.

Ayant ainsi les valeurs de tous les coéficiens on achevera le calcul comme on a fait dans l'Art. préc., & l'on aura, à l'aide des deux valeurs de ρ^2, deux équations finales, qui serviront à trouver y & y'.

Il y a cependant un cas qui demande une discussion particulière; c'est celui où le coéficient H seroit presque égal à $K - K'$, la différence n'étant que de l'ordre de i; nous alons l'examiner dans les Articles suivans.

Analise du cas où H *est presque égal à* K — K'.

LX. Soit $K = h + ik$, $K' = h' + ik'$, & $H = h - h'$; ensorte que $H = K - K' + i(k - k')$.

Je fais $\rho\sqrt{-1} = h + im$, c'est-à-dire $\rho = -(h + im)\sqrt{-1}$; ce qui me donne $\rho^2 + K^2 = -2ih(m - k) - 2i^2(m^2 - k^2)$; & les équations (Y) & (Z) de l'Art. préc. se changeront en celles-ci

$$2h\,(m - k) + i(m^2 - k^2)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{M'}{2}\mu' - \frac{N'(b+im)}{2}M'\sqrt{-1}\right) \quad (a)$$

$$\mu' \pm M'\sqrt{-1} = -i\,\frac{M - N(b - b' \pm (b+im))}{(b'+ik')^2 - (b - b' \pm (b+im))^2}\,\lambda \quad (b)$$

$$\nu \pm N\sqrt{-1} = -\frac{i}{2}\cdot\frac{M' + N'(2b - 2b' \pm (b+im))}{(b+ik)^2 - (2b - 2b' \pm (b+im))^2}$$

$$\times(\mu' \pm M'\sqrt{-1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

d' où l' on tirera les valeurs de m, μ', M', ν, & N.

L' équation (b) étant prise en — donnera

$$\mu' - M'\sqrt{-1} = -i\,\frac{M + N(b' + im)}{(b'+ik)^2 - (b'+im)^2}\,\lambda.$$

Or $(h' + ik')^2 - (h' + im)^2 = 2ik'(k' - m) + i^2(k'^2 - m^2) = -i(m - k')(2h + i[m + k'])$; donc faisant cette substitution, & divisant ensuite le haut & le bas de la fraction par i, on aura

$$\mu' - M'\sqrt{-1} = \frac{M + N(b' + im)}{(m - k')(2b' + i(m + k'))}\,\lambda.$$

Equation, dans laquelle je remarque que la quantité i ne se trouve plus qu'au premier dégré; de sorte que cette équation ne doit être regardée comme exacte qu'aux quantités de l' ordre de i^2 près. C' est pourquoi il faudra négliger dans la suite toutes les quantités de ce même ordre.

Prenons maintenant l' équation (b) en +, & nous aurons, en rejettant les termes de l' ordre de i^2,

$$\mu' + M'\sqrt{-1} = -i\,\frac{M - N(2b - b)}{b'^2 - (2b - b')^2}\,\lambda.$$

Donc

$$\mu' = \frac{1}{2}\left(\frac{M + N(b' + im)}{(m - k')(2b' + i(m + k'))} + i\,\frac{M - N(2b - b')}{4b(b - b')}\right)\lambda$$

$$M' = \frac{1}{2}\left(\frac{M + N(b' + im)}{(m - k')(2b' + i(m + k')} - i\,\frac{M - N(2b - b')}{4b(b - b')}\right)\lambda$$

c'est-à-dire, en faisant

$$\alpha = \frac{Nm}{4b'(m-k')} - \frac{(M+Nb')(m+k')}{8b'^2(m-k')} + \frac{M-N(2b-b')}{8b(b-b')} \quad \&$$

$$A = \frac{Nm}{4b'(m-k')} - \frac{(M+Nb')(m+k')}{8b'^2(m-k')} - \frac{M-N(2b-b')}{8b(b-b')},$$

$$\mu' = \left(\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} + i\alpha\right)\lambda$$

$$\& \ M' = \left(\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} + iA\right)\lambda\sqrt{-1},$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (a) il viendra

$$2h(m-k) + i(m^2-k^2) = \frac{M'(M+Nb')}{8b'(m-k')} + i\alpha\frac{M'}{2}$$

$$+ \frac{N'(M+Nb)(b+im)}{8b'(m-k')} + iA\frac{N'b}{2},$$

ou multipliant par $\frac{m-k'}{2b}$ & réduisant,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(M+Nb')(M'+N'b)}{16bb'}$$

$$+ i\left[(m^2-k^2)(m-k') - \frac{(M+Nb)N'm}{16bb'}\right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha M'+AN'b)(m-k')}{4b}\right] = 0$$

De sorte que, si l'on fait

$$\Delta = (m^2-k^2)(m-k') - \frac{(M+Nb)N'm}{16bb'}$$

$$- \frac{(\alpha M'+AN'b)(m-k')}{4b},$$

on aura,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(M+Nb')(M'+N'b)}{16bb'} + i\Delta = 0 \ . \ (d)$$

équation d'où l'on tirera deux valeurs de m que j'appellerai $m\,1$ & $m\,2$.

Si on néglige le terme $i\Delta$ on aura les premières valeurs approchées de $m\,1$ & de $m\,2$; & substituant ensuite

ces valeurs dans l'expression de Δ on aura les valeurs de $m\,1$ & de $m\,2$ aux quantités de l'ordre de i^2 près.

Enfin l'équation (c) donnera, en substituant les valeurs de μ' & de M', & négligeant les termes de l'ordre de i^2,

$$\nu \pm N\sqrt{-1} = -i\,\frac{M+N(2b-2b'\pm b)}{b^2-(2b-2b'\pm b)^2} \times \frac{M+Nb'}{8b'(m-k')}\,(1\mp 1)\,\lambda$$

d'où, en faisant

$$\beta = -\frac{M+N(b-2b')}{4b'(b-k')} \times \frac{M+Nb'}{8b'(m-k')},$$

on aura

$$\nu = i\beta\lambda,\quad N = i\beta\lambda\sqrt{-1}.$$

A l'égard des autres coéficiens, savoir λ', μ, M, ν' & N' ils seront tous $=0$, comme nous l'avons vû dans l'Art. préc.

LXI. On fera maintenant ces différentes substitutions dans l'équation intégrale (X) de l'Art. LVIII., & l'on aura, en rejettant les termes de l'ordre de i^2

$$\Big\{\frac{dy}{dt} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\Big(\frac{du'}{dt} + \frac{dU'}{dt}\sqrt{-1}\Big)$$

$$+ hy\sqrt{-1} + (h-2H)\,\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\,(u'\sqrt{-1}-U')$$

$$+ i\Big(\alpha\frac{du'}{dt} + A\frac{dU'}{dt}\sqrt{-1} + \beta\Big(\frac{dv}{dt} + \frac{dV}{dt}\sqrt{-1}\Big)$$

$$+ \Big(m - \frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')}\Big)y\sqrt{-1}$$

$$+ \Big(\frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - 2HA\Big)u'\sqrt{-1}$$

$$+ \Big(N + 2H\alpha - \frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')} - hA\Big)U'$$

$$+ \Big(\frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')} + [h-4H]\beta\Big)(v\sqrt{-1}-V)\Big)\Big\}\, e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}$$

$$= \int \Big\{ T + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} T' (\text{cos}. Ht + \text{sin}. Ht \sqrt{-1})$$

$$+ i \big(\beta T (\text{cos}. 2Ht + \text{sin}. 2Ht \sqrt{-1})$$

$$+ T' (\alpha \,\text{cos}. Ht + A \,\text{sin}. Ht \sqrt{-1}) \big) \Big\} e^{-(h+im)t\sqrt{-1}} dt \quad (e)$$

Supposons que cette intégrale soit prise de telle manière qu'elle soit nulle lorsque $t = 0$, & qu'alors on ait $y = f$, $\frac{dy}{dt} = g$, $y' = f'$, $\frac{dy'}{dt} = g'$, & par conséquent $u' = f'$, $\frac{du'}{dt} = g'$, $U' = 0$, $\frac{dU'}{dt} = Hf'$, $v = f$, $\frac{dv}{dt} = g$, $V = 0$, & $\frac{dV}{dt} = 2Hf$ (*Art. LVIII.*); il est clair qu'il faudra ajouter au second membre de l'équation précédente, la quantité

$$g + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} (g' + Hf'\sqrt{-1}) + hf\sqrt{-1}$$
$$+ (h - 2H) \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} f' \sqrt{-1}$$
$$+ i \Big\{ \alpha g' + A Hf' \sqrt{-1} + \beta (g + 2Hf\sqrt{-1})$$
$$+ (m - \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')}) f\sqrt{-1}$$
$$+ (\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - 2HA) f'\sqrt{-1}$$
$$+ (\frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} + [h - 4H]\beta) f\sqrt{-1} \Big\}$$

c'est-à-dire, à cause de $H = h - h'$,

$$g + hf\sqrt{-1} + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} (g' + h'f'\sqrt{-1})$$
$$+ i \Big\{ \alpha g' + \beta g + (\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - HA) f'\sqrt{-1}$$
$$+ (m - [h - 2h']\beta) f\sqrt{-1} \Big\}.$$

LXII. Pour rendre le calcul plus simple nous négligerons d' abord les termes de l' ordre de i; moyennant quoi l' équation (e) deviendra (en mettant $h - h'$ au lieu de H, & $e^{(h-h')t\sqrt{-1}}$ au lieu de cos. Ht + sin. $Ht\sqrt{-1}$)

$$\Big\{\frac{dy}{dt} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\Big(\frac{du'}{dt} + [h - 2h']U'\Big)$$

$$+\Big(hy + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\Big[\frac{dU'}{dt} - (h-2h')u'\Big]\Big)\sqrt{-1}\Big\}e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}$$

$$= g + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}g' + \Big(hf + \frac{M+Nb'}{4(m-k')}f'\Big)\sqrt{-1}$$

$$+\int\Big\{Te^{-(h+im)t\sqrt{-1}} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}T'e^{-(h'+im)t\sqrt{-1}}\Big\}dt \quad (f)$$

Si on multiplie cette équation par $e^{(h+im)t\sqrt{-1}}$, qu'ensuite, après avoir réduit les exponentielles imaginaires en *sinus* & *cosinus*, on compare la partie imaginaire du premier membre à la partie imaginaire du second, & qu'on fasse pour abreger

$$\theta = \text{sin.}(h+im)t\int T\,\text{cos.}(h+im)t\,dt$$
$$- \text{cos.}(h+im)t\int T\,\text{sin.}(h+im)t\,dt,$$
$$\vartheta = \text{sin.}(h+im)t\int T'\,\text{cos.}(h'+im)t\,dt$$
$$- \text{cos.}(h+im)t\int T'\,\text{sin.}(h'+im)t\,dt,$$

on aura l' équation suivante

$$hy + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\Big[\frac{dU'}{dt} - (h-2h')u'\Big]$$
$$= \Big(hf + \frac{M+Nb'}{4(m-k')}f'\Big)\text{cos.}(h+im)t$$
$$+\Big(g + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}g'\Big)\text{sin.}(h+im)t$$
$$+\theta + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\vartheta,$$

laquelle, (en mettant successivement $m1$ & $m2$ à la place de m, & dénotant par $\theta 1$ & $\theta 2$, $\vartheta 1$ & $\vartheta 2$ les valeurs correspondantes de θ & de ϑ) en fournira deux

autres, dont la seconde étant multipliée par $\frac{m2-k'}{b(m1-m2)}$, & ensuite retranchée de la première aussi multipliée par $\frac{m1-k'}{b(m1-m2)}$, on aura

$$y = \left(\frac{m1-k'}{m1-m2}f + \frac{M+Nb'}{4b(m1-m2)}f'\right)\text{cos.}(h+im1)t$$
$$+\left(\frac{m1-k'}{b(m1-m2)}g + \frac{M+Nb'}{4bb'(m1-m2)}g'\right)\text{sin.}(h+im1)t$$
$$-\left(\frac{m2-k'}{m1-m2}f + \frac{M+Nb'}{4b(m1-m2)}f'\right)\text{cos.}(h+im2)t$$
$$-\left(\frac{m2-k'}{b(m1-m2)}g + \frac{M+Nb'}{4bb'(m1-m2)}g'\right)\text{sin.}(h+im2)t$$
$$+\frac{m1-k'}{b(m1-m2)}\theta 1 - \frac{m2-k'}{b(m1-m2)}\theta 2 + \frac{M+Nb'}{4bb'(m1-m2)}(\vartheta 1-\vartheta 2) \quad (g)$$

LXIII. Il faudroit maintenant faire un calcul semblable pour trouver la valeur de y', en employant les autres formules de l'Art. LIX.; mais sans entrer dans un nouveau détail à cet égard, il suffira de considérer que les équations proposées (T) & (U), dans lesquelles $H = h - h'$, sont telles que l'une se change en l'autre, en marquant seulement d'un trait les lettres y, K, M, N, h, T, & effaçant celui des lettres y', K', M', N', h', & T'; d'où il s'ensuit que pour avoir l'expression de y' il ne faudra que mettre dans celle de y, f', g', h', k', M', N', T', au lieu de f, g, h, k, M, N, T, & *viceversa*.

A l'égard des valeurs de m, on remarquera qu'en négligeant le terme $i\Delta$, elles seront les mêmes pour les deux cas, puisque les quantités M, N, h, k, & M', N', h', k' entrent de la même manière dans l'équation (d) de l'Art. LX.

LXIV. Ayant trouvé les premières valeurs de y & de y', si on veut avoir une plus grande précision & tenir compte aussi des quantités de l'ordre de i, on nommera

ces valeurs y & y', & on désignera de même par u', U', v, & V les valeurs correspondantes des quantités u', U', v, & V; ensuite on supposera $y = \mathrm{y} + i y^{\cdot}$, $u' = \mathrm{u}' + i u'^{\cdot}$, $U' = \mathrm{U}' + i U'^{\cdot}$, & l'on fera ces substitutions dans l'équation (e) de l'Art. LXI., en négligeant les termes de l'ordre de i^2; après quoi on effacera tous les termes qui ne seront point affectés de i, parceque ces termes se détruiront d'eux mêmes, en vertu de l'équation (f), & l'on divisera les autres par i. De cette manière on aura

$$\Big\{ \frac{dy^{\cdot}}{dt} + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} \Big(\frac{du'^{\cdot}}{dt} + [h - 2h'] U'^{\cdot} \Big)$$

$$+ \Big(h y^{\cdot} + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} \Big(\frac{dU'^{\cdot}}{dt} - [h - 2h'] u'^{\cdot} \Big)\Big) \surd -1$$

$$+ \alpha \frac{d\mathrm{u}'}{dt} + \beta \frac{d\mathrm{v}}{dt} + \Big(N + 2H\alpha - \frac{(M + Nb')m}{4b(m-k')} - h\mathrm{A} \Big) \mathrm{U}'$$

$$- \Big(\frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} + [h - 4H] \beta \Big) \mathrm{V}$$

$$+ \Big(\mathrm{A} \frac{d\mathrm{U}'}{dt} + \beta \frac{d\mathrm{V}}{dt} + \Big(m - \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} \Big) \mathrm{y}$$

$$+ \Big(\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - 2H\mathrm{A} \Big) \mathrm{u}'$$

$$+ \Big(\frac{N(M + Nb')}{8b'(m-k')} + [h - 4H] \beta \Big) \mathrm{v} \Big) \surd -1 \Big\} e^{-(k+im)t\surd -1}$$

$$= \alpha g' + \beta g + \Big(\Big(\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - H\mathrm{A} \Big) f'$$

$$+ (m - [h - 2h'] \beta) f \Big) \surd -1$$

$$+ \int \Big\{ \beta T \, (\text{cos.}\, 2Ht + \text{sin.}\, 2Ht \surd -1)$$

$$+ T' (\alpha \,\text{cos.}\, Ht + \mathrm{A} \,\text{sin.}\, Ht \surd -1) \Big\} e^{-(k+im)t\surd -1} dt.$$

On traitera cette équation comme on a fait ci-devant l'équation (f), & supposant pour abreger

φ =

$\varphi = \text{fin.}(h + im)\,t \int T \text{cof.}(2h' - h + im)\,t\,dt$
$\quad - \text{cof.}(h + im)\,t \int T \text{fin.}(2h' - h + im)\,t\,dt,$
$\chi = \text{fin.}(h + im)\,t \int T' \text{cof.}(h' + im)\,t\,dt$
$\quad - \text{cof.}(h + im)\,t \int T' \text{fin.}(h' + im)\,t\,dt,$
$\psi = \text{fin.}(h + im)\,t \int T' \text{cof.}(2h - h' + im)\,t\,dt$
$\quad - \text{cof.}(h + im)\,t \int T' \text{fin.}(2h - h' + im)\,t\,dt,$

& de plus

$$\gamma = m - \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m - k')}$$

$$\delta = \frac{(M + Nb')m}{4b'(m - k')} + h\alpha - 2HA$$

$$\epsilon = \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m - k')} + (h - 4H)\beta\,.$$

$$\zeta = \alpha g' + \beta g$$

$$\eta = \left[\frac{(M + Nb')m}{4b'(m - k')} + h\alpha - HA\right] f' + [m - (h - 2k')\beta]\, f,$$

on trouvera

$$y' = \frac{m1 - k'}{b(m1 - m2)} \Big\{ \eta 1 \text{ cof.}(h + im1)t + \zeta 1 \text{ fin.}(h + im1)t$$
$$+ A1 \frac{dU'}{dt} + \beta 1 \frac{dV'}{dt} + \gamma 1 y + \delta 1 u' + \epsilon 1 v$$
$$+ \beta 1 \varphi 1 + \frac{\alpha 1 + A1}{2} \chi 1 + \frac{\alpha 1 - A1}{2} \psi 1 \Big\}$$
$$- \frac{m2 - k'}{b(m1 - m2)} \Big\{ \eta 2 \text{ cof.}(h + im2)t + \zeta 2 \text{ fin.}(h + im2)t$$
$$+ A2 \frac{dU'}{dt} + \beta 2 \frac{dV'}{dt} + \gamma 2 y + \delta 2 u' + \epsilon 2 v$$
$$+ \beta 2 \varphi 2 + \frac{\alpha 2 + A1}{2} \chi 2 + \frac{\alpha 2 - A1}{2} \psi 2 \Big\};$$

$\eta 1$, $\eta 2$, $\zeta 1$, $\zeta 2$ &c. étant les valeurs de η, ζ &c. qui répondent à $m1$ & $m2$.

Si on vouloit encore pouſſer la préciſion plus loin il faudroit alors reprendre les calculs de l' Art. LVIII., & y

avoir égard aux quantités de l'ordre de i^3 que nous y avons négligées.

LXV. Soit $T = AP$, A étant une quantité constante, & P une fonction de P telle que $\frac{d^2P}{dt} + a^2P = 0$; on aura donc $\int T \operatorname{cos.} (h + im)\, t\, dt = A \int P \operatorname{cos.} (h + im)\, t\, dt$, & $\int P \operatorname{cos.} (h + im)\, t\, dt = -\frac{1}{a^2} \int \frac{d^2P}{dt^2} \operatorname{cos.} (h + im)\, t\, dt$ $=$ (en intégrant par parties) $- \frac{dP}{a^2 dt} \operatorname{cos.} (h + im)\, t$ $- \frac{h + im}{a^2} P \operatorname{sin.} (h + im)\, t + \frac{(h + im)^2}{a^2} \int P \operatorname{cos.} (h + im)\, t\, dt$; donc supposant que l'intégrale $\int P \operatorname{cos.} (h + im)\, t\, dt$ soit prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $t = 0$, & qu'alors on ait $\frac{dP}{dt} = \alpha$, on aura

$$\int P \operatorname{cos.} (h + im)\, t\, dt = \left[(h + im) P \operatorname{sin.} (h + im)\, t + \frac{dP}{dt} \operatorname{cos.} (k + im)\, t - \alpha \right] \frac{1}{(h + im)^2 - a^2}.$$

On trouvera de même, en prenant β pour ce que devient P lorsque $t = 0$

$$\int P \operatorname{sin.} (h + im)\, t\, dt = \left[-(h + im) P \operatorname{cos.} (h + im)\, t + \frac{dP}{dt} \operatorname{sin.} (h + im)\, t + (h + im)\beta \right] \frac{1}{(h + im)^2 - a^2}.$$

De sorte qu'on aura (*Art. LXII.*)

$$\theta = \frac{A}{(h + im)^2 - a^2} \left[(h + im) P - \alpha \operatorname{sin.} (h + im)\, t - \beta (h + im) \operatorname{cos.} (h + im)\, t \right].$$

Pareillement si on a $T' = A'P'$, & $\frac{d^2P'}{dt^2} + a'^2 P' = 0$, & que α', β' soient les valeurs de $\frac{dP'}{dt}$ & de P' quand $t = 0$, on trouvera

$\vartheta = \frac{A'}{(b'+im)-a'^2}\,[\,(h'+im)\,P\,\text{cof.}\,(h-h')\,t + \frac{dP}{dt}$
$\text{fin.}\,(h-h')\,t - \alpha'\,\text{fin.}\,(h'+im)\,t - \beta'\,(h'+im)$
$\text{cof.}\,(h'+im)\,t\,]$.

Donc ſi on a

$T = AP + BQ + CR + \&c.$ &

$\frac{d^2P}{dt^2} + a^2P = 0,\ \frac{d^2Q}{dt^2} + b^2Q = 0,\ \frac{d^2R}{dt^2} + c^2R = 0$ &c.

& de même

$T' = A'P' + B'Q' + C'R' + \&c.$, &

$\frac{d^2P'}{dt^2} + a'^2P' = 0,\ \frac{d^2Q'}{dt^2} + b'^2Q' = 0,\ \frac{d^2R'}{dt^2} + c'^2R' = 0$;

& qu'on faſſe

$\Theta = \frac{A}{b^2-a^2}P + \frac{B}{b^2-b^2}Q + \frac{C}{b^2-c^2}R + \&c.$

$\Theta' = \frac{A'}{b'^2-a'^2}P' + \frac{B'}{b'^2-b'^2}Q' + \frac{C'}{b'^2-c'^2}R' + \&c.$

& de plus

$F = f - \Lambda,\ G = g - \Gamma,\ F' = f' - \Lambda',\ G' = g' - \Gamma'$,

(Λ, Γ, Λ', & Γ' étant les valeurs de Θ, $\frac{d\Theta}{dt}$, Θ' & $\frac{d\Theta'}{dt}$, lorſque $t = 0$) la formule (g) de l' Art. LXII. donnera, en négligeant les termes de l' ordre de i,

$$y = \left\{\frac{m1-k'}{m1-m2}F + \frac{M+Nb'}{4b'(m1-m2)}F'\right\}\text{cof.}\,(h+im1)\,t$$
$$+ \left\{\frac{m1-k'}{b(m1-m2)}G + \frac{M+Nb'}{4bb'(m1-m2)}G'\right\}\text{fin.}\,(h+im1)\,t$$
$$- \left\{\frac{m2-k'}{m1-m2}F + \frac{M+Nb'}{4b'(m1-m2)}F'\right\}\text{cof.}\,(h+im2)\,t$$
$$- \left\{\frac{m2-k'}{b(m1-m2)}G + \frac{M+Nb'}{4bb'(m1-m2)}G'\right\}\text{fin.}\,(h+im2)\,t$$
$$+ \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

Par là on aura la valeur de y lorſque les fonctions T, & T' ſeront exprimées par des ſuites quelconques de différens *ſinus* & *coſinus* d' angles multiples de t.

Il faut obſerver que ſi a étoit égal ou preſque égal à h, il ne ſeroit pas permis de négliger les termes affectés de i dans l' expreſſion de θ; & l' on trouveroit alors dans la valeur de y des termes dont les coéficiens ſeroient très-grands; il en faudra dire autant du cas où a' ne ſeroit que très-peu différent de h'; nous en laiſſons le détail au Lecteur.

Mais ſi a étoit exactement égal à $h + im$ le dénominateur $a^2 - (h + im)^2$ de l'expreſſion de θ deviendroit $= 0$, & comme cette quantité n'eſt point infinie, le numérateur correſpondant ſeroit auſſi égal à zéro dans ce cas là; faiſant donc $h + im = a + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouiſſante on trouveroit

$$\theta = -\frac{A}{2a}\left[\alpha t \operatorname{coſ.} at + \beta\,(\operatorname{coſ.} at - at \operatorname{ſin.} at) - P - a\frac{dP}{da}\right];$$ de ſorte que la formule (h) contiendroit des termes multipliés par l' angle t. Il en ſeroit de même ſi $a' = h' + im$. Au reſte ces deux cas ſont ſuſceptibles de remarques analogues à celle que nous avons faite à la fin de l' Art. LII.

LXVI. Comme les quantités $m1$ & $m2$ ſont les racines d'une équation du ſecond dégré (*Art. LX.*) il peut arriver qu'elles ſoient égales ou imaginaires; ainſi il ne ſera pas inutile de nous arrêter ici à diſcuter ces deux cas.

1.° Si $m2 = m1$, je fais $m2 = m1 + \omega$ (ω étant une quantité évanouiſſante) ce qui me donne $\frac{m1 - k'}{m1 - m2} = -\frac{m1 - k'}{\omega}$, $\frac{m2 - k'}{m1 - m2} = -\frac{m1 - k'}{\omega} - 1$, $\frac{M + Nk'}{m1 - m2} =$

$= \frac{M+Nb'}{\omega}$, cos. $(h + im2)t =$ cos. $(h + im1)t - it\omega$ sin. $(h + im1)t$, & sin. $(h + im2)t =$ sin. $(h + im1)t + it\omega$ cos. $(h + im1)t$; donc faisant ces substitutions dans la formule (h) on aura, après avoir effacé ce qui se détruit,

$$y = F \cos.(h + im1)t + \frac{G}{b} \sin.(h + im1)t$$
$$+ i[(m1 - k')F + \frac{M+Nb'}{4b}F']t \sin.(h + im1)t$$
$$- i[\frac{m1-k'}{b}G + \frac{M+Nb'}{4bb'}G']t \cos.(h + im1)t$$
$$+ \Theta.$$

Mais il faut bien remarquer que pour que cette équation ait lieu il faut que les valeurs de m soient égales rigoureusement, & sans rien négliger (*Voyés l'Artic. cité ci-dessus*).

2.° Si $m1$ & $m2$ sont imaginaires, ensorte que $m1 = \mu + \nu\sqrt{-1}$, & $m2 = \mu - \nu\sqrt{-1}$, on aura $\frac{m1-k'}{m1-m2} = \frac{\mu-k'}{2\nu\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}$, $\frac{m2-k'}{m1-m2} = \frac{\mu-k'}{2\nu\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}$, $\frac{M+Nb'}{m1-m2} = \frac{M+Nb'}{2\nu\sqrt{-1}}$; ensuite on trouvera

$$\cos.(h + im1)t = \cos.(h + i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$
$$+ \sin.(h + i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\sin.(h + i\mu 1)t = \sin.(h + i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$
$$- \cos.(h + i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$ & de même

$$\text{cos.}\,(h + i m 2)\,t = \text{cos.}\,(h + i\mu)\,t \times \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$$
$$- \text{sin.}\,(h + i\mu)\,t \times \frac{e^{int} - e^{-int}}{2\sqrt{-1}},$$
$$\text{sin.}\,(h + i m 2)\,t = \text{sin.}\,(h + i\mu)\,t \times \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$$
$$+ \text{cos.}\,(h + i\mu)\,t \times \frac{e^{int} - e^{-int}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces ſubſtitutions faites, on verra que les imaginaires ſe détruiront dans la formule (h), & qu'elle deviendra

$$y = \left\{ F\,\text{cof.}\,(h + i\mu)\,t + \frac{G}{b}\,\text{ſin.}\,(h + i\mu)\,t \right\} \times \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$$
$$- \left\{ \left(\frac{\mu - k'}{r} F + \frac{M + Nk'}{4kr} F'\right) \text{ſin.}\,(h + i\mu)\,t - \left(\frac{\mu - k'}{kr} G \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{M + Nk'}{4kk'r} G'\right) \text{cof.}\,(h + i\mu)\,t \right\} \times \frac{e^{int} - e^{-int}}{2} + \Theta.$$

Ainſi dans le cas où l'équation (d) a ſes deux racines imaginaires, la valeur de y contient néceſſairement des exponentielles toutes réelles, & qui croiſſent à l'infini à meſure que t croit.

Application de la ſolution précédente à la Théorie de Jupiter & de Saturne.

LXVII. Soit I la maſſe du Soleil, J celle de Jupiter, r le rayon vecteur de l'orbite de cette planète projettée ſur le plan de l'écliptique (plan que nous regarderons comme abſolument fixe & immobile), φ l'angle décrit par le rayon r, pendant le tems t, & q la tangente de la latitude héliocentrique de Jupiter.

Soit de même J' la maſſe de Saturne, r' le rayon vecteur de ſon orbite réduit au plan de l'écliptique, φ' l'an-

gle décrit par ce rayon durant le même tems t, & q' la tangente de la latitude héliocentrique de Saturne.

Enfin ſoit la perpendiculaire menée du centre de Jupiter ſur le plan de l'écliptique p, la perpendiculaire menée du centre de Saturne ſur le même plan p', la diſtance de Jupiter au Soleil, c'eſt-à-dire le rayon mené du Soleil à Jupiter u, la diſtance de Saturne au Soleil u', & la diſtance de Jupiter à Saturne v, enſorte que $p = rq$, $p' = r'q'$, $u = \sqrt{(r^2 + p^2)} = r\sqrt{(1 + q^2)}$, $u' = r'\sqrt{(1 + q'^2)}$, & $v = \sqrt{([r \,\text{ſin.}(\varphi - \varphi')]^2 + [r' - r \,\text{coſ.}(\varphi - \varphi')]^2 + (p - p')^2)} = \sqrt{(r^2(1 + q^2) - 2rr'[\text{coſ.}(\varphi - \varphi') + qq'] + r'^2(1 + q'^2))}$, & ſuppoſant

$$R = J'\left(\frac{r - r'\,\text{coſ.}(\varphi - \varphi')}{v^3} + \frac{r'\,\text{coſ.}(\varphi - \varphi')}{u'^3}\right),$$

$$Q = J'\left(\frac{r'}{v^3} - \frac{r'}{u'^3}\right) r \,\text{ſin.}(\varphi - \varphi'),$$

$$P = J'\left(\frac{p - p'}{v^3} + \frac{p'}{u'^3}\right),$$

$$R' = J\left(\frac{r' - r\,\text{coſ.}(\varphi' - \varphi)}{v^3} + \frac{r\,\text{coſ.}(\varphi' - \varphi)}{u^3}\right),$$

$$Q' = J\left(\frac{r}{v^3} - \frac{r}{u^3}\right) r' \,\text{ſin.}(\varphi' - \varphi),$$

$$P' = J\left(\frac{p' - p}{v^3} + \frac{p}{u^3}\right),$$

on aura les ſix équations ſuivantes (Voy. *Artt.* *XIV.* & *XVI.* du Mém. intit. *Application de la méthode précedente &c.*, imprimé dans le Vol. préc.)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\,d\varphi^2}{dt^2} + (I + J')\frac{r}{u^3} + R = 0$$

$$\frac{d\cdot(r^2 d\varphi)}{dt^2} + Q = 0$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + (I + J)\frac{p}{u^3} + P = 0$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - \frac{r' d\varphi'^2}{dt^2} + (I + J')\frac{r'}{u'^3} + R' = 0$$

$$\frac{d\cdot(r'^2 d\varphi')}{dt^2} + Q' = 0$$

$$\frac{d^2 p'}{dt^2} + (I + J')\frac{p'}{u'^3} + P' = 0,$$

dont les trois premières repréſentent le mouvement de Jupiter dérangé par Saturne, & les trois autres celui de Saturne dérangé par Jupiter.

D'où l'on voit, que quand on aura calculé les dérangemens de Jupiter, les mêmes formules ſerviront à calculer ceux de Saturne, puiſqu'il n'y aura qu'à changer r', φ', p', u', & J' en r, φ, p, u, & J, & *viceverſa*.

LXVIII. Puiſque $p = rq$, l'équation $\frac{d^2 p}{dt^2} + (I + J)\frac{p}{u^3} + P = 0$, deviendra (en diviſant par r) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{2dqdr}{rdt^2} + q\frac{d^2 r}{rdt^2} + (I + J)\frac{q}{u^3} + \frac{P}{r} = 0$, & mettant au lieu de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ ſa valeur tirée de la première équation, on aura après avoir effacé ce qui ſe détruit,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + q\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2dqdr}{rdt^2} + \frac{P - Rq}{r} = 0.$$

Enſuite l'équation $\frac{d\cdot(r^2 d\varphi)}{dt^2} + Q = 0$ donnera $\frac{r^2 d\varphi}{dt} = c - \int Q\,dt$, c étant une conſtante arbitraire; d'où l'on tire $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c - \int Q\,dt}{r^2}$.

Donc

Donc les équations du mouvement de Jupiter seront à cause de $u = r\sqrt{(1+q^2)}$,

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{(c-\int Q\,dt)^2}{r^3} + \frac{I+J}{r^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} + R = 0 \\
\frac{d^2q}{dt^2} + q\,\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{r^4} + \frac{2\,dq\,dr}{r\,dt^2} + \frac{P-Rq}{r} = 0 \\
\frac{d\varphi}{dt} - \frac{c-\int Q\,dt}{r^2} = 0.
\end{array}\right\} \quad (i)$$

LXIX. Les équations (i) donneront r, q, & φ en t; d'où l'on connoitra le lieu de la planete à chaque instant. Si on vouloit de plus avoir l'orbite qu'elle décrit, on n'auroit qu'à éliminer le tems t au moyen de l'équation $\frac{d.(r^2 d\varphi)}{dt^2} + Q = 0$, laquelle étant multipliée par $2\,r^2 d\varphi$, & ensuite intégrée donne $\left(\frac{r^2 d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\int Q\,r^2 d\varphi = C$, ($C$ étant une constante arbitraire); d'où l'on tire

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{\sqrt{(C - 2\int Q\,r^2 d\varphi)}}.$$

Et cette valeur étant substituée dans les deux premières des équations (i), on aura, en prenant $d\varphi$ constant au lieu de dt, & faisant $\frac{1}{r} = s$, $Rr^2 + Q\,\frac{dr}{d\varphi} = U$, & $r^3\left(P - Rq + Q\,\frac{dq}{r\,d\varphi}\right) = V$, les équations suivantes

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s - \frac{(I+J)(1+q^2)^{-\frac{3}{2}} + U}{C - 2\int Q\,r^2 d\varphi} = 0$$

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} + q + \frac{V}{C - 2\int Q\,r^2 d\varphi} = 0.$$

LXX. Supposons que les forces perturbatrices R, Q, P soient nulles, ensorte que l'orbite soit décrite en vertu

de la seule force $\frac{I+J}{u^2}$ tendante au centre du Soleil, & les équations que nous venons de trouver deviendront

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s - \frac{I+J}{C(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \ \& \ \frac{d^2q}{d\varphi^2} + q = 0,$$

lesquelles étant intégrées donneront

$$q = \varepsilon \text{ sin. } (\varphi - \alpha), \ \& \ s = \frac{I+J}{D} \sqrt{(1+q^2)} + \eta \text{ cos. } (\varphi - \omega)$$

ε, α, η, & ω étant des constantes arbitraires, & $D = C(1 + \varepsilon^2)$.

La première de ces deux formules nous montre que l'orbite est toute dans un plan fixe passant par le centre des rayons r, & coupant ce plan de manière que ε soit la tangente de l'inclinaison, & α le lieu du nœud ascendant.

La seconde fait voir que l'orbite est une ellipse dont le foyer est dans le centre même des rayons vecteurs r; & pour en déterminer l'espace & la position on considérera, que si on nomme Φ, & A les angles dont φ, & α sont les projections, on aura (Φ — A étant l'argument de latitude, & $\varphi - \alpha$ sa projection) $\frac{\text{cos. } (\varphi - \alpha)}{\text{cos. } (\Phi - A)} = \sqrt{(1 + q^2)}$, & $\frac{\text{sin. } (\varphi - \alpha)}{\text{sin. } (\Phi - A)} = \frac{\sqrt{(1+q^2)}}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}}$; & par conséquent cos. $(\varphi - \alpha) = \sqrt{(1 + q^2)} \times \text{cos. } (\Phi - A)$ & sin. $(\varphi - \alpha) = \frac{\sqrt{(1+q^2)}}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}} \times \text{sin. } (\Phi - A)$; donc cos. $(\varphi - \omega) = \text{cos. } (\varphi - \alpha + \alpha - \omega) = \text{cos. } (\varphi - \alpha) \times \text{cos. } (\alpha - \omega) - \text{sin. } (\varphi - \alpha) \times \text{sin. } (\alpha - \omega) = [\text{cos. } (\alpha - \omega) \times \text{cos. } (\Phi - A) - \frac{\text{sin. } (\alpha - \omega)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}} \text{sin. } (\Phi - A)] \sqrt{(1 + q^2)}$; & faisant, pour plus de simplicité, cos. $(\alpha - \omega) = E \text{ cos. } (A - B)$ & $\frac{\text{sin. } (\alpha - \omega)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}} = E$ sin.

$(A - B)$, ce qui donne $E = \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon^2 \operatorname{cof.} (\alpha - \omega)^2]}{1 + \varepsilon^2}\right)}$, & tang. $(A - B) = \frac{\operatorname{tang.} (\alpha - \omega)}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2)}}$, on aura cof. $(\varphi - \omega) = E \operatorname{cof.} (\Phi - B) \times \sqrt{(1 + q^2)}$; donc $\frac{s}{\sqrt{(1 + q^2)}} = \frac{I + J}{D} + \eta E \operatorname{cof.} (\Phi - B)$.

Or $s = \frac{1}{r}$, & $r \sqrt{(1 + q^2)} = u$ rayon vecteur de l' orbite réelle ; donc l' équation de cette orbite sera

$$u = \frac{1}{\frac{I + J}{D} + \eta E \operatorname{cof.} (\Phi - B)},$$

laquelle est visiblement celle d'une ellipse dont $\frac{I + J}{D}$ est le paramètre & ηE l' excentricité. A l' égard de la position du grand axe de cette ellipse, il est clair que $\Phi = B$ donnera le lieu du périhélie, & pour avoir l' angle correspondant φ, que nous nommerons β, on observera que tang. $(\varphi - \alpha) = \frac{\operatorname{tang.} (\Phi - A)}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2)}}$; de sorte qu'on aura tang. $(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tang.} (B - A)}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2)}} = \frac{\operatorname{tang.} (\omega - \alpha)}{1 + \varepsilon^2}$.

LXXI. Imaginons maintenant que l'effet des forces perturbatrices consiste à faire varier les quantités ε, α, η, & ω ; ensorte que l' orbite soit représentée par une ellipse qui change continuellement d' espace & de position ; nous aurons donc

1.° $q = \varepsilon$ sin. $(\varphi - \alpha)$, & $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon$ cof. $(\varphi - \alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}$ sin. $(\varphi - \alpha) - \frac{d\alpha}{d\varphi}\, \varepsilon$ cof. $(\varphi - \alpha)$; or puisque on a deux indéterminées ε & α, dont l'une peut être tout ce qu'on

voudra, nous supposerons sin. $(\varphi - \alpha)\, d\varepsilon = \varepsilon \cos. (\varphi - \alpha)\, d\alpha$; ce qui donnera $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon \cos. (\varphi - \alpha)$, de sorte que la variation instantanée de la latitude sera la même que si le plan de l'orbite ne changoit point de position. Donc $\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = - \varepsilon \sin. (\varphi - \alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi} \cos. (\varphi - \alpha) + \frac{d\alpha}{d\varphi} \varepsilon \sin. (\varphi - \alpha) =$ (en mettant, pour $d\varepsilon$, $\frac{\varepsilon \cos. (\varphi - \alpha)\, d\alpha}{\sin. (\varphi - \alpha)}$) $- \varepsilon \sin. (\varphi - \alpha) + \frac{\varepsilon\, d\alpha}{\sin. (\varphi - \alpha)\, d\varphi}$. Donc on aura au lieu de l'équation

$$\frac{d^2 q}{d\varphi^2} + q + \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi} = 0,$$

ces deux-ci

$$\frac{\varepsilon\, d\alpha}{\sin. (\varphi - \alpha)\, d\varphi} + \frac{V}{\frac{D}{1 + \varepsilon^2} - 2\int Q r^2 d\varphi} = 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{d\alpha}{\text{tang.} (\varphi - \alpha)} = 0,$$

par lesquelles on connoitra le mouvement de la ligne des nœuds, & la variation de l'inclinaison de l'orbite.

2.° On aura $s = \frac{I + J}{D} \sqrt{(1 + q^2)} + \eta \cos. (\varphi - \omega)$; d'où l'on tire $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I + J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi \sqrt{(1 + q^2)}} - \eta \sin. (\varphi - \omega) + \frac{d\eta}{d\varphi} \cos. (\varphi - \omega) + \frac{d\omega}{d\varphi} \eta \sin. (\varphi - \omega)$. Supposons ici à l'imitation de ce que nous venons de faire plus haut, $\cos. (\varphi - \omega)\, d\eta = - \eta \sin. (\varphi - \omega)\, d\omega$, de manière que l'on ait simplement $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I + J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi \sqrt{(1 + q^2)}} - \eta \sin. (\varphi - \omega)$, c'est-à-dire que la variation instan-

tanée du rayon $r = \frac{1}{s}$; soit la même que si l'ellipse demeuroit constante, & différentiant cette valeur de $\frac{ds}{d\varphi}$, on trouvera $\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = \frac{I+J}{D}\left(\frac{dq^2 + q\,d^2 q}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q^2 dq^2}{d\varphi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$
$- \eta \,\text{cos.}\,(\varphi - \omega) - \frac{d\eta}{d\varphi}\,\text{sin.}\,(\varphi - \omega) + \frac{d\omega}{d\varphi}\,\eta\,\text{cos.}\,(\varphi - \omega)$;
or $\frac{dq^2}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q^2 dq^2}{d\varphi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dq^2}{d\varphi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} =$ (à cause de $\frac{dq^2}{d\varphi^2} + q^2 = \varepsilon^2$) $\frac{\varepsilon^2 - q^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}}$; de plus $\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = -q - \frac{V}{C - 2\int Q r^3 d\varphi}$, donc
$\frac{q\,d^2 q}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} = -\frac{q^2}{\sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^3 d\varphi}$
$= -\sqrt{(1+q^2)} + \frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^3 d\varphi}$;
donc on aura (à cause de $d\eta = -\frac{\eta\,\text{sin.}\,(\varphi - \omega)}{\text{cos.}\,(\varphi - \omega)}\,d\omega$) $\frac{d^2 s}{d\varphi^2}$
$= \frac{I+J}{D}\left(\frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{(1+q^2)} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^3 d\varphi}\right)$
$- \eta\,\text{cos.}\,(\varphi - \omega) + \frac{\eta\,d\omega}{d\varphi\,\text{cos.}\,(\varphi - \omega)}$. De sorte que l'équation

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s - \frac{(I+J)(1+q^2)^{\frac{3}{2}} + V}{C - 2\int Q r^3 d\varphi} = 0$$

se changera en ces deux-ci

$$\frac{\eta\, d\omega}{\text{cof.}(\varphi - \omega)\, d\varphi} - \frac{U + \frac{I+J}{D}\left(2\frac{1+e}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}\int Q r^3 d\varphi + \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}}K\right)}{\frac{D}{1+e^2} - 2\int Q r^3 d\varphi} = 0$$

$$\frac{d\eta}{\eta} + \text{tang.}\,(\varphi - \omega)\, d\varphi = 0,$$

lesquelles serviront à trouver. η, & ω.

Au reste dès qu'on aura trouvé r, & q en φ, ou bien r, q, & φ en t, on pourra, si l'on veut, trouver tout de suite les valeurs de α, ε, ω, & η; car les équations $q = \varepsilon$ sin. $(\varphi - \alpha)$ & $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon$ cof. $(\varphi - \alpha)$ donneront $\varepsilon = \sqrt{[q^2 + (\frac{dq}{d\varphi})^2]}$, & tang. $(\varphi - \alpha) = \frac{q\, d\varphi}{dq}$.

Et de même les équations $s = \frac{I+J}{D}\sqrt{(1 + q^2)} + \eta$ cof. $(\varphi - \omega)$, & $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi \sqrt{(1+q^2)}} - \eta$ sin. $(\varphi - \omega)$, donneront, en faisant pour abreger $S - \frac{I+J}{D}\sqrt{(1+q^2)} = u$,

$$\eta = \sqrt{[u^2 + (\frac{du}{d\varphi})^2]}, \text{ \& tang.}\,(\varphi - \omega) = -\frac{du}{u\, d\varphi}.$$

LXXII. Les observations nous apprenent que le mouvement de Jupiter autour du Soleil est à peu près circulaire & uniforme, & que le plan de son orbite ne fait qu'un très-petit angle avec celui de l'écliptique; d'où il s'ensuit que si on nomme a la distance moyenne de Jupiter au Soleil, & h sa vitesse angulaire moyenne, on pourra supposer

$$r = a(1 + iy), \varphi = ht + ix, q = iz,$$

y, x, z étant des quantités variables, & i un coéficient

très-petit; où il faut remarquer que les valeurs de y & de $\frac{dx}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme tout constant; autrement a & h ne seroient plus les valeurs moyennes de r & de $\frac{d\varphi}{dt}$ contre l'hypothèse.

Cela posé, si on fait ces substitutions dans les équations (i) de l'Art. LXVIII., & qu'on divise la première par a, on aura, en poussant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre de i^3,

$$i\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4}(1 - 3iy + 6i^2y^2 - 10i^3y^3)$$
$$+ \frac{I+J}{a^3}(1 - 2iy + 3i^2y^2 - \frac{3}{2}i^2z^2 - 4i^3y^3 + 3i^3yz^2)$$
$$+ \frac{R}{a} = 0,$$

$$i\frac{a^2 z}{dt} + i\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4}z(1 - 4iy + 10i^2y^2) +$$
$$2i^2\left(\frac{dz\,dy}{dt^2} - iy\frac{dz\,dy}{dt^2}\right) + \frac{P-Rq}{r} = 0,$$

$$h + i\frac{dk}{dt} - \frac{c-\int Q\,dt}{a^2}(1 - 2iy + 3i^2y^2 - 4i^3y^3)$$
$$= 0.$$

On voit d'abord par ces équations que les quantités $-\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4} + \frac{I+J}{a^3} + \frac{R}{a}$, $\frac{P-Rq}{r}$, & $h - \frac{c-\int Q\,dt}{a^2}$ doivent être chacune très-petites de l'ordre de i, pour que les hypothéses que nous avons faites puissent subsister.

Supposons donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{c-\int Q\,dt}{a^2} &= h + iX \\ \frac{I+J}{a^3} + \frac{R}{a} &= h^2 + iY \\ \frac{P-Rq}{r} &= iZ, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (k)$$

& les équations précédentes étant divisées par i deviendront, en faisant $b = \frac{I+J}{a^3}$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (3h^2 - 2b)y + Y - 2hX$$
$$- i(6h^2 - 3b)y^2 - \frac{3}{2}ibz^2 + 6ihyX - iX^2$$
$$+ i^2(10h^2 - 4b)y^3 + 3i^2byz^2 - 12i^2hy^2X + 3i^2yX^2 = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + h^2z + Z$$
$$- 4ih^2zy + 2i\frac{dzdy}{dt^2} + 2ihzX$$
$$+ 10i^2h^2zy^2 - 2i^2\frac{dzdy}{dt^2}y - 8i^2hzyX + i^2zX^2 = 0,$$
$$\frac{dx}{dt} + 2hy - X$$
$$- 3ihy^2 + 2iyX$$
$$+ 4i^2hy^3 - 3i^2y^2X = 0.$$

Si l' on nomme de même a' la distance moyenne de Saturne au Soleil, h' sa vitesse angulaire moyenne, & qu'on suppose

$$r' = a'(1 + iy'),\ \varphi' = h't + ix',\ q' = iz',$$

on aura les mêmes équations que ci-devant, en marquant seulement les lettres d' un trait.

LXXIII. Il faut maintenant faire les mêmes substitutions dans les valeurs de P, Q, R, & premiérement dans celle de $\frac{1}{\varrho^3}$ qui entre dans la valeur de ces quantités, mais pour rendre le calcul plus simple nous n' aurons égard dans cette opération qu'aux termes de l' ordre de i; une plus grande précision étant d' ailleurs inutile dans la présente Recherche.

Mettons d' abord $a(1 + iy)$ à la place de r, & $a'(1 + iy')$ à la place de r', & nous aurons, en négli-

négligeant les termes q^2, qq', & q'^2 qui feroient du fecond ordre, & faifant pour plus de fimplicité $\varphi - \varphi' = \theta$, $v = \sqrt{[a^2(1 + 2iy) - 2aa'(1 + iy + iy')\,\text{cof.}\,\theta + a'^2(1 + 2iy')]}$, favoir

$v = \sqrt{[a^2 - 2aa'\,\text{cof.}\,\theta + a'^2 + 2i(a^2y + a'^2y')} \\ \overline{- 2iaa'(y + y')\,\text{cof.}\,\theta]}$,

d'où l'on tire par les féries

$$\frac{1}{v^3} = [a^2 - 2aa'\,\text{cof.}\,\theta + a'^2]^{-\frac{3}{2}}$$
$$- 3i[a^2y + a'^2y' - aa'(y + y')\,\text{cof.}\,\theta] \times [a^2 - 2aa'\,\text{cof.}\,\theta + a'^2]^{-\frac{5}{2}}.$$

Or les quantités $[a^2 - 2aa'\,\text{cof.}\,\theta + a'^2]^{-\frac{3}{2}}$ & $[a^2 - 2aa'\,\text{cof.}\,\theta + a'^2]^{-\frac{5}{2}}$ étant irrationnelles, il eft néceffaire de les réduire à une forme rationelle, fans quoi l'intégration des équations propofées ne réuffiroit point.

Pour cela je remarque qu'en faifant $a' = \alpha a$, la queftion fe réduit à changer en une fonction rationelle une quantité de cette forme $(1 - 2\alpha\,\text{cof.}\,\theta + \alpha^2)^{-s}$, dans laquelle α eft une fraction moindre que l'unité. Or puifque $1 - 2\alpha\,\text{cof.}\,\theta + \alpha^2 = [1 - \alpha(\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,\theta\sqrt{-1})] \times [1 - \alpha(\text{cof.}\,\theta - \text{fin.}\,\theta\sqrt{-1})]$, on élevera la quantité $1 - \alpha(\text{cof.}\,\theta \pm \text{fin.}\,\theta\sqrt{-1})$ à la puiffance $-s$; ce qui donnera, à caufe de $(\text{cof.}\,\theta \pm \text{fin.}\,\theta\sqrt{-1})^m = \text{cof.}\,m\theta \pm \text{fin.}\,m\theta\sqrt{-1}$,

$$[1 - \alpha(\text{cof.}\,\theta \pm \text{fin.}\,\theta\sqrt{-1})]^{-s} = 1 + s\alpha(\text{cof.}\,\theta \pm \text{fin.}\,\theta\sqrt{-1}) + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2(\text{cof.}\,2\theta \pm \text{fin.}\,2\theta\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3(\text{cof.}\,3\theta \pm \text{fin.}\,3\theta\sqrt{-1}) + \&c.$$

De forte que fi l'on fait

$$P = 1 + s\alpha \text{ cof. } \theta + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 \text{ cof. } 2\theta + \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3 \text{ cof. } 3\theta + \&c.$$

$$Q = s\alpha \text{ fin. } \theta + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 \text{ fin. } 2\theta + \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3 \text{ fin. } 3\theta + \&c.$$

on aura

$[1 - \alpha(\text{cof. } \theta + \text{fin. } \theta\sqrt{-1})]^{-s} = P + Q\sqrt{-1}$, &

$[1 - \alpha(\text{cof. } \theta - \text{fin. } \theta\sqrt{-1})]^{-s} = P - Q\sqrt{-1}$.

Donc $(1 - 2\alpha \text{ cof. } \theta + \alpha^2)^{-s} = P^2 + Q^2$.

Or fi on fait les quarrés des deux féries P & Q, & qu'on ajoute enfemble les termes qui auront le même coéficient, en faifant attention que cof. $m\theta \times$ cof. $n\theta +$ fin. $m\theta \times$ fin. $n\theta =$ cof. $(m - n)\theta$, on trouvera $(1 - 2\alpha \text{ cof. } \theta + \alpha^2)^{-s} = \text{A} + \text{B cof. } \theta + \text{C cof. } 2\theta + \text{D cof. } 3\theta + \&c.$
les coéficiens A, B, C &c. étant exprimés de la manière fuivante

$$\text{A} = 1 + s^2\alpha^2 + \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^2\alpha^4 + \left(\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\right)^2\alpha^6 + \&c.$$

$$\frac{\text{B}}{2} = s\alpha + s \times \frac{s(s+1)}{2}\alpha^3 + \frac{s(s+1)}{2} \times \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^5 + \&c.$$

$$\frac{\text{C}}{2} = \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 + s \times \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^4 + \frac{s(s+1)}{2} \times \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{2.3.4}\alpha^6 + \&c.,$$

& ainfi de fuite.

Au refte quand on aura déterminé par ces féries les deux premiers coéficiens A & B, on trouvera tous les fuivans d' une manière très-fimple & très-facile; car fi on prend les différentielles logarithmiques de l' équation

$(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-s} = A + B \cos\theta + C \cos 2\theta + \&c.$ & qu'après avoir multiplié les deux membres en croix, on compare terme à terme, on aura, comme M. Euler l'a trouvé le premier dans ses *Recherches sur le mouvement de Saturne*,

$$C = \frac{(1+\alpha^2)B - 2s\alpha A}{(2-s)\alpha}$$

$$D = \frac{2(1+\alpha^2)C - (1+s)\alpha B}{(3-s)\alpha}$$

$$E = \frac{3(1+\alpha^2)D - (2+s)\alpha C}{(4-s)\alpha}$$

&c.

Connoissant ainsi tous les coéficiens de la série qui représente $(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-s}$, on trouvera tout de suite ceux de la série qui exprime $(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-s-1}$; car dénotant ces derniers par P, Q, R &c. il faudra que la série $P + Q \cos\theta + R \cos 2\theta + \&c.$ étant multipliée par $1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2$ devienne égale à la série $A + B \cos\theta + C \cos 2\theta + \&c.$ La multiplication faite, on trouvera, en comparant les deux premiers termes, $A = (1+\alpha^2)P - \alpha Q$, & $B = (1+\alpha^2)Q - 2\alpha P - \alpha R$. Or R est donné en P & Q de la même manière que C est donné en A & B, de sorte qu'on aura, en mettant $s+1$ à la place de s,

$$R = \frac{(1+\alpha^2)Q - 2(s+1)\alpha P}{(1-s)\alpha}.$$

Donc substituant cette valeur de R on aura deux équations en A, B, P, & Q, d'où l'on tirera

$$P = \frac{(1+\alpha^2)A + \frac{s-1}{s}\alpha B}{(1-\alpha^2)^2}$$

$$Q = \frac{\frac{s-1}{s}(1+\alpha^2)B + 4\alpha A}{(1-\alpha^2)^2},$$

Enſuite on aura

$$S = \frac{2(1+\alpha^2)R - (2+s)\alpha Q}{(2-s)\alpha}$$

$$T = \frac{3(1+\alpha^2)S - (3+s)\alpha R}{(3-s)\alpha}$$

&c.

Tout ſe réduit donc à trouver les valeurs de A & de B, lorſque $s = \frac{3}{2}$; or les ſéries ci-deſſus donnent pour ce cas

$$A = 1 + \frac{9}{4}\alpha^2 + \frac{9.25}{4.16}\alpha^4 + \frac{9.25.49}{4.16.36}\alpha^6 + \&c.$$

$$\frac{B}{2} = \frac{3}{2}\alpha + \frac{9.5}{4.4}\alpha^3 + \frac{9.25.7}{4.16.6}\alpha^5 + \&c.$$

leſquelles, à cauſe de $\alpha = \frac{5}{9}$ environ, dans la théorie de Jupiter & de Saturne, ſeront aſsès convergentes pour qu'on puiſſe ſe contenter d'un petit nombre de termes.

Pour faciliter le calcul de ces deux ſéries, leſquelles peuvent auſſi être d'uſage dans pluſieurs autres occaſions, je vais donner ici les logarithmes des différentes puiſſances de α qui entrent dans les valeurs de A & de $\frac{B}{2}$.

	log. des coéficiens		*log. des coéficiens*		*log. des coéficiens*
α	0.1760913	α^2	0.3521825	α^3	0.4490925
α^4	0.5460025	α^5	0.6129493	α^6	0.6798961
α^7	0.7310486	α^8	0.7822012	α^9	0.8135939
α^{10}	0.8649865	α^{11}	0.8997486	α^{12}	0.9345108
α^{13}	0.9644740	α^{14}	0.9944372	α^{15}	1.0207661

	log. des coéficiens		log. des coéficiens		log. des coéficiens
α^{16}	1.0470951	α^{17}	1.0705762	α^{18}	1.0940573
α^{19}	1.1152466	α^{20}	1.1364359	α^{21}	1.1557410
α^{22}	1.1750462	α^{23}	1.1927749	α^{24}	1.2105037
α^{25}	1.2268941	α^{26}	1.2432845	α^{27}	1.2585245
α^{28}	1.2737645	α^{29}	1.2880049	α^{30}	1.3022454
α^{31}	1.3156093	α^{32}	1.3289733	α^{33}	1.3415624
α^{34}	1.3541515	α^{35}	1.3660508	α^{36}	1.3779500
α^{37}	1.3892310	α^{38}	1.4005120	α^{39}	1.4112359
α^{40}	1.4219598	&c.	&c.	&c.	&c.

En examinant cette table il est aisé de voir que les différences des logarithmes forment une progression décroissante ; d'où il s'ensuit que, si après avoir pris la somme d'un nombre quelconque de termes de l'une ou de l'autre série, on en regarde le reste comme une progression géométrique, l'erreur sera toujours moindre que la somme de cette progression ; ainsi il sera aisé de juger de la quantité de l'approximation.

LXXIV. Supposons donc

$$(a^2 - 2aa' \text{cos.}\, \theta + a'^2)^{-\frac{1}{2}} = A_1 + B_1 \text{cos.}\, \theta + C_1 \text{cos.}\, 2\theta + D_1 \text{cos.}\, 3\theta + \&c.$$ &

$$(a^2 - 2aa' \text{cos.}\, \theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = P_1 + Q_1 \text{cos.}\, \theta + R_1 \text{cos.}\, 2\theta + S_1 \text{cos.}\, 3\theta + \&c.$$

& nous aurons

$$\frac{1}{v^3} = A\,1 + B\,1 \cos.\theta + C\,1 \cos.2\theta + D\,1 \cos.3\theta + \&c.$$

$$- 3iy \left\{ a^2 P\,1 - aa' \frac{Q\,1}{2} + (a^2 Q\,1 - aa' P\,1 - aa' \frac{R\,1}{2}) \cos.\theta + (a^2 R\,1 - aa' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} \cos.2\theta + \&c. \right\}$$

$$- 3iy' \left\{ a'^2 P\,1 - aa' \frac{Q\,1}{2} + (a'^2 Q\,1 - aa' P\,1 - aa' \frac{R\,1}{2}) \cos.\theta + (a'^2 R\,1 - aa' \frac{Q\,1 + S\,1}{2}) \cos.2\theta + \&c. \right\}$$

ou bien, en faisant pour abreger,

$$P\,2 = 3\,(aa' \frac{Q\,1}{2} - a^2 P\,1)$$

$$Q\,2 = 3\,(aa' \frac{2P\,1 + R\,1}{2} - a^2 Q\,1)$$

$$R\,2 = 3\,(aa' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} - a^2 R\,1)$$

$$S\,2 = 3\,(aa' \frac{R\,1 + T\,1}{2} - a^2 S\,1)$$

&c.

$$P\,3 = 3\,(aa' \frac{Q\,1}{2} - a'^2 P\,1)$$

$$Q\,3 = 3\,(aa' \frac{2P\,1 + R\,1}{2} - a'^2 Q\,1)$$

$$R\,3 = 3\,(aa' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} - a'^2 R\,1)$$

$$S\,3 = 3\,(aa' \frac{R\,1 + T\,1}{2} - a'^2 S\,1)$$

&c.

$$\frac{1}{v^3} = A\,1 + B\,1 \cos.\theta + C\,1 \cos.2\theta + D\,1 \cos.3\theta + \&c.$$

$$+ iy\,(P\,2 + Q\,2 \cos.\theta + R\,2 \cos.2\theta + S\,2 \cos.3\theta + \&c.)$$

$$+ iy'\,(P\,3 + Q\,3 \cos.\theta + R\,3 \cos.2\theta + S\,3 \cos.3\theta + \&c.)$$

LXXV. Cela posé, on aura d'abord

$\frac{r}{v^3} = a\,(A1 + B1 \text{ cos. } \theta + C1 \text{ cos. } 2\theta + D1 \text{ cos. } 3\theta + \&c.)$
$+ iya\,[A1 + P2 + (B1 + Q2) \text{ cos. } \theta + (C1 + R2) \text{ cos. } 2\theta$
$+ (D1 + S2) \text{ cos. } 3\theta + \&c.]$
$+ iy'a\,(P3 + Q3 \text{ cos. } \theta + R3 \text{ cos. } 2\theta + S3 \text{ cos. } 3\theta + \&c.)$

Et de même

$\frac{r'}{v^3} = a'\,(A1 + B1 \text{ cos. } \theta + C1 \text{ cos. } 2\theta + D1 \text{ cos. } 3\theta + \&c.)$
$+ iya'\,(P2 + Q2 \text{ cos. } \theta + R2 \text{ cos. } 2\theta + S2 \text{ cos. } 3\theta + \&c.)$
$+ iy'a'\,[A1 + P3 + (B1 + Q3) \text{ cos. } \theta + (C1 + R3) \text{ cos. } 2\theta$
$+ (D1 + S3) \text{ cos. } 3\theta + \&c.]$

Donc multipliant cette dernière quantité par cos. θ, on aura

$\frac{r'}{v^3} \text{ cos. } \theta = a'\,[\frac{B1}{2} + (A1 + \frac{C1}{2}) \text{ cos. } \theta + \frac{B1 + D1}{2} \text{ cos. } 2\theta$
$+ \&c.]$
$+ iya'\,[\frac{Q2}{2} + (P2 + \frac{R2}{2}) \text{ cos. } \theta + \frac{Q2 + S2}{2} \text{ cos. } 2\theta$
$+ \&c.]$
$+ iy'a'\,[\frac{B1 + Q3}{2} + (A1 + P3 + \frac{C1 + R3}{2}) \text{ cos. } \theta$
$+ \frac{B1 + Q3 + D1 + S3}{2} \text{ cos. } 2\theta + \&c.]$.

Or $\frac{r'}{u'^3} = \frac{1}{r'^2 (1 + q'^2)^{\frac{3}{2}}} =$ (en négligeant les termes de l'ordre de i^2) $\frac{1 - 2iy'}{a'^2}$, & par conséquent

$$\frac{r'}{u'^3} \text{ cos. } \theta = \frac{1}{a'^2} \text{ cos. } \theta - 2iy' \frac{1}{a'^2} \text{ cos. } \theta.$$

Donc si on fait

$$A2 = a^3 A1 - a^2 a' \frac{B1}{2}$$

$$B_2 = a^3 B_1 - a^2 a' \frac{2A_1 + C_1}{2} + \frac{a^2}{a'^2}$$

$$C_2 = a^3 C_1 - a^2 a' \frac{B_1 + D_1}{2}$$

$$D_2 = a^3 D_1 - a^2 a' \frac{C_1 + E_1}{2}$$

&c.

$$P_4 = a^3 (A_1 + P_2) - a^2 a' \frac{Q_2}{2}$$

$$Q_4 = a^3 (B_1 + Q_2) - a^2 a' \frac{2P_2 + R_2}{2}$$

$$R_4 = a^3 (C_1 + R_2) - a^2 a' \frac{Q_2 + S_2}{2}$$

$$S_4 = a^3 (D_1 + S_2) - a^2 a' \frac{R_2 + T_2}{2}$$

&c.

$$P_5 = a^3 P_3 - a^2 a' \left(\frac{B_1}{2} + \frac{Q_3}{2}\right)$$

$$Q_5 = a^3 Q_3 - a^2 a' \left(\frac{2A_1 + C_1}{2} + \frac{2P_3 + R_3}{2}\right) - \frac{2a}{a'^2}$$

$$R_5 = a^3 R_3 - a^2 a' \left(\frac{B_1 + D_1}{2} + \frac{Q_3 + S_3}{2}\right)$$

$$S_5 = a^3 S_3 - a^2 a' \left(\frac{C_1 + E_1}{2} + \frac{R_3 + T_3}{2}\right)$$

&c.

on aura (*Art. LXVII.*)

$$R = \frac{J'}{a^2} (A_2 + B_2 \text{ cos. } \theta + C_2 \text{ cos. } 2\theta + D_2 \text{ cos. } 3\theta + \&c.)$$
$$+ i \frac{J'}{a^2} y (P_4 + Q_4 \text{ cos. } \theta + R_4 \text{ cos. } 2\theta + S_4 \text{ cos. } 3\theta + \&c.)$$
$$+ i \frac{J'}{a^2} y' (P_5 + Q_5 \text{ cos. } \theta + R_5 \text{ cos. } 2\theta + S_5 \text{ cos. } 3\theta + \&c.).$$

Maintenant on aura

$\frac{r'}{y^3}$ sin.

$$\frac{r'}{a'^3}\sin.\theta = a'\left[\left(A_1 - \frac{C_1}{2}\right)\sin.\theta + \frac{B_1 - D_1}{2}\sin.2\theta + \&c.\right]$$
$$+ iy\,a'\left[\left(P_2 - \frac{R_2}{2}\sin.\theta + \frac{Q_2 - S_2}{2}\sin.2\theta + \&c.\right]\right.$$
$$+ iy\,a'\left[\left(A_1 + P_3 - \frac{C_1 + R_3}{2}\sin.\theta + \left(\frac{B_1 + Q_3}{2} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\frac{D_1 + S_3}{2}\right)\sin.2\theta + \&c.\Big] \ \&$$

$$\frac{r'}{a'^3}\sin.\theta = \frac{1}{a'^2}\sin.\theta - 2iy\frac{1}{a'^2}\sin.\theta.$$

Donc si on multiplie ces deux quantités par $r = a(i + iy)$, & qu'on fasse

$$A_3 = a^2 a'\frac{2A_1 - C_1}{2} - \frac{a}{a'^2}$$
$$B_3 = a^2 a'\frac{B_1 - D_1}{2}$$
$$C_3 = a^2 a'\frac{C_1 - E_1}{2}$$
&c.
$$P_6 = a^2 a'\left(\frac{2A_1 - C_1}{2} + \frac{2P_2 - R_2}{2}\right) - \frac{a}{a'^2}$$
$$Q_6 = a^2 a'\left(\frac{B_1 - D_1}{2} + \frac{Q_2 - S_2}{2}\right)$$
$$R_6 = a^2 a'\left(\frac{C_1 - E_1}{2} + \frac{R_2 - T_2}{2}\right)$$
&c.
$$P_7 = a^2 a'\left(\frac{2A_1 - C_1}{2} + \frac{2P_3 - R_3}{2}\right) + \frac{2a}{a'^2}$$
$$Q_7 = a^2 a'\left(\frac{B_1 - D_1}{2} + \frac{Q_3 - S_3}{2}\right)$$
$$R_7 = a^2 a'\left(\frac{C_1 - E_1}{2} + \frac{R_3 - T_3}{2}\right).$$
&c.

on aura (*Art. cité*)

$$Q = \frac{J'}{a}(A\,3\,\text{sin.}\,\theta + B\,3\,\text{sin.}\,2\,\theta + C\,3\,\text{sin.}\,3\,\theta + \&c.)$$

$$+ i\frac{J'}{a}y\,(P6\,\text{sin.}\,\theta + Q\,6\,\text{sin.}\,2\,\theta + R\,6\,\text{sin.}\,3\,\theta + \&c.)$$

$$+ i\frac{J'}{a}y'\,(P\,7\,\text{sin.}\,\theta + Q\,7\,\text{sin.}\,2\,\theta + R\,7\,\text{sin.}\,3\,\theta + \&c.)$$

Enfin on a $\frac{p-p'}{v^3} = i\left(z\frac{r}{v^3} - z'\frac{r'}{v^3}\right)$ & $\frac{p'}{u'^3} = iz'\frac{1}{r'^3(1+q'^2)}$;

d'où, en négligeant les termes de l'ordre de i^2, on aura

$P = iJ'[(za - z'a')\times(A\,1 + B\,1\,\text{cos.}\,\theta + C\,1\,\text{cos.}\,2\,\theta$ $+ \&c.) + \frac{z'}{a'^2}]$.

De sorte que si on fait

$$A\,4 = a^3 A\,1 - A\,2$$
$$B\,4 = a^3 B\,1 - B\,2$$
$$C\,4 = a^3 C\,1 - C\,2$$
$$\&c.$$
$$A\,5 = \frac{a^3}{a'^2} - a^2 a' A\,1$$
$$B\,5 = - a^2 a' B\,1$$
$$C\,5 = - a^2 a' C\,1$$
$$\&c.$$

on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près,

$$\frac{P - Rq}{r}$$

$$= i\frac{J'}{a^3}z\,(A4 + B4\,\text{cos.}\,\theta + C4\,\text{cos.}\,2\theta + D4\,\text{cos.}\,3\theta + \&c.)$$

$$+ i\frac{J'}{a^3}z'(A5 + B5\,\text{cos.}\,\theta + C5\,\text{cos.}\,2\theta + D5\,\text{cos.}\,3\theta + \&c.)$$

Et il ne restera plus, pour achever les substitutions, qu'à mettre au lieu de θ, c'est-à-dire au lieu de $\varphi - \varphi'$ sa valeur $(h - h')t + i(x - x')$, ou bien, (en faisant $h - h' = H$) $Ht + i(x - x')$, ce qui est très-facile; car il

n'y aura qu'à mettre partout dans les expressions précédentes Ht à la place de θ, & ajouter ensuite à la valeur de R la quantité

$$-i\frac{J'}{a^2}(x-x')\times(B2\,\text{sin.}Ht+2C2\,\text{sin.}2Ht+3D2\,\text{sin.}3Ht+\&c.)$$

& à celle de Q la quantité

$$i\frac{J'}{a}(x-x')\times(A3\,\text{cos.}Ht+2B3\,\text{cos.}2Ht+3C3\,\text{cos.}3Ht+\&c.).$$

LXXVI. On sait que les masses de Jupiter & de Saturne sont très-petites par rapport à celle du Soleil, ensorte qu'on ne peut supposer $\frac{J}{I}=i\text{m}$ & $\frac{J'}{I}=i\text{m}'$; donc puisque $b=\frac{I+J}{a^3}$ (*Art. LXXII.*) on aura $J'=i\frac{\text{m}'}{1+i\text{m}}a^3b$ où, faisant $\frac{\text{m}'}{1+i\text{m}}b=\text{n}$, $J'=ia^3\text{n}$; d'où il s'ensuit que les quantités P, Q, R sont très-petites de l'ordre de i, & qu'ainsi pour satisfaire aux équations (k) de l'Art. cité, il est nécessaire de supposer $\frac{c}{a^2}$ presque égal à h, & $\frac{I+J}{a^3}$, ou bien b presque égal à h^2.

Soit donc $\frac{c}{a^2}-h=if$ & $b-h^2=ig$, & les équations (k) donneront, après avoir substitué les valeurs de R, Q, & $\frac{P-Rq}{r}$ trouvées ci-dessus, & divisé le tout par i,

$$X=\text{f}+\frac{\text{n}}{H}(A3\,\text{cos.}Ht+\frac{1}{2}B3\,\text{cos.}2Ht+\&c.)$$
$$-i\text{n}\int y(P6\,\text{sin.}Ht+Q6\,\text{sin.}2Ht+\&c.)dt$$
$$-i\text{n}\int y'(P7\,\text{sin.}Ht+Q7\,\text{sin.}2Ht+\&c.)dt$$
$$-i\text{n}\int(x-x')\times(A3\,\text{cos.}Ht+B3\,\text{cos.}2Ht+\&c.)dt,$$

$$Y = g + n\,(A\,2 + B2 \text{ cof. } Ht + C2 \text{ cof. } 2\,Ht + \&c.)$$
$$+ iny\,(P4 + Q4 \text{ cof. } Ht + R4 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ iny'\,(P5 + Q5 \text{ cof. } Ht + R5 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$- in\,(x - x') \times (B2 \text{ fin. } Ht + C2 \text{ fin. } 2Ht + \&c.),$$
$$Z = in\,z\,(A\,4 + B\,4 \text{ cof. } Ht + C\,4 \text{ cof. } 2\,Ht + \&c.)$$
$$+ in\,z'\,(A\,5 + B\,5 \text{ cof. } Ht + C\,5 \text{ cof. } H\,2\,t + \&c.)\,.$$

LXXVII. Ayant ainfi les valeurs de X, Y, & Z, il ne s' agira plus que de les fubftituer dans les équations de l'Art. LXXII. Or fi on met $h^2 + ig$ au lieu de b, qu'on néglige les quantités affectées de i^2n & de in² (parceque n eft auffi une quantité fort petite comme on le verra plus bas), & qu'après avoir ajouté enfemble les coéficiens des termes analogues on faffe

$$A\,6 = B\,2 - \frac{2\,(b + if)}{H}\,A\,3$$

$$B\,6 = C\,2 - \frac{2\,(b + if)}{2\,H}\,B\,3$$

&c.

$$A\,7 = B\,4 + \frac{2b}{H}\,A\,3$$

$$B\,7 = C\,4 + \frac{2\,b}{2H}\,B\,3$$

&c.

$$P\,8 = Q4 + \frac{6b}{H}\,A\,3$$

$$Q8 = R4 + \frac{6\,b}{2H}\,B\,3$$

&c.

& enfuite

$$\Phi = A\,6 \text{ cof. } Ht + B\,6 \text{ cof. } 2\,Ht + \&c.$$
$$+ iy\,(P\,8 \text{ cof. } Ht + Q\,8 \text{ cof. } 2\,Ht + \&c.)$$
$$+ iy'\,(P\,5 + Q5 \text{ cof. } Ht + R5 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ 2\,ihfy\,(P\,6 \text{ fin. } Ht + Q\,6 \text{ fin. } 2\,Ht + \&c.)\,dt$$

$$+ 2ihf y' (P7 \sin. Ht + Q7 \sin. 2Ht + \&c.) dt$$
$$- i(x - x) \times (B2 \sin. Ht + C2 \sin. 2Ht + \&c.)$$
$$+ 2ihf(x - x') \times (A3 \cos. Ht + B3 \cos. 2Ht + \&c.) dt,$$
$$\Psi = z(A7 \cos. Ht + B7 \cos. 2Ht + \&c.)$$
$$+ z'(A5 + B5 \cos. Ht + C5 \cos. 2Ht + \&c.)$$
$$\Xi = -\frac{1}{H}(A3 \cos. Ht + \frac{B3}{2} \cos. 2Ht + \&c.)$$
$$+ \frac{2i}{H} y (A3 \cos. Ht + \frac{B3}{2} \cos. 2Ht + \&c.)$$
$$+ if y (P6 \sin. Ht + Q6 \sin. 2Ht + \&c.) dt$$
$$+ if y' (P7 \sin. Ht + Q7 \sin. 2Ht + \&c.) dt$$
$$+ if (x - x) \times (A3 \cos. Ht + B3 \cos. 2Ht + \&c.) dt,$$

on aura les équations suivantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g + 3if^2 + nP4)]y + g - 2hf - if^2 + nA2 - 3i[h^2 + i(4hf - g)]y^2 - \frac{3}{2}i(h^2 + ig)z^2 + 6i^2h^2y^3 + 3i^2h^2yz^2 + n\Phi = 0 \quad \ldots \quad (l)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + [h^2 + i(2hf + if^2 + nA4)]z - 4i(h^2 + 2ihf)zy + 2i\frac{dz\,dy}{dt^2} + 10i^2h^2zy^2 - 2i^2y\frac{dz\,dy}{dt^2} + in\Psi = 0 \quad \ldots \quad (m)$$

$$\frac{dx}{dt} + 2(h + if)y - f - 3i(h + if)y^2 + 4i^2hy^3 + n\Xi = 0 \quad \ldots \quad (n)$$

Telles sont les équations du mouvement de Jupiter, en-tant qu'il est altéré par l'action de Saturne.

On trouvera des équations semblables pour le mouvement de Saturne dérangé par Jupiter; il ne faudra pour cela que mettre y', z', x' à la place de x, y, z & *viceversa*, & marquer toutes les autres lettres d'un trait, à l'excep-

tion de H, laquelle étant $= h - h'$, deviendra $h' - h$, c' eſt-à-dire ſimplement négative.

LXXVIII. Je remarque maintenant que les équations (l) & (m) peuvent ſe réduire à cette forme plus ſimple

$$\frac{d^2 \mathrm{y}}{dt^2} + K^2 \mathrm{y} + \mathrm{n}\,\mathrm{Y} = 0, \quad \& \quad \frac{d^2 \mathrm{z}}{dt^2} + L^2 \mathrm{z} + i\,\mathrm{n}\,\mathrm{Z} = 0,$$

en ſuppoſant

$$\mathrm{y} = y + \alpha + i\,(\beta y^2 + \gamma \zeta^2) + i^2\,(\delta y^3 + \varepsilon y \zeta^2$$

$$+ \eta \zeta \frac{dy\,dz}{dt^2}), \quad \&$$

$$\mathrm{z} = \zeta + i\,(\mu \zeta y + \nu \frac{dz\,dy}{dt^2}) + i^2\,(\pi \zeta^3 + \rho \zeta y^2 +$$

$$\sigma y \frac{dz\,dy}{dt^2}).$$

Pour le prouver, & déterminer en même tems les valeurs de α, β, γ &c. μ, ν, π &c., je prends d' abord les différentielles ſecondes de y & de z, j' ai

$$\frac{d^2 \mathrm{y}}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} + i\beta\,(2y \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy^2}{dt^2}) + i\gamma\,(2\zeta \frac{d^2 z}{dt^2} +$$

$$2 \frac{dz^2}{dt^2}) + i^2\delta\,(3y^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6y \frac{dy^2}{dt^2}) + i^2\varepsilon\,(\zeta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta y \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$+ 2y \frac{dz^2}{dt^2} + 4\zeta \frac{dydz}{dt^2}) + i^2\eta\,(2 \frac{dz^2}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dydz}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$+ \zeta \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + \zeta \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3} + 2\zeta \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}),$$

$$\frac{d^2 \mathrm{z}}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} + i\mu\,(y \frac{d^2 z}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dzdy}{dt^2}) + i\nu\,(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3}$$

$$+ \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}) + i^2\pi\,(3\zeta^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 6\zeta \frac{dz^2}{dt^2})$$

$$+ i^2\rho\,(y^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\zeta y \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy^2}{dt^2} + 4y \frac{dz\,dy}{dt^2}) +$$

$$i^2\sigma\,(2 \frac{dy^2}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + 3 \frac{dzdy}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + y \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3} + y \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3}$$

$$+ 2y \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}).$$

Enſuite je ſubſtitue à la place de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt}$, $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$ leurs valeurs tirées des équations (l) & (m), en négligeant les quantités qui ſeroient affectés de i^3, ou de $i^2 n$; & pour avoir les valeurs de $\frac{dy^2}{dt^2}$ & $\frac{dz^2}{dt^2}$ (car les autres ſe déduiſent aiſément des équations citées) je multiplie l'équation (l) par $2dy$, & l'équation (m) par $2dz$, & enſuite je les intégre; ce qui me donne (en négligeant les quantités de l'ordre de i^2 & de in, parceque $\frac{dy^2}{dt^2}$ & $\frac{dz^2}{dt^2}$ ne ſe trouvent que dans des termes déja affectés de i)

$$\frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g)]y^2 + 2(g - 2hf - if^2 + nA2) + A - 2ih^2y^3 - 3ih^2\int z^2 dy + 2n\int \Phi dy = 0,$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + (h^2 + 2ihf)z^2 + B - 8ih^2\int yz\,dz + 4i\int \frac{dz^2}{dt^2}dy + 2in\int \Psi dz = 0,$$

A, & B étant des conſtantes.

(Je conſerve exprès le terme $2in\int \Psi dz$ parceque la quantité Ψ contient un terme de cette forme $B5z'$ coſ. Ht, lequel étant multiplié par dz, & enſuite intégré, après avoir ſubſtitué les valeurs de z & de z' en t, ſe trouvera diviſé par des quantités de l'ordre de i).

Or l'équation (m) donne, en rejettant tous les termes affectés de i, $\frac{d^2z}{dt^2} + h^2 z = 0$; & par conſéquent $\int z\frac{d^2z}{dt^2}dy + h^2\int z^2 dy = 0$; mais $\int z\frac{d^2z}{dt^2}dy = z\frac{dydz}{dt^2}$ —

$-\int(\frac{dz^2}{dt^2}dy + z\frac{d^2y}{dt^2}dz) .=$ (en mettant au lieu de $\frac{dz^2}{dt^2}$ & de $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-h^2z^2 - B$ & $-h^2y - g + 2hf$, car on peut négliger ici tous les termes affectés de i & de n) $z\frac{dydz}{dt^2} + h^2\int z^2 dy + By + h^2\int yzdz + \frac{g-2bf}{2}z^2 =$ (à cause de $\int yzdz = \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{2}\int z^2dy$) $z\frac{dydz}{dt^2} + \frac{h^2}{2}\int z^2dy + By + \frac{h^2}{2}yz^2 + \frac{g-2bf}{2}z^2$. Donc on aura $\frac{3}{2}h^2\int z^2dy + \frac{h^2}{2}yz^2 + z\frac{dydz}{dt^2} + By + \frac{g-2bf}{2}z^2 = 0$; d'où l'on tire $\int z^2 dy = -\frac{1}{3}yz^2 - \frac{2}{3h^2}z\frac{dydz}{dt^2} - \frac{2B}{3h^2}y - \frac{g-2bf}{3h^2}z^2$.

Donc si on met cette valeur dans la premiére des deux équations ci-dessus, & qu'on substitue dans la seconde à la place de $\int\frac{dz^2}{dt^2}dy$, $-h^2\int z^2 dy - By$, & à la place de $\int\Psi dz$, B $\varsigma\int$ cos. $Ht\zeta dz$, on aura après les réductions

$$\frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g)]y^2 + 2[g - 2hf - i(f^2 - B^2) + nA2]y + A + i(g - 2hf)z^2 - 2ih^2y^3 + ih^2yz^2 + 2iz\frac{dydz}{dt^2} + 2n\int\Phi dy = 0 \quad (o)$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + [h^2 + 2ihf]z^2 + B - 4iBy - 4ih^2yz^2 + 2inB\varsigma\int \text{cof.}\, Ht\zeta dz = 0 \;\ldots\ldots\; (p)$$

Ces substitutions faites, on trouvera, en ordonnant les termes

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = [- h^2 - i(6hf - 2g + 3if^2 + nP4)$$
$$- 6i\beta(g - 2hf - if^2 + \frac{2}{3}iB + nA2) + 8i^2\gamma B$$
$$- 6i^2\delta A - 2i^2\varepsilon B + 2i^2\eta h^2 B]y$$
$$- (g - 2hf - if^2 + nA2) - 2i\beta A - 2i\gamma B$$
$$+ 2i^2\eta(g - 2hf)B$$
$$+ [3ih^2 + 3i^2(4hf - g) - 4i\beta(h^2 + i(6hf$$
$$- g)) - 15i^2\delta(g - 2hf)]y^2$$
$$+ [\frac{3}{2}i(h^2 + ig) - 2i^2\beta(g - 2hf) - 4i\gamma(h^2 + 2ihf)$$
$$- i^2\varepsilon(g - 2hf) + 4i^2\eta h^2(g - 2hf)]z^2$$
$$+ [- 6i^2h^2 + 10i^2\beta h^2 - 9i^2\delta h^2]y^3$$
$$+ [- 3i^2h^2 + i^2\beta h^2 + 16i^2\gamma h^2 - 5i^2\varepsilon h^2 + 4i^2\eta h^4]yz^2$$
$$+ [- 4i^2\beta - 4i^2\gamma + 4i^2\varepsilon - 5i^2\eta h^2]z\frac{dy\,dz}{dt^2}$$
$$+ n[- \Phi - 2i\beta\Phi y - 4i\beta\int\Phi dy - 4i^2\gamma B5\int \text{cos}.\, Htz\,dz],$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = [- h^2 - i(2hf + if^2 + nA4) - i\mu(g - 2hf$$
$$- if^2 + nA2) + 2i\nu(g - 2hf - if^2 + nA2) \times$$
$$(h^2 + 2ihf) - 3i^2\nu h^2(2A + B) - 6i^2\pi B - 2i^2\rho A$$
$$+ 2i^2\sigma h^2 A]z$$
$$+ [4i(h^2 + 2ihf) - 2i\mu(h^2 + i(4hf - g)) +$$
$$2i\nu(h^2 + i(6hf - 2g)) \times (h^2 + 2ihf) - 20i^2\nu h^2(g - 2hf)$$
$$- 6i^2\rho(g - 2hf) + 6i^2\sigma h^2(g - 2hf)]zy$$
$$+ [- 2i + 2i\mu - i\nu(2h^2 + i(20hf - 8g))$$
$$- 3i^2\sigma(g - 2hf)]\frac{dy\,dz}{dt^2}$$
$$+ [\frac{3}{2}i^2\mu h^2 - 6i^2\nu h^4 - 9i^2\pi h^2]z^3$$
$$+ [- 10i^2h^2 + 7i^2\mu h^2 - 20i^2\nu h^4 - 5i^2\rho h^2 +$$
$$4i^2\sigma h^4]y^2 z$$

$$+ [\, 2\,i^2 - 2\,i^2\mu + 16\,i^2\nu h^2 + 4\,i^2\rho - 5\,i^2\sigma h^2\,]\,y\,\frac{dy\,dz}{dt^2}$$

$$+ n\,[\, - i\Psi - i\mu\zeta\Phi - i\nu\frac{d\Phi\,dz}{dt^2} + 2\,i\nu h^2\zeta\Phi\,].$$

Je mets donc ces valeurs de y, z, $\frac{d^2y}{dt^2}$ & $\frac{d^2z}{dt^2}$ dans les équations $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + nY = 0$, & $\frac{d^2z}{dt^2} + L^2z + i\,nZ = 0$, & enſuite j'égale à zéro les termes homogénes ; ce qui me donne les équations ſuivantes

$$-h^2 - i(6hf - 2g + 3if^2 + nP\,4) - 6i\beta(g - 2hf - if^2 + \tfrac{2}{3}iB + nA\,2) + 8i^2\gamma B - 6i^2\delta A - 2i^2\varepsilon B + 2i^2\eta h^2 B + K^2 = 0,$$

$$-(g - 2hf - if^2 + nA\,2) - 2i\beta A - 2i\gamma B + 2i^2\eta(g - 2hf)B + \alpha K^2 = 0,$$

$$3h^2 + 3i(4hf - g) - 4\beta(h^2 + i(6hf - 2g)) - 15i\delta(g - 2hf) + \beta K^2 = 0,$$

$$\tfrac{3}{2}(h^2 + ig) - 2i\beta(g - 2hf) - 4\gamma(h^2 + 2ihf) - i\varepsilon(g - 2hf) + 4i\eta h^2(g - 2hf) + \gamma K^2 = 0,$$

$$-6h^2 + 10\beta h^2 - 9\delta h^2 + \delta K^2 = 0,$$

$$-3h^2 + \beta h^2 + 16\gamma h^2 - 5\varepsilon h^2 + 4\eta h^4 + \varepsilon K^2 = 0,$$

$$-4\beta - 4\gamma + 4\varepsilon - 5\eta h^2 + \eta K^2 = 0,$$

$$-\Phi - 2i\beta\Phi y - 4i\beta\int\Phi\,dy - 4i^2\gamma B\,5\int\text{coſ.}\,Ht\zeta\,d\zeta + Y = 0,$$

$$-h^2 - i(2hf + if^2 + nA\,4) - i\mu(g - 2hf - if^2 + nA\,2) + 2i\nu(g - 2hf - if^2 + nA\,2)\times(h^2 + 2ihf) - 3i^2\nu h^2(2A + B) - 6i^2\pi B - 2i^2\rho A + 2i^2\sigma h^2 A + L^2 = 0,$$

$$4(h^2 + 2ihf) - 2\mu[\,h^2 + i(4hf - g)\,] + 2\nu[\,h^2 + i(6hf - 2g)\,]\times[\,h^2 + 2ihf\,] - 20i\nu h^2(g - 2hf) - 6i\rho(g - 2hf) + 6i\sigma h^2(g - 2hf) + \mu L^2 = 0,$$

$$-2+2\mu-\nu[2h^2+i(20hf-8g)]-3i\sigma(g-2hf)+\nu L^2=0,$$

$$\frac{3}{2}\mu h^2-6\nu h^4-9\pi h^2+\pi L^2=0,$$

$$-10h^2+7\mu h^2-20\nu h^4-5\rho h^2+4\sigma h^4+\rho L^2=0,$$

$$2-2\mu+16\nu h^2+4\rho-5\sigma h^2+\sigma L^2=0,$$

$$-\Psi-(\mu-2\nu h^2)z\Phi-\nu\frac{d\Phi\, dz}{dt^2}+Z=0;$$

par où l'on déterminera les valeurs des coéficiens K^2, α, β, γ, δ, ε, η, L^2, μ, ν, π, ρ, σ, ainsi que celles de Y & de Z; en ayant soin de pousser les valeurs de K^2, L^2, & α jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2 & de i n, celles de β, γ, μ, ν jusqu'aux quantités de l'ordre de i & de n seulement, & enfin de négliger dans les autres toutes les quantités affectées de i & de n.

LXXIX. Si on regarde la quantité α comme connuë, & qu'on s'en serve pour déterminer g, on aura

$$g=\alpha K^2+2hf-nA2+i(f^2-2\beta A-2\gamma B)+2i^2\eta\alpha K^2 B;$$

ensuite, supposant $K=h+ik$ & $L=h+il$, on trouvera

$$k=f+2h\alpha+\frac{i}{2b}(4hf\alpha+15h^2\alpha^2-5A-B)+\frac{n}{2b}(P4+2A2),$$

$$l=f+2h\alpha+\frac{i}{2b}(4hf\alpha+15h^2\alpha^2-5A-B)+\frac{n}{2b}A4,$$

$$\beta=1+\frac{i}{2}\alpha,\ \gamma=\frac{1}{2}+i\alpha\eta h^2,\ \delta=\frac{1}{2},\ \varepsilon=\frac{3}{2}+\eta h^2,$$

$$\mu = i(15 + 2\sigma h^2)\alpha, \; \nu = -\frac{2}{b^2} + i\left(\frac{4f}{b^2} + \frac{6+\sigma b^2}{b^2}\alpha\right),$$

$$\pi = \frac{3}{2}, \; \rho = \frac{15}{2} + \sigma h^2 \quad \&$$

$$Y = \Phi + 2i\beta\Phi y + 4i\beta\int\Phi dy + 4i^2\gamma B 5 \int \text{cof.}\, Ht\zeta\, d\zeta,$$

$$Z = \Psi + (\mu - 2\nu h^2)\Phi\zeta + \nu\frac{d\Phi\, dz}{dt^2}.$$

Et l'on remarquera qu'il reſtera encore deux indéterminées η & σ, leſquelles pourront être ſuppoſées égales à tout ce qu'on voudra, ſelon ce qu'on jugera plus commode.

A l'égard des quantités α & f, il faudra les prendre de telle manière que les deux conditions exprimées dans l'Art. LXXII. ayent lieu, c'eſt-à-dire que les valeurs de y & de $\frac{dx}{dt}$ ne renferment aucun terme tout conſtant ; ainſi ce ne ſera qu'après avoir trouvé les expreſſions générales de y & de $\frac{dx}{dt}$ en t, qu'on pourra déterminer les *conſtantes* α & f.

Au reſte comme il n'eſt pas abſolument néceſſaire que la quantité a repréſente exactement la diſtance moyenne de la planète, on pourra, ſi l'on veut, ſe contenter de remplir la ſeconde des deux conditions dont nous venons de parler, & pour lors on aura encore une nouvelle indéterminée α à volonté.

Enfin pour déterminer *A* & *B* on ſubſtituera d'abord dans les équations (o) & (p) les valeurs de y & ζ en t, & on fera enſuite des équations ſéparées des termes dans leſquels t n'entre pas, les autres étant cenſés ſe détruire d'eux-mêmes. Or, en mettant au lieu de y & ζ leurs valeurs approchées y — α & z, & négligeant tous les termes affectés de i, ainſi que ceux qui contiennent des *ſinus* & des *coſinus*, on a (à cauſe de g — $2hf = \alpha h^2$ à très-peu près)

$$\frac{dy^2}{dt^2} + h^2 y^2 - \alpha h^2 + A = 0, \quad \&$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + h^2 z^2 + B = 0.$$

De sorte qu'en ne prenant, dans les valeurs de y^2, $\frac{dy^2}{dt^2}$, z^2 & $\frac{dz^2}{dt^2}$, que les termes constans & omettant les autres, on aura

$$A = \alpha^2 h^2 - h^2 y^2 - \frac{dy^2}{dt^2} \quad \&$$

$$B = - h^2 z^2 - \frac{dz^2}{dt^2}.$$

LXXX. Pour mettre nos formules sous une forme plus commode & plus simple, nous ferons $\alpha = 0$, $\eta = 0$, & $\sigma = - \frac{11}{2b^2}$; moyennant quoi nous aurons

$$y + i(y^2 + \frac{1}{2} z^2) + i^2 (\frac{1}{2} y^3 + \frac{3}{2} y z^2) = y \quad \&$$

$$z - 2i(1 - \frac{2if}{b}) \frac{dz\,dy}{b^2 dt^2} + i^2 (\frac{3}{2} z^3 + 2 z y^2 - \frac{11}{2} y \frac{dy\,dz}{b^2 dt^2}) = z;$$

d' où l' on tire, en ne poussant la précision que jusques aux quantités de l' ordre de i^2,

$$y = y - i(y^2 + \frac{1}{2} z^2) + i^2 (\frac{3}{2} y^3 - \frac{1}{2} y z^2 - 2z \frac{dy\,dz}{b^2 dt^2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

$$z = z + 2i(1 - \frac{2if}{b}) \frac{dz\,dy}{b^2 dt^2} - i^2 (\frac{3}{2} z^3 + 2 z y^2 - \frac{3}{2} y \frac{dz\,dy}{b^2 dt^2} + 2z \frac{dz^2}{b^2 dt^2} - 4 \frac{dy\,d\cdot(dz\,dy)}{b^4 dt^4}),$$

ou bien (en mettant pour $\frac{d^2y}{dt^2}$ & $\frac{d^2z}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-h^2y$ & $-h^2z$),

$$\zeta = z + 2i(1 - \frac{2if}{b})\frac{dz\,dy}{b^2dt^2} - i^2(\frac{3}{2}z^3 + 2zy^2 + \frac{5}{2}y\frac{dz\,dy}{b^2dt^2} + 2z\frac{dz^2}{b^2dt^2} + 4z\frac{dy^2}{b^2dt^2}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (r)$$

Et si on substitue cette valeur de y dans l'équation (n) de l'Art. LXXVII., on aura

$$\frac{dx}{dt} = -2(h + if)y + f + i(h + if) \times (5y^2 + z^2) - i^2h(13y^3 + 2yz^2 - 4z\frac{dy\,dz}{b^2dt^2}) - n\,\mathrm{Z} \quad . \; . \quad (s)$$

équation facile à intégrer dès qu'on aura les valeurs de y & z en t. On se souviendra seulement qu'il faudra, avant l'intégration, faire = o tous les termes constants.

De plus, si on veut avoir l'expression du rayon vecteur u de l'orbite réelle, on fera $u = a(1 + iv)$, & comme $u = r\sqrt{(1 + q^2)}$, on trouvera $v = y + \frac{i}{2}\zeta^2 + \frac{i^2}{2}y\zeta^2$; & mettant au lieu de y & ζ leurs valeurs en y & z,

$$v = y - iy^2 + \frac{3}{2}i^2y^3.$$

Ainsi le problème ne dépendra plus que de l'intégration des équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + n\,\mathrm{Y} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (t)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + L^2z + in\,\mathrm{Z} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (u)$$

LXXXI. Si on fait n = o, on aura le cas ordinaire où l'orbite est une ellipse immobile.

On trouvera donc pour ce cas
$y = \Delta$ coſ. $(Kt - A)$, & $z = \Lambda$ ſin. $(Lt - E)$,
Δ, Λ, A & E étant des conſtantes.

Donc 1.° $A = -h^2\Delta^2$, & $B = -h^2\Lambda^2$ (*Art. LXXIX.*); 2.° ſi on ſubſtitue ces valeurs de y & de z dans le ſecond membre de l'équation (s), & qu'après avoir développé les puiſſances des *ſinus* & des *coſinus* on égale à zéro tous les termes conſtans, on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près, $f + ih\left(\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2\right) = 0$; d'où

$$f = -ih\left(\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2\right).$$

De ſorte qu'on trouvera, (à cauſe de $\alpha = 0$ & de $n = 0$) $k = 0$, & $l = 0$, & par conſéquent $K = h$ & $L = h$ (*Art. LXXIX.*).

Si on n'eut pas ſuppoſé $\alpha = 0$, on eut eu $A = h^2(\alpha^2 - \Delta^2)$, $B = -h^2\Lambda^2$, & $2(h + if)\alpha + f + 5ih\left(\frac{1}{2}\Delta^2 + \alpha\right) + \frac{ib}{2}\Lambda^2 = 0$; d'où $f = -2h\alpha - ih\alpha^2 - \frac{ib}{2}(5\Delta^2 + \Lambda^2)$, & l'on trouveroit, après les ſubſtitutions, que tous les termes des valeurs de k & de l ſe détruiroient d'eux mêmes, de manière que ces quantités ſeroient auſſi nulles, comme elles le doivent être dans ce cas; ce qui pourroit ſervir, s'il en étoit beſoin, à confirmer la bonté de nos formules.

Il ne s'agira donc plus que de mettre, dans les équations de l'Art. préc., Δ coſ. $(ht - A)$ à la place de y & Λ ſin. $(ht - E)$ à la place de z; ce qui n'aura aucune difficulté; d'ailleurs ce cas eſt ſi connu des Géomètres qu'il ſeroit ſuperflu de nous y arrêter. Je me contenterai d'obſerver;

1.° Que les Apſides de l'orbite ſe trouveront aux points où $dy = 0$, & par conſéquent où ſin. $(ht - A) = 0$;

ce qui donnera pour l'aphelie cos. $(ht - A) = 1$ & $v = \Delta - i\Delta^2 + \frac{3}{2} i^2\Delta^3$, & pour le périhélie cos. $(ht - A)$ $= -1$ & $v = -\Delta - i\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2\Delta^3$; d'où il s'ensuit que le demi-axe de l'ellipse sera $= a(1 - i^2\Delta^2)$ & l'excentricité $= i\Delta \frac{1 + \frac{3}{2} i^2\Delta^2}{1 - i^2\Delta^2} = i\Delta(1 + \frac{5}{2} i^2\Delta^2)$ $= i\Delta$ à très-peu près;

2.° Que par conséquent l'angle $ht - A$ représentera l'anomalie moyenne, & A le lieu de l'aphelie;

3.° Que les limites, c'est-à-dire les plus grandes latitudes seront aux points où $dz = \frac{2izdy}{1-2iy}$, & par conséquent (en négligeant les quantités de l'ordre de i^2) aux points où $\frac{\text{cos.}(ht - E)}{\text{sin.}(ht - E)} = 2i\frac{dy}{hdt}$, c'est-à-dire où cos. $(ht - E)$ $= 2i\frac{dy}{hdt}$; d'où la plus grande valeur de z sera $\Lambda(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2h^2\Lambda^2)$; de sorte qu'on aura pour la tangente de l'inclinaison de l'orbite $i\Lambda(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2h^2\Lambda^2) = i\Lambda$ à très-peu près;

4.° Que, comme $\frac{d^2y}{dt^2} + h^2y = 0$, on aura $\frac{dy}{dt} = -$ $h^2\int y\,dt =$ (à cause de $\frac{dx}{dt} = -2hy$, en négligeant les termes affectés de i) $\frac{h}{2} x$; donc on aura dans les limites $\frac{\text{cos.}(ht - E)}{\text{sin.}(ht - E)} = ix$; & par conséquent cos. $(ht - E)$ $- ix$ sin. $(ht - E) = 0$, ou bien cos. $(ht + ix - E) = 0$, c'est-

c' eſt-à-dire coſ. ($\varphi' - E$) $= 0$; ce qui montre que E eſt le lieu du nœud aſcendant, & qu'ainſi l' angle $ht - E$ dénote la diſtance moyenne de la planète au nœud.

LXXXII. Il eſt bon de remarquer que ſi on vouloit réſoudre le problème de l' Art. LXXVIII. d'une manière plus générale, en donnant à tous les termes des équations (l) & (m) des coéficiens indéterminés, on trouveroit, après en avoir fait le calcul, deux équations de condition entre ces mêmes coéficiens; de ſorte que la ſolution ne pourroit avoir lieu que quand ces équations ſeroient identiques d' elles mêmes; or c' eſt préciſément ce qui arrive dans notre cas, & c' eſt-là la raiſon pourquoi il reſte deux coéficiens indéterminés η & σ. Au reſte il eſt facile de voir que cet inconvénient ne vient que de ce que nous avons conſervé la quantité $\frac{dy\,dz}{dt^2}$ au lieu d' y ſubſtituer ſa valeur tirée des équations (l) & (m) comme nous l' avons pratiqué dans l'Art. LII. Ainſi il ſera très-aiſé d'y remédier, & de donner par-là à notre méthode toute la généralité dont elle eſt ſuſceptible.

LXXXIII. Revenons maintenant à notre ſujet, & voyons comment il faut s' y prendre pour intégrer les équations (t) & (u). Pour cela on commencera par mettre dans les expreſſions de Y & Z, à la place de y, z, & x leurs valeurs approchées y, z, & $- 2h\int \mathrm{y}\,dt$ tirées des équations (q), (r), (s), & de même à la place de y', z', x', les valeurs correſpondantes y$'$, z$'$, & $- 2h'\int \mathrm{y}'\,dt$; puis on cherchera, par l' intégration, les valeurs de y, z, & de y$'$, z$'$, en y négligeant d' abord tous les termes affectés de i & n; & ces premiéres valeurs étant enſuite ſubſtituées dans Y & Z ſerviront à déterminer plus exactement les mêmes quantités y, z, y$'$, z$'$.

Or il ſemble d' abord qu'on pourroit ſe contenter de prendre pour premiéres valeurs approchées de y & z celles

lequel appartient, comme l'on voit, à la première valeur de y.

On trouvera de même dans la première valeur de y' un terme contenant cos. $[(h' + ik)t - A]$, & qui étant substitué dans le même terme $in\,Q_5\,y'$ cos. Ht de la quantité Y donnera un terme de cette forme cos. $[(h + ik)t - A]$, savoir cos. $(Kt - A)$; de sorte que la nouvelle valeur de y renfermera un arc de cercle (*Art. XLII.*).

Le même inconvénient aura lieu, comme il est aisé de s'en assurer, par rapport à tous les termes de Y & de Z qui renferment y', ou z' multipliés par cos. Ht, ou par sin. Ht. Tels sont dans la quantité Y les termes $i\,(Q_5\,y' \text{cos.}\,Ht + 2hP_7 \int y' \text{sin.}\,Ht\,dt - 2h'B_2 \int y'dt$ $\times \text{sin.}\,Ht + 4hh'A_3 \int\int y'\,dt \times \text{cos.}\,Ht\,dt)$, & dans la quantité Z le terme $B_5\,z'$ cos. Ht. Ainsi il sera nécessaire d'avoir égard à ces termes dans la première approximation des valeurs de y & z.

On aura donc en premier lieu l'équation suivante en y

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + in\,(Q_5\,y' \text{cos.}\,Ht + 2hP_7 \int y' \text{sin.}\,Ht\,dt$$
$$- 2h'B_2 \int y'dt \times \text{sin.}\,Ht + 4hh'A_3 \int\int y\,dt \times \text{cos.}\,Ht\,dt)$$
$$= 0,$$

ou bien, parceque $\int\int y'\,dt \times \text{cos.}\,Ht\,dt = \frac{1}{H}\int y'dt \times \text{sin.}\,Ht$ $- \frac{1}{H}\int y' \text{sin.}\,Ht\,dt$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + in\,[Q_5\,y' \text{cos.}\,Ht + (\frac{4hh'}{H}A_3 - 2h'B_2)$$
$$\int y'\,dt \times \text{sin.}\,Ht - (\frac{4hh'}{H}A_3 - 2hP_7)\int y' \text{sin.}\,Ht\,dt]$$
$$= 0.$$

Donc 1.° si on fait

$$M = n\left(Q5 + \frac{4bb'}{H^2-K'^2}A3 - \frac{2bH}{H^2-K'^2}P7\right)$$

$$N = n\left(\frac{2b}{H^2-K'^2}P7 - \frac{4bb'H}{(H^2-K'^2)K'^2}A3 + \frac{2b'}{K'^2}B2\right),$$

& de même

$$M' = n'\left(Q'5 + \frac{4b'b}{H^2-K^2}A'3 + \frac{2b'H}{H^2-K^2}P'7\right)$$

$$N' = n'\left(\frac{2b'}{H^2-K^2}P'7 + \frac{4b'bH}{(H^2-K^2)K^2}A'3 + \frac{2b}{K^2}B'2\right),$$

ensuite

$$P = \frac{M+Nb'}{4b},\quad P' = \frac{M'+N'b}{4b'},$$

& qu'on appelle $m1$, $m2$ les racines de l'équation $(m-k)\times(m-k') - PP' = 0$, ensorte que

$$m1 = \frac{k+k'+\sqrt{((k-k')^2+4PP')}}{2},$$

$$m2 = \frac{k+k'-\sqrt{((k-k')^2+4PP')}}{2},$$

on trouvera (*Art. LXII.* & *LXV.*) que la première valeur approchée de y sera de cette forme

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{(m1-k')F+PF'}{m1-m2}\operatorname{cos.}(h+im1)t \\ & + \frac{(m1-k')G+PG'}{m1-m2}\operatorname{sin.}(h+im1)t \\ & - \frac{(m2-k')F+PF'}{m1-m2}\operatorname{cos.}(h+im2)t \\ & - \frac{(m2-k')G+PG'}{m1-m2}\operatorname{sin.}(h+im2)t. \quad (v) \end{aligned}$$

2.° Si on fait de même

$$Q = \frac{nB5}{4b},\quad Q' = \frac{n'B'5}{4b'},$$

position de l'aphelie de ces deux Planètes, aussi bien que l'inclinaison & le lieu du nœud de leurs orbites, & qui produisent surtout une altération apparente dans leurs moyens mouvemens; inégalités que les observations ont fait connoitre depuis long-tems, mais que personne jusqu'ici n'a encor entrepris de déterminer avec toute l'exactitude qu'on peut exiger dans un sujet si important.

LXXXV. Soit $m1 + m2 = 2\mu h$ & $m1 - m2 = 2\nu h$, ensorte que

$$\mu = \frac{k + k'}{2b}, \ \& \ \nu = \frac{\sqrt{((k-k')^2 + 4PP')}}{2b};$$

supposons de plus

$$F1 = \frac{(k-k')F + 2PF'}{2h\nu}$$

$$G1 = \frac{(k-k')G + 2PG'}{2h\nu},$$

& nous aurons au lieu de l'équation (v) celle-ci

$$\begin{aligned} y = {} & F \text{ cos. } (1 + i\mu)ht \times \text{cos. } i\nu ht \\ & - F1 \text{ sin. } (1 + i\mu)ht \times \text{sin. } i\nu ht \\ & + G \text{ sin. } (1 + i\mu)ht \times \text{cos. } i\nu ht \\ & + G1 \text{ cos. } (1 + i\mu)ht \times \text{sin. } i\nu ht. \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$F = \delta \text{ cos. } \alpha, \ G = \delta \text{ sin. } \alpha,$$

$$F1 = \delta 1 \text{ cos. } \alpha 1, \ G1 = \delta 1 \text{ sin. } \alpha 1,$$

on aura

$$\begin{aligned} y = {} & \delta \text{ cos. } [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \text{cos. } i\nu ht \\ & - \delta 1 \text{ sin. } [(1 + i\mu)kt - \alpha 1] \times \text{sin. } i\nu ht. \end{aligned}$$

Soit encore

$$\alpha 1 = \alpha + \eta, \ \& \ \delta 1 = \beta\delta,$$

on aura $\text{sin. } [(1 + i\mu)kt - \alpha 1] = \text{sin. } [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \text{cos. } \eta - \text{cos. } [(1 + i\mu)kt - \alpha] \times \text{sin. } \eta$; donc

$$\begin{aligned} y = {} & \delta (\text{cos. } i\nu kt + \beta \text{ sin. } \eta \text{ sin. } i\nu ht) \text{ cos. } [(1 + i\mu)kt - \alpha] \\ & - \delta\beta \text{ cos. } \eta \text{ sin. } i\nu ht \text{ sin. } [(1 + i\mu)kt - \alpha]. \end{aligned}$$

Voilà donc les valeurs de y & de z réduites à la même forme que celles de l' Art. LXXI. ; d'où il est aisé de conclure que l' orbite de Jupiter est un ellipse, dans laquelle l' excentricité est $i\Delta$, le lieu de l' aphelie A, la tangente de l' inclinaison à l' ecliptique $i\Lambda$, & le lieu du nœud ascendant E. Il en sera de même de l'orbite de Saturne, en marquant seulement les lettres d'un trait.

LXXXVI. Il faudroit présentement substituer ces valeurs de y & de z dans les équations (q), (r), & (s) de l' Art. LXXX., pour en déduire les expressions des quantités y, z, & x, & par conséquent celles de r, q, & φ (*Art. LXXII.*); mais sans entrer dans ce détail, il suffira de remarquer

1.° Que les quantités μ, ν, ρ, & σ étant de l'ordre de n, comme on le verra ci-après, les variations des quantités Δ, Λ, A, & E seront de l' ordre de i n; d'où il s' ensuit que les expressions de y & de z seront à très-peu près les mêmes (c' est-à-dire aux quantités de l' ordre de i^2 n près), que si ces quantités étoient constantes. De sorte que pour avoir le rayon vecteur de l' orbite, ainsi que la tangente de l' inclinaison, pour un instant quelconque, il n'y aura qu'à calculer l'un & l' autre par les méthodes ordinaires, d'après les élémens $i\Delta$, $i\Lambda$, A, & E regardés comme constans.

2.° Que, si on dénote par $(\frac{dx}{dt})$ la valeur de $\frac{dx}{dt}$, en supposant Δ, Λ, A, & E constantes, on aura (abstraction faite du terme n Z qu'on doit négliger ici)

$$\frac{dx}{dt} = (\frac{dx}{dt}) + f + i(h + if) \times (\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2) = o,$$

parceque, dans l' hypothèse de Δ & Λ constantes, les termes tous constans $f + i(h + if) \times (\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta^2)$ doivent être supposés $=$ o, comme nous l' avons fait

(*Art. LXXXI.*); or dans le cas présent où les quantités Δ & Λ sont en partie constantes, & en partie variables, on fera simplement $f + i[h + if] \times [\frac{5}{4}\delta^2(1+\beta^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(1+\gamma^2)] = 0$, & on conservera dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$ les termes variables qui entrent dans Δ^2 & de Λ^2, savoir $\delta^2(\frac{1-\beta^2}{2}\cos. 2i\nu ht + \beta \sin. \eta \sin. 2i\nu ht)$, & $\lambda^2(\frac{1-\gamma^2}{2}\cos. 2i\sigma ht + \gamma \sin. \omega \sin. 2i\sigma ht)$; de sorte que l'on aura, en négligeant les quantités de l'ordre de i^3,

$$f = -\frac{ib}{4}[5\delta^2(1+\beta^2) + \lambda^2(1+\gamma^2)],$$

& ensuite

$$\frac{dx}{dt} = (\frac{dx}{dt}) + \frac{5ib}{2}\delta^2(\frac{1-\beta^2}{2}\cos. 2i\nu ht + \beta \sin. \eta \sin. 2i\nu ht)$$
$$+ \frac{ib}{2}\lambda^2(\frac{1-\gamma^2}{2}\cos. 2i\sigma ht + \gamma \sin. \omega \sin. 2i\sigma ht).$$

Pour intégrer cette équation, soit (x) la valeur de x, dans la supposition de Δ, Λ, A, & E constantes, & dénotons par $d(x)$ la différentielle de (x) en faisant ces quantités seules variables, il est clair que la valeur complète de $\frac{d(x)}{dt}$ sera $(\frac{dx}{dt}) + \frac{d(x)}{dt}$; de manière qu'on aura, en intégrant, $(x) = \int(\frac{dx}{dt})dt + \int d(x)$, & par conséquent $\int(\frac{dx}{dt})dt = (x) - \int d(x)$. Mais comme les différences des quantités Δ, Λ, A, & E, sont de l'ordre de in, la quantité $\int d(x)$ sera aussi du même ordre, & par conséquent elle pourra être négligée, du moins dans

la recherche présente ; on aura donc simplement $\int (\frac{dx}{dt}) dt = (x)$; donc

$$x = (x) + \frac{5\delta^2}{4\nu} [\frac{1-\beta^2}{2} \text{fin. } 2i\nu ht - \beta \text{ fin. } \eta (\text{cof. } 2i\nu ht - 1)]$$
$$+ \frac{\lambda^2}{4\sigma} [\frac{1-\gamma^2}{2} \text{fin. } 2i\sigma ht - \gamma \text{ fin. } \omega (\text{cof. } 2i\sigma ht - 1)],$$

& par conféquent

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4\nu} [\frac{1-\beta^2}{2} \text{fin. } 2i\nu ht - \beta \text{ fin. } \eta (\text{cof. } 2i\nu ht - 1)] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma} [\frac{1-\gamma^2}{2} \text{fin. } 2i\sigma ht - \gamma \text{ fin. } \omega (\text{cof. } 2i\sigma ht - 1)],$$

où l'on remarquera que ht eft l'angle du mouvement moyen, & $i(x)$ l'équation du centre calculée à l'ordinaire, & combinée avec la réduction à l'écliptique.

Or comme les coéficiens $i\nu$ & $i\sigma$ font extrémement petits, il eft vifible que, tant que l'angle ht ne fera pas fort grand, on aura à très-peu près fin. $2i\nu ht = 2i\nu ht$, cof. $2i\nu ht = 1$, & fin. $2i\sigma ht = 2i\sigma ht$, cof. $2i\sigma ht = 1$, & par conféquent

$$\varphi = [1 + \frac{5}{4} i^2\delta^2 (1 - \beta^2) + \frac{1}{4} i^2\lambda^2 (1 - \gamma^2)]\, ht + i(x);$$

de forte que le mouvement moyen fera augmenté en raifon de $1 + \frac{5}{4} i^2\delta^2 (1 - \beta^2) + \frac{1}{4} i^2\lambda^2 (1 - \gamma^2)$ à 1.

Si donc on veut que le terme ht repréfente le moyen mouvement *apparent* de la Planète, c'eft-à-dire celui qui réfulte des obfervations de fa révolution, il faudra faire fimplement $f = -\frac{ib}{2}(5\delta^2 + \lambda^2)$; & l'on aura pour lors

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{5ib}{2}\delta^2 \left[\frac{1-\beta^2}{2} (\text{cof. } 2i\nu ht - 1) + \beta \text{ fin. } \eta \text{ fin. } 2i\nu ht \right] + \frac{ib}{2}\lambda^2 \left[\frac{1-\gamma^2}{2} (\text{cof. } 2i\sigma ht - 1) + \gamma \text{ fin. } \omega \text{ fin. } 2i\sigma ht \right],$$

d' où l' on trouvera

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4\nu} \left[\frac{1+\beta^2}{2} (\text{fin. } 2i\nu ht - 2i\nu ht) - \beta \text{ fin. } \eta (\text{cof. } 2i\nu ht - 1) \right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma} \left[\left(\frac{1-\gamma^2}{2} \text{ fin. } 2i\sigma ht - 2i\sigma ht \right) - \gamma \text{ fin. } \omega (\text{cof. } 2i\sigma ht - 1) \right].$$

Ainſi, tant que les angles $2i\nu ht$ & $2i\sigma ht$ ſeront fort petits, ce qui aura lieu pendant un certain nombre de révolutions, on aura à très-peu près $\varphi = ht + i(x)$; c'eſt-à-dire que la longitude de la Planète ſera auſſi la même que celle qu'on trouveroit par les méthodes ordinaires d' après les élémens $i\Delta$, $i\Lambda$, A, & E ſuppoſés conſtans.

LXXXVII. Pour faire maintenant uſage de nos formules, on remarquera

1.° Que $\text{n} = \frac{\text{m}'}{1+i\text{m}} b$ (*Art. LXXVI.*) $= \text{m}'h^2$ à très-peu près, enſorte que $i\text{n} = i\text{m}'h^2 = \frac{J'}{I}h^2$, & $i\text{n}' = \frac{J}{I}h'^2$.

2.° Que l'on aura par l'Art. LXXIX. $A = h^2(\alpha^2 - \Delta^2)$ & $B = -h^2\Lambda^2$, c'eſt-à-dire, en ne prenant, comme on le doit, que les termes conſtans des valeurs de Δ^2 & de Λ^2, $A = h^2[\alpha^2 - \frac{1}{2}\delta^2(1+\beta^2)]$ & $B = -\frac{1}{2}h^2\lambda^2(1+\gamma^2)$; ce qui donnera, à cauſe de $\alpha = 0$, & de $\text{f} = -\frac{ib}{4}$

$\times [5\delta^2$

$\times [5\,\delta^2 (1+\beta^2) + \lambda^2 (1+\gamma^2)]$, $k = \frac{n}{2b}(P4 + 2A2)$ & $l = \frac{n}{2b} A\,4$; de forte qu'on aura

$$ik = \frac{J'}{2I} h (P\,4 + 2\,A\,2),\ il = \frac{J'}{2I} h A\,4$$

& de même

$$ik' = \frac{J}{2I} h' (P'\,4 + 2\,A'\,2),\ il' = \frac{J}{2I} h' A'\,4.$$

Si on vouloit employer l' autre valeur de f, favoir $-\frac{ib}{2}(5\,\delta^2 + \lambda^2)$, il faudroit alors mettre dans les valeurs de A & de B, δ^2 au lieu de Δ^2, & λ^2 au lieu de Λ^2, & l'on trouveroit les mêmes expreffions de k & de l que ci-devant.

3.° Que $\frac{I+J}{a^3} = b = h^2 + ig$ (*Art. LXXVI.*) $= h^2$ à très-peu près, parceque g eft déja une quantité très-petite (*Art. LXXIX.*). Donc on aura auffi $\frac{I+J'}{a'^3} = h'^2$, & par conféquent $\frac{I+J'}{I+J} \times \frac{a^3}{a'^3} = \frac{h'^2}{h^2}$, ou bien, à caufe que les maffes J & J' de Jupiter & de Saturne font très-petites par rapport à celle du Soleil I, $\frac{a^3}{a'^3} = \frac{h'^2}{h^2}$, de forte qu'on aura $\frac{a}{a'} = (\frac{h'}{h})^{\frac{2}{3}}$.

Cela pofé, on commencera par déterminer, fuivant la méthode de l' Art. LXXIII. les coéficiens A, B, C &c., & P, Q, R &c.; après quoi on cherchera les valeurs des quantités A 2, A 3, A 4, B 2, B 5, P 4, P 7, & Q 5, ainfi que celles de A' 2, A' 3, A' 4 &c. qui entrent dans les expreffions de k, l, P, Q, & de k', l',

P', Q'. Or en faisant $s = \frac{3}{2}$, & $\frac{a}{a'} = \mathrm{a}$ (je mets ici a au lieu de α, parceque j'aurai occasion dans la suite de faire servir cette dernière lettre à un autre usage) on aura par l'Art. cité $(1 - 2\,\mathrm{a} \operatorname{cos.} \theta + \mathrm{a}^2)^{-\frac{3}{2}} = \mathrm{A} + \mathrm{B} \operatorname{cos.} \theta + \mathrm{C} \operatorname{cos.} 2\,\theta + \&c.$; donc, ayant supposé (*Art. LXXIV.*) $(a^2 - 2\,a\,a' \operatorname{cos.} \theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = \mathrm{A}\,1 + \mathrm{B}\,1 \operatorname{cos.} \theta + \mathrm{C}\,1 \operatorname{cos.} 2\,\theta + \&c.$, on aura $\mathrm{A}\,1 = \frac{\mathrm{A}}{a'^3}$, $\mathrm{B}\,1 = \frac{\mathrm{B}}{a'^3}$, $\mathrm{C}\,1 = \frac{\mathrm{C}}{a'^3}$ &c. On trouvera de même $\mathrm{P}\,1 = \frac{\mathrm{P}}{a'^5}$, $\mathrm{Q}\,1 = \frac{\mathrm{Q}}{a'^5}$, $\mathrm{R}\,1 = \frac{\mathrm{R}}{a'^5}$ &c., & l'on remarquera que les quantités $\mathrm{A}\,1$, $\mathrm{B}\,1$, $\mathrm{C}\,1$ &c., $\mathrm{P}\,1$, $\mathrm{Q}\,1$, $\mathrm{R}\,1$ &c. restent nécessairement les mêmes, en changeant a en a' & a' en a, de sorte qu'on aura aussi $\mathrm{A}'\,1 = \frac{\mathrm{A}}{a'^3}$, $\mathrm{B}'\,1 = \frac{\mathrm{B}}{a'^3}$ &c., $\mathrm{P}'\,1 = \frac{\mathrm{P}}{a'^5}$, $\mathrm{Q}'\,1 = \frac{\mathrm{Q}}{a'^5}$ &c. Faisant donc ces substitutions dans les formules de l'Art. LXXV., & mettant par tout a au lieu de $\frac{a}{a'}$, on trouvera d'abord

$$\mathrm{A}\,2 = \mathrm{a}^3 \mathrm{A} - \mathrm{a}^2 \frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$\mathrm{A}\,3 = \mathrm{a}^2 \frac{2\mathrm{A} - \mathrm{C}}{2} - \mathrm{a}^3$$

$$\mathrm{A}\,4 = \mathrm{a}^3 \mathrm{A} - \mathrm{A}\,2 = \mathrm{a}^2 \frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$\mathrm{B}\,2 = \mathrm{a}^3 \mathrm{B} - \mathrm{a}^2 \frac{2\mathrm{A} + \mathrm{C}}{2} + \mathrm{a}^3$$

$$\mathrm{B}\,5 = - \mathrm{a}^2 \mathrm{B},$$

ensuite on aura (*Art. LXXIV.*)

$$\mathrm{P}\,2 = \frac{3}{a'^3} \left(\mathrm{a} \frac{\mathrm{Q}}{2} - \mathrm{a}^2 \mathrm{P}\right)$$

$$\mathrm{Q}\,2 = \frac{3}{a'^3} \left(\mathrm{a} \frac{2\mathrm{P} + \mathrm{R}}{2} - \mathrm{a}^2 \mathrm{Q}\right)$$

$$R_2 = \frac{3}{a'^2}\left(a\,\frac{Q+S}{2} - a^2 R\right)$$

&c.

$$P_3 = \frac{3}{a'^2}\left(a\,\frac{Q}{2} - P\right)$$

$$Q_3 = \frac{3}{a'^2}\left(a\,\frac{2P+R}{2} - Q\right)$$

$$R_3 = \frac{3}{a'^2}\left(a\,\frac{Q+S}{2} - R\right)$$

&c.

ou bien, en faiſant pour plus de ſimplicité

$$p = 3\left(a\,\frac{Q}{2} - a^2 P\right)$$

$$q = 3\left(a\,\frac{2P+R}{2} - a^2 Q\right)$$

$$r = 3\left(a\,\frac{Q+S}{2} - a^2 R\right)$$

&c.

$$p_1 = 3\left(a\,\frac{Q}{2} - P\right)$$

$$q_1 = 3\left(a\,\frac{2P+R}{2} - Q\right)$$

$$r_1 = 3\left(a\,\frac{Q+S}{2} - R\right)$$

&c.

on aura

$$P_2 = \frac{p}{a'^2},\ Q_2 = \frac{q}{a'^2},\ R_2 = \frac{r}{a'^2}\ \&c.$$

$$P_3 = \frac{p_1}{a'^2},\ Q_3 = \frac{q_1}{a'^2},\ R_3 = \frac{r_1}{a'^2}\ \&c.$$

De là on trouvera, par les formules de l'Art. LXXV.,

$$P_4 = a^3 (A + p) - a^2\,\frac{q}{2},$$

$$P\,7 = a^2\left(\frac{2A-C}{2} + \frac{2p\,1 - r\,1}{2}\right) + 2\,a^2, \&c.$$

$$Q\,5 = a^3 q\,1 - a^2\left(\frac{2A+C}{2} + \frac{2p\,1+r\,1}{2}\right) - 2\,a^2.$$

On trouvera de même les autres quantités $A'2$, $B'3$ &c.; il n'y aura pour cela qu'à mettre dans les formules des Art. cités, a' au lieu de a & a au lieu de a', & marquer ensuite toutes les autres lettres d'un trait; ce qui donnera, apres les substitutions,

$$A'2 = A - a\frac{B}{2}$$

$$A'3 = a\frac{2A-C}{2} - \frac{1}{a^2}$$

$$A'4 = A - A'2 = a\frac{B}{2}$$

$$B'2 = B - a\frac{2A+C}{2} + \frac{1}{a^2}$$

$$B'5 = -aB,$$

& ensuite

$$P'2 = \frac{p1}{a'^3},\ Q'2 = \frac{q1}{a'^3},\ R'2 = \frac{r1}{a'^3}\ \&c.$$

$$P'3 = \frac{p}{a'^3},\ Q'3 = \frac{q}{a'^3},\ R'3 = \frac{r}{a'^3}\ \&c.$$

d'où

$$P'4 = A + p\,1 - a\frac{q1}{2}$$

$$P'7 = a\left(\frac{2A-C}{2} + \frac{2p-r}{2}\right) + \frac{2}{a^2}$$

$$Q'5 = q - a\left(\frac{2A+C}{2} + \frac{2p+r}{2}\right) - \frac{2}{a^2}.$$

Enfin on trouvera par l'Art. LXXXIV., en mettant à la place de H, $h - h'$, à la place de K & de K' leurs valeurs approchées h & h', & la place de in & de in', $\frac{J'}{I}h^2$ & $\frac{J}{I}h'^2$,

$$iP = \frac{J'}{4I} h (Q5 - 4A3 - 2P7 + 2B2)$$

$$iP' = \frac{J}{4I} h' (Q'5 - 4A'3 - 2P'7 + 2B'2)$$

$$iQ = \frac{J'}{4I} h B5 \quad \& \quad iQ' = \frac{J}{4I} h' B'5.$$

Par ces valeurs de iP, iP', iQ, iQ', & par les valeurs de ik, ik', il, il' trouvées ci-dessus, on trouvera les valeurs de $i\mu$, $i\nu$, $i\rho$, $i\sigma$ (*Art. LXXXV.*) & ces mêmes valeurs étant ensuite multipliées par $\frac{b}{b'}$, on aura celles de $i\mu'$, $i\nu'$, $i\rho'$, $i\sigma'$.

Maintenant on aura par le même Art.

$$\text{tang.}\ \alpha 1 = \frac{G1}{F1} = \frac{(k-k)G + 2PG'}{(k-k')F + 2PF'}$$

$$= \frac{(k-k')\delta\ \text{sin.}\ \alpha + 2P\delta'\ \text{sin.}\ \alpha'}{(k-k')\delta\ \text{cos.}\ \alpha + 2P\delta'\ \text{cos.}\ \alpha'} \quad \&$$

$\delta 1 = \sqrt{[(F1)^2 + (G1)^2]} = \sqrt{[(k-k')^2\delta^2 + 4(k-k')}$. $P\delta\delta'(\text{sin.}\ \alpha \times \text{sin.}\ \alpha' + \text{cos.}\ \alpha \times \text{cos.}\ \alpha') + 4P^2\delta'^2] : 2h\nu$.

Soit $\alpha' - \alpha = A$, c'est-à-dire $\alpha' = \alpha + A$, & l'on aura

$$\text{tang.}\ \alpha 1 = \frac{((k-k')\delta + 2P\delta'\ \text{cos.}\ A)\ \text{sin.}\ \alpha + 2P\delta'\ \text{sin.}\ A \cdot \text{cos.}\ \alpha}{((k-k')\delta + 2P\delta'\ \text{cos.}\ A)\ \text{cos.}\ \alpha - 2P\delta'\ \text{sin.}\ A \cdot \text{sin.}\ \alpha}$$

$$\delta 1 = \frac{\sqrt{((k-k')^2\delta^2 + 4(k-k')P\delta\delta'\ \text{cos.}\ A + 4P^2\delta'^2)}}{2h\nu};$$

Donc si on fait

$$(k-k')\delta + 2P\delta'\ \text{cos.}\ A = \delta s\ \text{cos.}\ u$$

$$\& \quad 2P\delta'\ \text{sin.}\ A = \delta s\ \text{sin.}\ u$$

on aura

$$1.^\circ\ \text{tang.}\ \alpha 1 = \frac{\text{cos.}\ u \cdot \text{sin.}\ \alpha + \text{sin.}\ u \cdot \text{cos.}\ \alpha}{\text{cos.}\ u \cdot \text{cos.}\ \alpha - \text{sin.}\ u \cdot \text{sin.}\ \alpha} = \frac{\text{sin.}\ (u+\alpha)}{\text{cos.}\ (u+\alpha)}$$

$= \text{tang.}\ (u + \alpha)$; donc $\alpha 1 = u + \alpha$, & par conséquent $\eta = u$.

2.° $\delta s = \surd\, [((k - k')\delta + 2P\delta' \text{ cof. } A)^2 + (2P\delta' \text{ fin. } A)^2] = 2h\nu\delta\, 1 = 2h\nu\beta\delta$; donc $\beta = \frac{s}{2h\nu}$.

Donc, fi on fait pour plus de fimplicité $\frac{\delta'}{\delta} = \text{b}$, on aura

$$\beta = \frac{\surd\,((k - k' + 2P\text{b cof. } A)^2 + (2P\text{b fin. } A)^2)}{2h\nu},$$

$$\text{fin. } \eta = \frac{P\text{b fin. } A}{h\nu\beta}, \quad \text{cof. } \eta = \frac{k - k' + 2P\text{b cof. } A}{2h\nu\beta}.$$

Et pour avoir les valeurs de β', fin. η', & cof. η', il n'y aura qu'à mettre k' au lieu de k, α' au lieu de α, δ' au lieu de δ, *& viceverfa*, & marquer enfuite toutes les autres lettres d'un trait; ce qui donnera, à caufe de $\text{b} = \frac{\delta'}{\delta}$ & $A = \alpha' - \alpha$,

$$\beta' = \frac{\surd\,[(k' - k + \frac{2P'}{\text{b}} \text{ cof. } A)^2 + (\frac{2P'}{\text{b}} \text{ fin. } A)^2]}{2h'\nu'},$$

$$\text{fin. } \eta' = -\frac{P' \text{ fin. } A}{\text{b}h'\nu'\beta'}, \quad \text{cof. } \eta' = \frac{k' - k + \frac{2P'}{\text{b}} \text{ cof. } A}{2h'\nu'\beta'}.$$

Si on fait de même $\varepsilon' - \varepsilon = E$, & $\frac{\lambda'}{\lambda} = \text{c}$, on trouvera par des procédés femblables

$$\gamma = \frac{\surd\,((l - l' + 2Q\text{c cof. } E)^2 + (2Q\text{c fin. } E)^2)}{2h\sigma},$$

$$\text{fin. } \omega = \frac{Q\text{c fin. } E}{h\sigma\gamma}, \quad \text{cof. } \omega = \frac{l - l' + 2Q\text{c cof. } E}{2h\sigma\gamma};$$

& enfuite

$$\gamma' = \frac{\surd\,[(l' - l + \frac{2Q'}{\text{c}} \text{ cof. } E)^2 + (\frac{2Q'}{\text{c}} \text{ fin. } E)^2]}{2h'\sigma'},$$

$$\sin. \omega' = -\frac{Q' \sin. E}{c h' \sigma' \gamma'}, \quad \cos. \omega' = \frac{l' - l + \frac{2Q'}{c} \cos. E}{2 h' \sigma' \gamma'}.$$

LXXXVIII. Pour déterminer maintenant les conftantes δ, λ, α, ε, & δ', λ', α', ε', on remarquera qu'en fuppofant $t = 0$, on a $\Delta = \delta$, $\Lambda = \lambda$, $A = \alpha$, $E = \varepsilon$, & par conféquent auffi $\Delta' = \delta'$, $\Lambda' = \lambda'$, $A' = \alpha'$, & $E' = \varepsilon'$. On cherchera donc les élémens de la théorie de Jupiter & de Saturne pour une certaine époque, par exemple pour le commencement de l'année 1750., & l'on fera

$i\delta$ = à l'excentricité de Jupiter,

$i\lambda$ = à la tangente de l'inclinaifon de fon orbite par rapport à l'écliptique,

α = à la longitude de l'aphelie,

ε = à la longitude du nœud afcendant,

& de même

$i\delta'$ = à l'excentricité de Saturne,

$i\lambda'$ = à la tangente de fon inclinaifon à l'écliptique,

α' = à la longitude de l'aphelie,

ε' = à la longitude du nœud.

A l'égard des conftantes h & h', on les déterminera à l'aide des mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne : car on aura

$$\frac{h}{h'} = \frac{\text{mouv. moy. Jup.}}{\text{mouv. moy. Sat.}}.$$

LXXXIX. Voila toutes les quantités qu'il eft néceffaire de connoitre pour déterminer les perturbations de Jupiter & de Saturne, en vertu de leur action réciproque. Nous allons remettre ici fous les yeux du Lecteur les principales altérations du mouvement de ces deux Planètes.

Soient T & T' les moyens mouvemens de Jupiter & de Saturne comptés depuis l'époque, pour laquelle on a déterminé les élémens de ces deux Planètes, & on trouvera

1.° Qu'au bout du tems, qui répond au mouvement

moyen T, l' excentricité de Jupiter ſe trouvera augmentée en raiſon de

$$\sqrt{\left[\frac{1+\beta^2}{2}+\frac{1-\beta^2}{2}\text{coſ. } 2i\nu T+\beta \text{ ſin. } \eta \times \text{ſin. } 2i\nu T\right]} \text{ à } 1.$$

2.° Que la tangente de l' inclinaiſon de l' orbite ſera pareillement augmentée en raiſon de

$$\sqrt{\left[\frac{1+\gamma^2}{2}+\frac{1-\gamma^2}{2}\text{coſ. } 2i\sigma T+\gamma \text{ ſin. } \omega \times \text{ſin. } 2i\sigma T\right]} \text{ à } 1.$$

3.° Que le lieu de l' aphelie ſe trouvera moins avancé d' un arc égal à

$$i\mu T + \text{arc. cot. } \left(\frac{\text{cot. } i\nu T}{\beta \text{ coſ. } \eta} + \text{tang. } \eta\right).$$

4.° Que le lieu du nœud ſera auſſi moins avancé d'un arc égal à

$$i\rho T + \text{arc. cot. } \left(\frac{\text{cot. } i\sigma T}{\gamma \text{ coſ. } \omega} + \text{tang. } \omega\right).$$

5.° Que le mouvement de Jupiter par rapport à l'écliptique ſera altéré d' une quantité égale à

$$\frac{5i\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2}(\text{ſin. } 2i\nu T - 2i\nu T) - \beta \text{ ſin. } \eta \,(\text{coſ. } 2i\nu T - 1)\right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2}(\text{ſin. } 2i\sigma T - 2i\sigma T) - \gamma \text{ coſ. } \omega \,(\text{coſ. } 2i\sigma T - 1)\right];$$

c' eſt - à - dire qu'il faudra ajouter à ſa longitude un angle égal à cette quantité.

On en dira autant de Saturne, avec cette ſeule différence qu'il faudra marquer les lettres d' un trait.

XC. Nous verrons plus bas dans l'Art. ſuiv. que les coéficiens $i\nu$ & $i\sigma$ ſont $=$ environ $\frac{1}{10000}$; de ſorte que durant pluſieurs revolutions les angles $2i\nu T$ & $2i\sigma T$ ſeront aſſès petits pour qu'on puiſſe ſuppoſer, ſans erreur ſenſible, ſin. $2i\nu T = 2i\nu T$, ſin. $2i\sigma T = 2i\sigma T$, & coſ. $2i\nu T = 1$, coſ. $2i\sigma T = 1$. Donç

1.° L'aug

1.° L' augmentation de l' excentricité de Jupiter sera à très-peu près dans la raison de $1 + i\nu\beta$ sin. $\eta \times T$ à 1 ; c' est-à-dire de $1 + \frac{iP}{b}$ b sin. $A \times T$ à 1 ; de sorte que la valeur de $i\delta$ croitra de la quantité $i\delta' \times \frac{iP}{b}$ sin. $A \times T$. Or on sait que dans les ellipses qui sont peu excentriques, la plus grande équation est à très-peu près égale au double de l' excentricité ; d'où il s'ensuit que la plus grande équation de Jupiter ira en augmentant, & que sa variation sera, au bout de n revolutions à compter depuis l'époque donnée de,

$$2\, i\delta' \times \frac{iP}{b} \text{ sin. } A \times 360^\circ n.$$

2.° La tangente de l'inclinaison de Jupiter à l'écliptique croitra de même d'une quantité égale à $i\lambda' \times \frac{iQ}{b}$ sin. $E \times T$, & comme cette tangente est fort petite, ainsi qu'on le verra plus bas, on aura pour la variation de l' inclinaison de Jupiter à l' écliptique pendant n revolutions

$$i\lambda' \times \frac{iQ}{b} \text{ sin. } E \times 360^\circ n.$$

3.° Le mouvement de l'aphelie sera représenté à très-peu près par $-\left(i\mu + \frac{i\nu\beta \text{ cos. } \eta}{1 + i\nu\beta \text{ sin. } \eta \cdot T}\right) T$, ou encore par $-(i\mu + i\nu\beta \text{ cos. } \eta)\, T + i^2\nu^2\beta^2 \text{ cos. } \eta \times \text{sin. } \eta \times T^2$, c' est-à-dire par $-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b} \text{ b cos. } A\right) T + \frac{iP}{b} \text{ b sin. } A \left(\frac{ik - ik'}{2b} + \frac{iP}{b} \text{ b cos. } A\right) T^2$; où l'on voit que le terme $-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b} \text{ b cos. } A\right) T$ exprime le mouvement moyen & uniforme de l' aphelie, & que le terme $\frac{iP}{b}$ b sin. A $\left(\frac{ik - ik'}{2b} +\right.$

$\frac{iP}{b}$ b cos. A) T^2 donne une inégalité du mouvement de l'aphelie, laquelle augmente comme les quarrés des tems.

Ainsi le mouvement moyen de l'aphelie de Jupiter sera pour n revolutions de cette Planète de

$$-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b}\,\text{b cos.}\,A\right) 360^\circ n,$$

& l'inégalité croissante du mouvement de cet aphelie sera de

$$\frac{iP}{b}\,\text{b sin.}\,A\left(\frac{ik - ik'}{2b} + \frac{iP}{b}\,\text{b cos.}\,A\right)\frac{360^\circ}{57^\circ\,17'\,44''} \times 360^\circ n^2.$$

4.° Le mouvement des nœuds de Jupiter sera composé de même de deux parties, dont l'une croitra uniformément, & donnera le mouvement moyen du nœud de

$$-\left(\frac{il}{b} + \frac{iQ}{b}\,\text{c cos.}\,E\right) 360^\circ n,$$

& dont l'autre suivra la loi du quarré du tems, & donnera une inégalité croissante de

$$\frac{iQ}{b}\,\text{c sin.}\,E\left(\frac{il - il'}{2b} + \frac{iQ}{b}\,\text{c cos.}\,E\right)\frac{360^\circ}{57^\circ\,17'\,44''} \times 360^\circ n^2.$$

5.° Le mouvement de Jupiter en longitude sera sujet à une altération de $\left(\frac{5 i^2 \delta^2 \nu}{2}\,\beta\,\text{sin.}\,\eta + \frac{i^2 \lambda^2 \nu}{2}\,\gamma\,\text{sin.}\,\omega\right) T^2$ à très-peu près, c'est-à-dire de $\left(\frac{5}{2}\,i\delta \times i\delta' \times \frac{iP}{b}\,\text{sin.}\,A + \frac{1}{2}\,i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ}{b}\right.$ $\left.\text{sin.}\,E\right) T^2$; ce qui donne, comme l'on voit, dans le mouvement de cette Planète une inégalité croissante comme les quarrés des tems, & qui sera au bout de n revolutions de

$$\left(\frac{5}{2}\,i\delta \times i\delta' \times \frac{iP}{b}\,\text{sin.}\,A + \frac{1}{2}\,i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ}{b}\,\text{sin.}\,E\right)\frac{360^\circ}{57^\circ\,17'\,44''} \times 360^\circ n^2.$$

On trouvera de la même manière

1.° Que, pendant n révolutions de Saturne à compter depuis la même époque, la plus grande équation de cette Planète variera de

$$-2\, i\delta \times \frac{iP'}{b'} \text{ ſin. } A \times 360^\circ n.$$

2.° Que l' inclinaiſon de ſon orbite à l' écliptique variera dans le même tems de

$$-\, i\lambda \times \frac{iQ'}{b'} \text{ ſin. } E \times 360^\circ n.$$

3.° Que le mouvement moyen & uniforme de l'aphelie de Saturne ſera exprimé par

$$-\left(\frac{ik'}{b'} + \frac{iP'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{b}} \text{ coſ. } A\right) 360^\circ n,$$

& que de plus le mouvement de cet aphelie ſera ſujet à une inégalité croiſſante comme les quarrés des tems, laquelle ſera pour n révolutions de

$$-\frac{iP'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{b}} \text{ ſin. } A \left(\frac{ik'-ik}{2b'} + \frac{iP'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{b}} \text{ coſ.} A\right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

4.° Que le mouvement moyen des nœuds de Saturne ſera de

$$-\left(\frac{il'}{b'} + \frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{c}} \text{ coſ. } E\right) 360^\circ n,$$

& qu' il y aura auſſi, dans le mouvement des nœuds de cette Planète, une inégalité de la même eſpèce, laquelle ſera repréſentée par

$$-\frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{c}} \text{ ſin. } E \left(\frac{il'-il}{2b'} + \frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{c}} \text{ coſ.} E\right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

5.° Qu'enfin le mouvement de Saturne en longitude ſera ſujet à une inégalité croiſſante comme les quarrés des tems, & dont la valeur ſera, au bout de n révolutions, de

$$-\left(\frac{5}{2}\, i\delta \times i\delta' \times \frac{iP'}{b'} \text{ ſin.} A + \frac{1}{2}\, i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ'}{b'} \text{ ſin.} E\right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

Au reſte il faut ſe reſſouvenir que ces propoſitions ceſſent d' être exactes, lorſqu'après un grand nombre des révolutions, les angles $2\, i\nu T$, $2\, i\sigma T$, & $2\, i\nu' T'$, $2\, i\sigma' T'$ commencent à devenir conſidérables.

XCI. Suivant les tables de M. Halley, le mouvement moyen de Jupiter en 100. années Juliennes eſt 8. rev.

$\frac{ik}{b} = -0,000078292$ $\frac{ik'}{b'} = -0,000406604$

$\frac{il}{b} = 0,000078293$ $\frac{il'}{b'} = 0,000406606$

$\frac{iP}{b} = 0,000051192$ $\frac{iP'}{b'} = 0,000265701$

$\frac{iQ}{b} = -0,000078293$ $\frac{iQ'}{b'} = -0,000406606$

& l' on trouvera

$i\mu = -0,000120981$ $i\mu' = -0,000300553$

$i\nu = 0,000085425$ $i\nu' = 0,000212221$

$i\rho = 0,000120981$ $i\rho' = 0,000300553$

$i\sigma = 0,000120981$ $i\sigma' = 0,000300553$

Or selon M. Halley on a pour l'année 1750

$$i\delta = \frac{25078}{520098} = 0,048218$$

$$i\delta' = \frac{54381}{954007} = 0,057003$$

$$i\lambda = \text{tang. } 1° \; 19' \; 10'' = 0,023032$$

$$i\lambda' = \text{tang. } 2° \; 30' \; 10'' = 0,043710$$

$\alpha = 6^s \; 10° \; 33' \; 46''$, $\quad \varepsilon = 3^s \; 8° \; 15' \; 49''$

$\alpha' = 8^s \; 29° \; 39' \; 58''$, $\quad \varepsilon' = 3^s \; 21° \; 20' \; 5''$

d'où l'on tire

$b = 1,182190$, $\quad A = 79° \; 6' \; 12''$,

$c = 1,897725$, $\quad E = 13° \; 4' \; 16''$.

Si donc on substitue ces valeurs numériques dans les formules de l'Art. préc. on formera la Table suivante, dans laquelle n est le nombre des révolutions que Jupiter ou Saturne a achevées depuis le commencement de l'année 1750. que nous avons prise pour époque; de sorte qu'il faudra faire n positif pour les tems qui suivent cette époque, & négatif pour ceux qui la précédent.

ADDITION

Pour les Articles LXXVIII. & LXXIX.

Nous avons dit dans le premier de ces deux Articles que la quantité $\int \Psi\, dz$ contient un terme, qui par l'intégration se trouve divisé par des quantités de l'ordre de i; & nous avons, en conséquence, conservé les termes où cette quantité se trouvoit multipliée par i^2n, en rejettant toutes fois ceux, où la même quautité auroit été multipliée par i^3n. Mais il est facile de se convaincre par la substitution des valeurs de z, & de z' (*Art. LXXXIV.*), que le diviseur du terme dont il s'agit sera réellement de l'ordre de in; de sorte que, si on veut avoir égard dans les valeurs de y & de z aux quantités de l'ordre de i^2, il n'est pas permis de négliger les termes de l'ordre de i^3n, où se trouve la quantité $\int \Psi dz$; car l'intégration réduira à l'ordre de i^2 les coéficiens de ces termes. Il en sera de même de quelque termes de l'ordre de i qui se trouveront dans la quantité $n\int \Phi\, dy$.

Ainsi on trouve qu'il faut ajouter à la valeur de $\int \frac{dz^2}{dt^2}\, dy$ le terme $-2in\int dy \int \Psi\, dz$, & par conséquent à la valeur de $\int z^2 dy$ le terme $-\frac{4in}{3b^2}\int dy \int \Psi dz$; d'où il s'ensuit que le premier membre de l'équation (o) doit être augmenté du terme $4 i^2 n \int dy \int \Psi\, dz$, & que le premier membre de l'équation (p) doit étre augmenté du terme $-8 i^2 n \int dy \int \Psi\, dz$.

De là on trouvera, après avoir achevé toutes les opérations, qu'il faudra ajouter (*Art. LXXIX.*) à la valeur de Y les termes

$$8 i^3 (\beta - 2\gamma) \int dy \int \Psi\, dz + 12 i^2 \delta y \int \Phi\, dy$$
$$+ 4 i^3 (\varepsilon - \eta h^2) y \int \Psi\, dz,$$

EXTRAIT DE DIFFÉRENTES LETTRES

DE M. D'ALEMBERT A M. DE LA GRANGE

écrites pendant les années 1764. & 1765.

I.

Votre problème sur l'intégration de l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} \ldots + \frac{Md^my}{dx^m} = X$, lorsque l'on a $m-1$ valeurs de x dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} + \ldots \frac{Md^my}{dx^m} = 0$, m'a paru si beau, que j'en ai cherché une solution que voici.

Soit $y = Vz$, V étant une indéterminée, & z une des valeurs de y qui satisfait à l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \ldots$ &c. $= 0$, & soit substituée cette valeur dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} +$ &c. $\ldots = X$; la transformée sera composée 1.° d'une partie $V\left(Pz + \frac{Qdz}{dx} \ldots + \frac{Md^mz}{dx^m}\right)$, où X ne se trouvera point, laquelle sera évidemment $= 0$, à cause de $Pz + \frac{Qdz}{dx} + \ldots \frac{Md^mz}{dx^m} = 0$ (*hyp.*) 2.° d'une partie où V ne se trouvera point, & qui ne contenant que dV avec ses différences jusqu'à d^mV inclusivement, pourra par conséquence être abaissée au $(m-1)^e$ dégré, en faisant $dV = V'dx$; or puisqu'on a $m-1$ valeurs de y, que $y = Vz$, & que z est déja une des valeurs de y, on aura donc $m-2$ valeurs de V, en n'y comprenant pas l'unité; donc supposant que z' soit une de ces valeurs, & faisant $V' = z'\int V''dx$, com-

bitraires, μ un nombre quelconque entier, π le rapport de la circonférence au diamètre, & θ un nombre tel, que la tangente de $\theta\pi = h$. J'ai trouvé, par une méthode assez simple, le moyen d'arriver à cette élégante formule, & même à une plus générale. Voici d'abord comment j'arrive à votre formule.

Je considère en premier lieu que $(1 + h\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$, A & B étant les *cosinus* & *sinus* de m fois l'angle dont la tangente est h; c'est ce que j'ai démontré le premier dans les Mém. de Berlin 1746. & ailleurs; donc si $(1 + h\sqrt{-1})^m - (1 - h\sqrt{-1})^m = 0$, on aura $B = 0$, donc B est le *sinus* de $\mu\pi$, π étant la demi-circonférence, & μ un nombre entier positif ou négatif; donc si $h =$ tang. $\theta\pi$, on aura $\mu\pi = m\theta\pi$, donc $m = \frac{\mu}{\theta}$.

Je considère en second lieu, que $\log.(x + hx\sqrt{-1}) - \log.(x - hx\sqrt{-1}) = \log.\left(\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}\right) = 2\sqrt{-1}\int\frac{dh}{1 + hh} = 2\sqrt{-1} \times \theta\pi$. De là il est aisé de voir que si on fait $\varphi(x) = \frac{M\log.(f + hx)}{\theta\pi} + A(f + hx)^{\frac{\mu}{\theta}} + B$, on aura $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$; ce qui se verra facilement, en mettant $x \pm y\sqrt{-1}$ au lieu de x dans la valeur de φx, & ensuite $f + hx$ au lieu de y.

Or il est aisé de voir qu'au lieu de $A(f + gx)^{\frac{\mu}{\theta}}$ dans la valeur de φx, on peut écrire une suite de termes tels que $A[(f + gx)^{\frac{k}{\theta}} + \lambda]^p$, A & λ étant des constantes arbitraires, & p, k des nombres entiers posi-

terminera b & b' par une semblable méthode; je n' en présente ici, Monsieur, que l' esprit & l' idée générale; cette légère idée suffit à un aussi grand Géométre que vous, pour voir tout ce qu'on en peut tirer.

Si au lieu de x on mettoit une fonction quelconque X de x, ensorte que $a\,\varphi\,(\alpha X + \beta y \sqrt{-1}) + a'\,\varphi\,(\alpha X + \beta' y \sqrt{-1}) +$ &c. dût être $= 0$, on trouveroit de même la valeur de $\varphi\,\alpha X$, pourvu que y fut $= f + hX$. Si le second membre de l' équation, au lieu d' être $= 0$ étoit $= K x^m$, alors il faudroit faire $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^m = A + B \sqrt{-1}$, $(\alpha' + \beta' \sqrt{-1})^m = A' + B' \sqrt{-1}$; &c., prenant ω pour un coéficient indéterminé, supposer $\omega a (A + B \sqrt{-1}) + \omega a' (A' + B' \sqrt{-1}) +$ &c. $= K$, ce qui donnera ω. Si le second membre étoit $K x^m + K' x^{m'}$ + &c. on feroit de plus $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^{m'} = (A) + (B) \sqrt{-1}$, & on prendroit $\omega' a [(A) + (B) \sqrt{-1}] + \omega' a' [(A') + (B') \sqrt{-1}] +$ &c. $= K'$, & ainsi du reste. Si le second membre étoit K log. $x + M$; alors il faudroit faire $a\,\omega$ log. $x\,(\alpha + \beta \sqrt{-1}) + a'\,\omega$ log. $x\,(\alpha' + \beta' \sqrt{-1}) +$ &c. $= K$ log. $x + M$; d'où l'on tirera $a\,\omega + a'\,\omega +$ &c. $= K$, & supposant log. $\alpha + \beta \sqrt{-1} = A + B \sqrt{-1}$, &c., on auroit $a\,\omega\,(A + B \sqrt{-1}) + a'\omega\,(A' + B' \sqrt{-1}) +$ &c. $= M$. Mais en voila assez sur ce sujet.

Au reste, ces formules ne peuvent avoir, ce me semble, aucune application pour trouver le mouvement d' un fluide dans un vase dont les parois auroient pour équation $y = f + hx$; & on peut même remarquer, que toutes les fois que l' équation des parois donnera $y = 0$ pour une seule valeur de x à volonté, l'équation $\varphi\,(x + y \sqrt{-1}) - \varphi\,(x - y \sqrt{-1}) = 2 M \sqrt{-1}$ sera illusoire pour représenter le mouvement du fluide. Car d'abord on aura $M = 0$ dans la courbe des parois, puisque $y = 0$ donne $M = 0$; or M ne sauroit être $= 0$ dans les autres cour-

bes, puisqu'elles ne sont distinguées de la courbe des parois que par la valeur de M; donc ces courbes ne sauroient couper, ni l'axe, puisque y seroit alors $= 0$, ce qui donneroit $M = 0$, ni la courbe des parois, puisque dans le point commun aux deux courbes M seroit nécessairement $= 0$ dans l'une, comme il l'est (*hyp.*) dans l'autre; ces courbes ne pourroient donc que rentrer en elles-mêmes, & par conséquent ne représenteroient pas le mouvement progressif; ce qui peut d'ailleurs se voir aisément à *priori*.

I I I.

Voici de quelle manière je m'y prends pour trouver, dans l'équation du problême des trois corps, la valeur du rayon par approximation, sans être obligé de substituer, à chaque opération, la valeur du rayon trouvée dans l'opération précédente.

Soit par exemple $ddt + N^2 t dz^2 + \beta t \operatorname{cos}. pz = 0$; je remarque que, par la nature de la solution que j'ai donnée de ces sortes d'équations, tout terme de cette forme $+ \omega \operatorname{cos}. \lambda z$ dans la valeur de t, produira dans $\beta t \operatorname{cos}. pz$, deux termes de cette forme $- \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda + p)^2)} \times \omega \operatorname{cos}. (\lambda z + pz) - \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda - p)^2)} \times \omega \operatorname{cos}. (\lambda z - pz)$, & deux autres de cette forme $+ \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda + p)^2)} \times \omega \operatorname{cos}. Nz + \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda - p)^2)} \times \omega \operatorname{cos}. Nz$. Donc prenant, par exemple, $k \operatorname{cos}. Nz$ pour la première valeur de t, il n'y a qu'à 1.° augmenter & diminuer successivement N de $+ p$ & de $- p$, multiplier k par $- \frac{\beta}{2}$ & diviser le produit par N^2 moins le quarré du coéficient de z. 2.° écrire chaque terme ainsi trouvé, l'un dans une colonne verti-

cale à droite, l'autre dans une colonne verticale à gauche, de celui qu'on vient d' avoir par l'opération précédente, & sous la colonne dont le terme le plus haut est k cos. $N z$, mettre de suite les coéficiens de cos. $N z$ semblables à ceux qu'on vient d' indiquer, & qui peuvent se réduire à un seul, savoir $+ \frac{\beta\omega(N^2-\lambda^2-p^2)}{(N^2-\lambda^2-p^2)^2-4\lambda^2p^2}$ cos. $N z$. De là il est aisé de voir que le terme k cos. $N z$ produira les termes

$$- \frac{\beta k \cos.(Nz \pm pz)}{2(N^2-(N\pm p)^2)} + \frac{\beta\beta k \cos.(Nz \pm 2pz)}{2.2.(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

$$- \frac{\beta^3 k \cos.(Nz \pm 3pz)}{2.2.2.(N^2-(N\pm 3p)^2)\times(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

$$+ \frac{\beta^4 k \cos.(Nz \pm 4pz)}{2^4(N^2-(N\pm 4p)^2)\times(N^2-(N\pm 3p)^2)\times(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

– &c., le signe + étant pour les colonnes à droite de celle où est k cos. $N z$, & le signe — pour les colonnes à gauche. A l' égard du terme k cos. $N z$, il sera de même successivement augmenté des termes $+ \frac{\beta k \cos. Nz}{2(N^2-(N\pm p)^2)}$

$$- \frac{\beta\beta k \cos. Nz}{2.2.(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)} + \frac{\beta^3 k \cos. Nz}{2.2.2.\,\&c.}\ \&c.$$

lesquels en produiront eux mêmes de nouveaux, analogues à ceux que le terme k cos. $N z$ a produit. Vous verrez aisément, Monsieur, par cette vuë générale, comment on peut trouver facilement les différens termes successifs de la série qui exprime la valeur de t. Si on avoit $\lambda \pm p = N$, le dénominateur seroit $= 0$; en ce cas au lieu des quatre nouveaux termes que le terme ω cos. $(\lambda z \pm pz)$ produit dans la valeur de t, il faudroit seulement changer le coéficient N de $N z$ en un autre N', tel que N'^2 fût $= N^2 + \frac{\beta R}{2k'}$, k' étant le coéficient de cos. $N z$ dans la valeur de t trouvée par les opérations précédentes, & R le coéficient du terme R cos. $(Nz \pm pz)$ qui multiplié par β cos. pz

très-petits, & ſuppoſant pour plus de généralité $\frac{d\epsilon}{dz} = \mu$ lorſque $z = 0$, $d\epsilon = \frac{dz \int \Psi dz}{\text{coſ.}\, \pi^2} + \mu dz - k' \alpha \frac{dz}{\text{coſ.}\, \pi}$; & $dd\alpha + \alpha k'^2 dz^2 - k' \frac{dz \int \Psi dz}{\text{coſ.}\, \pi} - k' \mu \,\text{coſ.}\, \pi \, dz^2 - \Gamma dz^2 = 0$. Donc faiſant encore $\frac{d\alpha}{dz} = \nu$ lorſque $z = 0$, on aura la valeur de α par les méthodes d'intégration connues, & enſuite celle de $d\epsilon$. Si on ſuppoſe μ & $\nu = 0$, ces valeurs ſeront $= 0$, lorſque $z = 0$, comme elles le doivent être; & en négligeant dans les valeurs de α & de ϵ les termes très-petits, on retombera dans les mêmes valeurs que donneroient les équations $\Psi dz = k' dz$ ſin. π & $\Gamma dz + d\epsilon k'$ coſ. $\pi = 0$.

V.

Je ſuis charmé que nous ſoyons enfin preſque abſolument d'accord ſur le problème des cordes vibrantes. Vous avez reconnu, ſuivant ce que vous me dites, que la ſolution ne peut avoir lieu, comme je le prétendois, ſi les branches alternatives ne ſont pas aſſujetties à la loi de continuité; vous y mettez ſeulement une reſtriction, la ſolution peut avoir lieu, ſelon vous, ſi la courbe initiale n'eſt aſſujettie à aucune équation, pourvu que dans cette courbe $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faſſe de ſaut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives. Mais comment concevez vous qu'il puiſſe ne point y avoir de pareils ſauts dans une courbe tracée au hazard, & qui ne ſera aſſujettie, comme vous l'exigez, à aucune équation? Il me paroit que cette propriété ne peut appartenir qu'à une courbe régulièrement tracée, & aſſujettie à une équation; en effet pour que $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faſſe de ſaut nulle part, il faut qu'en

prenant une partie infiniment petite de la courbe partout ou l'on voudra, & y faiſant commencer les coordonnées, on puiſſe ſuppoſer que dans cette petite portion y ſoit égale à $A + Bx^m + Cx^n + Dx^p +$ &c. Prenons maintenant une petite partie contigue à celle-là, on aura par la même raiſon $y = A' + B'x^{m'} + C'x^{n'} + D'x^{p'} +$ &c. Or ſi les expoſans m & m', n & n', p & p' &c. n'étoient pas les mêmes, & ſi les coefficiens A & A', B & B', C & C' &c. n'étoient pas tels qu'il doivent être pour appartenir à une courbe continue, il y auroit un *ſaut* dans quelqu'un des $\frac{d^n y}{dx^n}$ au point commun qui unit ces deux parties infiniment petites. Donc puiſqu'on ſuppoſe qu'il n'y a point de ſaut dans $\frac{d^n y}{dx^n}$, il s'enſuit que ces deux parties, & par la même raiſon toutes les ſuivantes à droite & à gauche, ſont aſſujetties à une même équation. D'ailleurs quand il ſeroit vrai que la ſolution ſeroit applicable à certaines courbes tracées au hazard, comment s'aſſurera-t-on que dans ces courbes $\frac{d^n y}{dx^n}$ n'y ſera point de ſaut? condition néceſſaire, ſelon vous, pour que la ſolution ſoit applicables à ces courbes. Vous trouverez, Monſieur, beaucoup d'autres reflexions ſur cette matière dans un long Mémoire que je deſtine au quatriéme Volume de mes Opuſcules. En attendant je déſire beaucoup de ſavoir votre avis ſur les obſervations que j'ai l'honneur de vous propoſer, & je ne déſire pas moins que cet avis nous rapproche entiérement quant au point ſur lequel nous différons encore, & qui me ſemble purement métaphyſique.

Je ne penſe pas au reſte que la ſolution ne puiſſe avoir lieu dans une courbe à équation, ſi elle n'eſt repréſentée par

$$y = \alpha \text{ ſin. } \pi x + \beta \text{ ſin. } 2 \pi x + \gamma \text{ ſin. } 3 \pi x + \text{\&c.}$$

à la manière de M. Daniel Bernoulli. Il me paroit évi-

dent au contraire que la ſolution peut avoir lieu dans beaucoup d'autres courbes ; par exemple dans celle qui auroit pour équation $y = \alpha$ ſin. $\pi x^{\frac{p}{q}}$, α étant fort petit, & p, q des nombres impairs, tels que p ſoit $> q$, afin que dy ne ſoit nulle part $= \infty$, ce qui eſt contre l'hypothèſe, ſur laquelle la ſolution eſt appuyée. Je ſais que dans ces courbes il y auroit quelqu'un des $\frac{d^n y}{dx^n}$ qui ſeroit infini ; mais cela n'empêche pas, ce me ſemble, la ſolution d'être bonne, il ſuffit que $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faſſe point de *ſaut*, c'eſt-à-dire ne paſſe pas *bruſquement* du fini à l'infini, ou de l'infini au fini, ou d'une valeur finie à une autre valeur finie.

VI.

Votre formule pour exprimer par une ſuite ſans imaginaires la valeur de $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$, ou celle de $\frac{\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$ me paroit très-élégante. J'en ai imaginé une toute différente pour parvenir au même objet, & qui a cet avantage, que quand φx eſt $= Ax^m + Bx^n +$ &c. m & n étant des nombres entiers poſitifs, la ſuite n'a qu'un nombre fini de termes, comme il arrive dans la formule du Binome. Il ſeroit trop long de vous expoſer ici tout le procédé du calcul, qui peut même être encore plus ſimplifié que je n'ai fait juſqu'à préſent ; je vous dirai ſeulement qu'il eſt fondé ſur les conſidérations ſuivantes.

1.° $\varphi(x + y) = \varphi x + y \frac{d\varphi x}{dx} + y^2 \frac{d^2\varphi x}{2dx^2} + y^3 \frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} +$ &c., &

$\varphi(x+2y) - 2\varphi(x+y) + \varphi x = ay^2 \frac{d^2\varphi x}{dx^2} + by^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + cy^4 \frac{d^4\varphi x}{dx^4} +$ &c.

$\varphi(x+3y) - 3\varphi(x+2y) + 3\varphi(x+y) - \varphi x = a'y^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + b'y^4 \frac{d^4\varphi x}{dx^4} +$ &c.

&c.

a, b, c &c. & a', b', c' &c. étant des coefficiens connus, & trouvés par ce qu'on vient de dire; on multipliera ensuite la seconde équation par r, la troisiéme par r', la quatriéme par r'' &c. r, r', r'' étant des coefficiens indéterminés, & après les avoir ajoutées ensemble on fera chaque terme du second membre $= 0$, ce qui donnera $\sqrt{-1} + r = 0$, $-\frac{1}{2} + \frac{r}{2} + ar' = 0$, $\frac{\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{r}{2.3} + br + a'r'' = 0$ &c., & ainsi de suite; d'où l'on tirera r, r', r'' &c. & le problème sera résolu.

Je ne fais ici, Monsieur, qu'indiquer les principaux points de la solution, qu'il est d'ailleurs aisé de simplifier, ainsi que je l'ai déja dit. Je crois au reste que toutes ces méthodes pour déterminer $\varphi(x + by\sqrt{-1})$ sont plus curieuses qu'utiles; car 1.° si φx n'est point une fonction algébrique, mais une fonction discontinue, en ce cas il y aura un *saut* dans quelqu'un des $d^n\varphi x$, & par conséquent l'expression trouvée ci-dessus de $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi x$, ou toute autre, je crois, qu'on y voudroit substituer, sera fautive, si je ne me trompe. 2.° si φx est algébrique, on peut imaginer différentes méthodes pour déterminer algébriquement, ou au moins géométriquement, les quantités $\varphi(x + by\sqrt{-1}) + \varphi(x - by\sqrt{-1})$ ou $\frac{\varphi(x+by\sqrt{-1}) - \varphi(x-by\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$.

l'aberration, lorſque le point lumineux eſt hors de l'axe; méthode que vous trouverez, je crois, plus naturelle & plus ſimple que celles qui ont été employées par d'autres Géomètres pour réſoudre le même Problème. Quoiqu'il en ſoit, la reſtitution de ce terme a ſimplifié beaucoup mes formules pour l'aberration latitudinale, & m'a donné les dimenſions de deux excellens objectifs, compoſés chacun de deux lentilles de verre commun ou *crownglaſs*, & d'une de cryſtal d'Angleterre ou *flintglaſs*, qui eſt entre les deux autres, & collée contre elles. Voici les dimenſions de ces objectifs; R étant la diſtance focale, & r, r', r'', r''', les rayons des quatre ſurfaces, on a pour l'un des objectifs

$$r = +0,5986R$$
$$r' = -0,3255R$$
$$r'' = +0,7288R$$
$$r''' = -1,8116R$$

& pour l'autre

$$r = +0,4630R$$
$$r' = +2,7574R$$
$$r'' = +0,2081R$$
$$r''' = -15,594R.$$

Ces deux objectifs ont chacun cela d'excellent, qu'ils reſteroient encore très-bons, quand on commettroit dans les valeurs de r, r' &c. des erreurs conſidérables. C'eſt ce que je me propoſe de détailler plus au long, ſoit dans les Mém. de l'Académie des Sciences de Paris, ſoit dans le quatriéme Volume de mes Opuſcules.

Au reſte les dimenſions que je viens de donner ſuppoſent que le rapport de dP à dP' ſoit $\frac{2}{3}$; il eſt inutile de dire qu'elles changeroient ſi $\frac{dP}{dP'}$ avoit une autre va-

leur, par exemple celle de 20 à 32, comme plusieurs expériences le donnent; dans ce cas l'aberration de refrangibilité ne feroit pas détruite, mais $= \frac{11}{45}$ de celle d'une lentille biconvexe isocele, ce qui est considérable; mais il est aisé de remédier à cet inconvénient par différens moyens qu'il seroit trop long de détailler ici.

FIN.

ERRATA PARTIS PHYSICAE

Sic corrigenda.

Pag. 41. *lin.* 6. quam vis affrictus - quum vis affrictus.

P. 49. *l.* 10. conversa sunt vel angulum - conversa sunt, & vel angulum.

P. 61. *l.* 23. ab infima ad supremum - ab infima ad supremam.

P. 165. *l.* 7. quos in calida - - - - quos in calidam.

l. 18. in ignem difflabilem - - in igne difflabilem.

P. 166. *l.* 2. atque insuper deprehendimus - atque adeo deprehendimus.

Ad *P.* 174. thermometrum reaumurianum de quo hic, & alibi in praecedentibus Tomis mentio fit erat mercuriale, cujus scala inter frigus liquescentis glaciei, & calorem aquae ebullientis in octuaginta gradus divisa erat; quae monenda esse censuimus, quum hujusmodi gradus a similibus gradibus thermometri spiritu vini confecti, qualia sunt reaumuriana, ob varias, ut notum est caussas, valde dissentiant.

P. 180. *l.* 11. Botanicas - - - - Botanices.

P. 199. *l.* 4. nigricans, ventre ad - nigricans, ventre ad

P. 204. *l.* 16. 24. agarium - - agaricum.

P. 210. *l.* 25. Ignotam - - - - ignotum.

P. 215. *l.* 16. previa est - - - - pervia est.

l. 25. duplicis densa - - - duplici densa.

l. 27. parviis - - - - - parvis.

Imprimatur. Piselli Vic. Generalis S.Officii Taurini.

Se ne permette la ſtampa

Galli per la Gran Cancellería.

Fig 1.

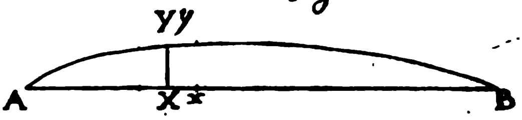


Fig. 2.

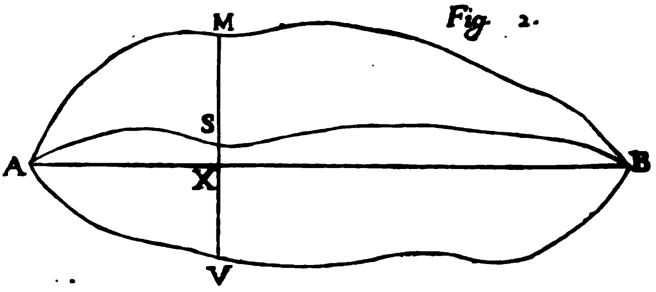


Fig. 3.

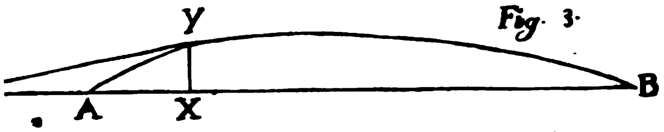
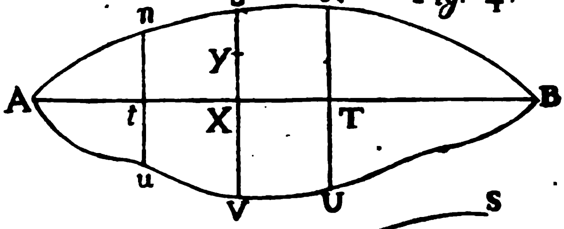


Fig. 4.



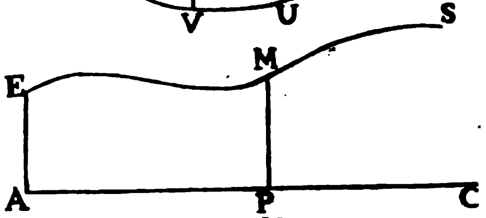
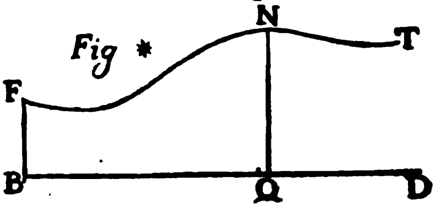
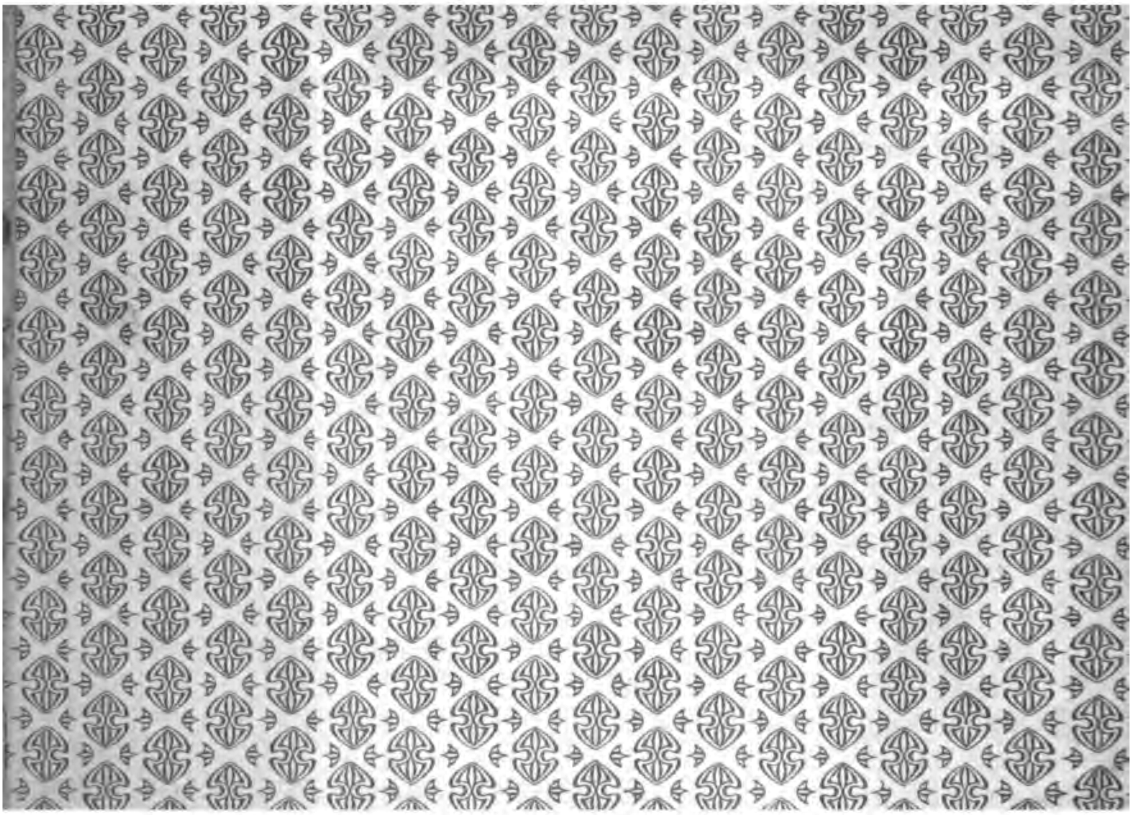


Fig *





UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 03546 7193